

05(244)
Вісн



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 3

КИЇВ - 2007

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича
КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



12835JB

45 - чит.зал періодики та дисерт Ц: 20.00

ВИПУСК №3 2007

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”.

У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики. Для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів.

Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Редакційна колегія:

- **Анісімов Анатолій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
- **Хусаїнов Денис Ях'євич**, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
- **Адаменко Ірина Іванівна**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Акименко Віталій Володимирович**, доктор технічних наук, професор;
- **Анісімов Ігор Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Буй Дмитро Борисович**, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
- **Булавін Леонід Анатолійович**, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Гарашенко Федір Георгійович**, доктор технічних наук, професор;
- **Данилов Вадим Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Єжов Станіслав Миколайович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Кириченко Володимир Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Козаченко Юрій Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Левитський Сергій Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Іакара Володимир Арсенійович**, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Мелешко В'ячеслав Володимирович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Перестюк Микола Олексійович**, доктор фізико-математичних наук, професор;
- **Скришевський Валерій Антонович**, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

- **Анісімова Тетяна Харитонівна**, **відповідальний секретар**;
- **Безущак Оксана Омелянівна**;
- **Мороз Костянтин Олександрович**;
- **Родіонова Тетяна Василівна**;
- **Хмелюк Надія Кузьмівна**;
- **Шишацька Олена Володимирівна**, **технічний редактор**.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 2, корп.6, 03680 Тел. (044) 259-01-49

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Дудченко І.В. Сильнозв'язні сагайдаки, їх індекси та власні вектори	9
Журавльов В.М. Глобальна розмірність горенштейнових SPSPD-кілець з ненульовим радикалом Джекобсона	16
Жучок Ю.В. Ендоморфізми відношень еквівалентності	22
Зеленський О.В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників	27
Курдаченко Л.А., Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н., Субботин И.Я. О некоторых вопросах теории обобщенно разрешимых групп	32
Лавренюк Я.В. Олійник А.С. Про вінцеві добутки за деревовидно впорядкованими множинами	45
Пискун М.М. О применении некоторых теоретико-кольцевых понятий для систем подгрупп группы	49
Ревенко О.В. Про ергодичні теореми	56

ДИФЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Асроров Ф.А., Аззамов Т.Ж., Данілов В.Я. Експоненційна стійкість інтегральної множини	61
Бойчук О.В. Поле залишкової непружної деформації в диску, викликане тепловим імпульсом	66
Гнатюк П.В., Касьянов П.О. Операторні рівняння в нескінченновимірних банахових просторах з відображенням монотонного типу	70
Зуєв О.Л. Стабілізація просторових коливань моделі пружної системи	74
Кикоть С.В. Вимушені коливання реологічного трубопроводу з потоком рідини	80
Кравченко О.В. Кручення пружного круглого валу з неконцентричною круглою порожниною	89
Моїсеєнко В.О. Хвильові потенціали для просторових хвилеводних об'єктів із анізотропних матеріалів	94
Островський В.В. Динаміка точкових вихорів на сфері	99
Філімоніхіна І.І. Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи	103

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Акіменко В.В., Сугоняк І.І. Динамічні моделі життєвого циклу інновацій в умовах невизначеності	111
Александрович І.М., Кочулова О.Г., Ляшко В.І., Сидоров М.В.-С. Задача Діріхле для узагальненого осесиметричного рівняння Гельмгольца у півсмузі	119
Горностай М.П. Деякі питання серверної підтримки інформаційних систем, здатних до навчання	123
Доценко С.І., Луценко Є.О. Оптимізація розкладу в системах конвеєрного типу	131
Єлейно Я.І., Заболоцький Т.М. Асимптотичне поводження розв'язку зліченновимірних рівнянь відновлення	135
Кахута Н.Д. Критерії ін'єктивності бінарних відношень	141
Коцовський В.М. Нейромережі прямого поширення з комплексними вагами	147
Кузьмін А.В. Чисельне моделювання розповсюдження хвиль на поверхні ідеальної рідини	150
Малишева Т.М. Інтерполяційні формули в $L_2(0, T)$, що є асимптотично точними на поліномах	157
Мартиненко І.А. Обчислення точного рівня значущості довірчого інтервалу Вільсона для невідомої ймовірності	163
Нікітін А.В. Стійкість у середньому квадратичному стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у гільбертовому просторі	167
Романюк С.І., Цикунов В.С., Шевченко В.П. Програмні та апаратні засоби побудови комп'ютерної мережі факультету	170
Россохата Н.О. FD-метод для задачі трансмісії на власні значення з потенціалом з простору L_1	176
Рубльов Б.В., Сьоміна О.С., Шарманська В.Б. Побудова дискретизованого зображення з різним рівнем дискретизації та апроксимації межі фігури на площині	181
Саженьок В.С. Методи штрафу та фіктивних областей для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням на границі області	186
Семенов В.В. Узагальнені екстремальні елементи опуклих функціоналів	189
Терещенко Л.М. Напружений стан двох магніто-м'яких кругових осесиметричних включень, що знаходиться під дією	194

сильно розбавленого водного розчину пропанолу	
Байдулаєва А., Велешук В.П., Власенко О.І., Ляшенко О.В., Даулетмуратов Б.К., Чуприна Р.Г. Співставлення процесів акустичної емісії та флуктуацій квантового виходу і струму в гетероструктурах	269
Водоп'янов Д.Л., Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Білокриницька Л.М. Вплив мультипольної взаємодії на поляризованість кульової частинки, розташованої біля підкладки	273
Гаврюшенко Д.А., Сисоєв В.М. Визначення концентраційної залежності хімічних потенціалів бінарного розчину методом одношарової адсорбції	279
Гречко Л.Г., Лерман Л.Б., Семчук О.Ю., Лющенко М.О., Куницька Л.Ю. Індуковані лазерними пучками поверхневі періодичні структури	282
Жабітенко О.М., Бурлій П.В., Козаченко В.В. Фототермоакустичний ефект в тонких плівках при двомікрофонній реєстрації	290
Захаренко М. І., Орленко М. В. Про природу концентраційної залежності магнітного моменту аморфних сплавів на основі заліза	294
Курилюк В.В., Горб А.М., Оліх О.Я., Коротченков О.О. Вплив ультразвуку на вольт-амперні характеристики гетероструктур GaAs/AlGaAs	298
Куцова В.З., Новиков М.М., Носко О.А., Шерстобитова А.С. Вплив легуювання на структуру і властивості сплаву $Si_{0,85}Ge_{0,15}$	301
Мацуї Л.Ю., Вовченко Л.Л., Шевченко Н.М. Аномальна поведінка електроопору невідпорядкованого графіту інтеркальованого $SbCl_5$, $AlCl_3$, та ICl	307
Пророк В.В., Мельниченко Л.Ю. Особливості надходження цезію та стронцію з ґрунту до рослин	314
Усенко К.В., Черкашина Н.О. Відносні координати та імпульс пари когерентних електронів	318

Abstract: This document discusses the relationship between algebra, geometry, and probability. It explores how these fields intersect and how they can be used to solve complex problems. The document is intended for students and researchers in the field of mathematics.

Abstract: This document discusses the relationship between algebra, geometry, and probability. It explores how these fields intersect and how they can be used to solve complex problems. The document is intended for students and researchers in the field of mathematics.

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Вступ. Ця робота присвячена вивченню зв'язків між алгеброю, геометрією та теорією ймовірностей. Ми розглянемо, як ці три галузі математики взаємодіють і як їх можна використовувати для розв'язання складних задач.

Вступ. Ця робота присвячена вивченню зв'язків між алгеброю, геометрією та теорією ймовірностей. Ми розглянемо, як ці три галузі математики взаємодіють і як їх можна використовувати для розв'язання складних задач.



(1)

Розглянемо квадрат (1), який має сторону 1. Його площа дорівнює 1. Якщо ми розділимо його на чотири рівних частин, то кожна частина матиме площу 1/4.



Якщо ми розглянемо квадрат (2), який має сторону 2, то його площа дорівнює 4. Якщо ми розділимо його на чотири рівних частин, то кожна частина матиме площу 1.

Розглянемо квадрат (2), який має сторону 2, то його площа дорівнює 4. Якщо ми розділимо його на чотири рівних частин, то кожна частина матиме площу 1.

УДК 512.552

Ірина В. Дудченко, аспірант

Сильнозв'язні сагайдаки, їх індекси та власні вектори

Описано характеристичні многочлени сильнозв'язних сагайдаків без петель, число вершин яких не перевищує 4. Для таких сагайдаків встановлено критерії ізоморфізму.

Ключові слова: сильно зв'язний сагайдак, нереставно незвідна матриця, матриця суміжності.

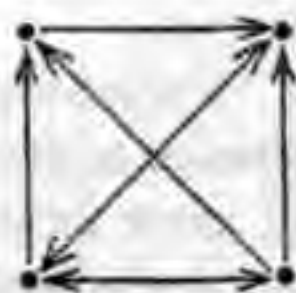
E-mail: dudchenko@univ.kiev.ua

1. Вступ.

В монографії Ф.Харарі ([1], додаток II) подаються діаграми орієнтованих графів, що мають не більш чотирьох вершин. В термінології Габріеля, такі графи англійською мовою називаються quivers, для українського перекладу цього терміну ми вживаємо термін сагайдаки. В додатку II розглядаються сагайдаки без кратних стрілок і без петель.

Нагадаємо, що сагайдак, що має більш однієї вершини, називається сильно зв'язним, якщо існує орієнтований шлях з довільної його вершини в іншу, яка може співпадати з початковою.

Як повідомив нам А.Г. Ганюшкін в цьому переліку сагайдаків є недоліки: сагайдаки з числом вершин $p=4$ та числом стрілок $q=8$ за номерами 18 та 22 співпадають і був пропущений сагайдак Q з наступною діаграмою:



(1)

Покажемо, що сагайдаки (4,8), що мають номери 8.18 та 8.22 однакові.

Сагайдак 8.18 має вигляд:



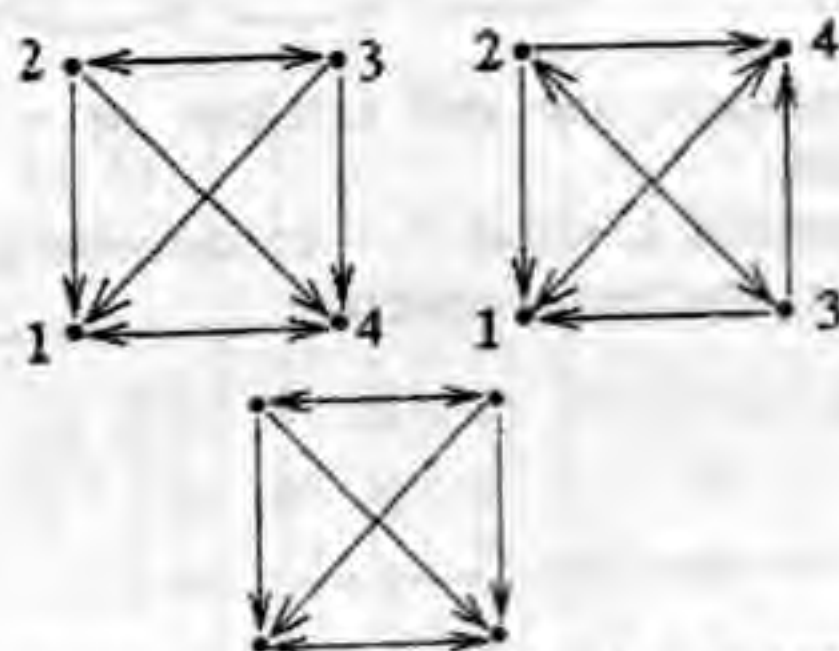
, а діаграма сагайдака 8.22 представляється наступним чином:

Irina V. Dudchenko, PhD student

Strongly connected quivers, their indexes and eigenvectors

We calculate characteristic polynomials of simply laced quivers without loops with the numbers of vertices ≤ 4 . For such quivers a criterion of isomorphism is given.

Key Words: strongly connected quiver, permutationally irreducible matrix, adjacency matrix.



Занумерував вершини сагайдаків, як вказано вище, ми отримуємо, що вони співпадають.

Цей сагайдак не є сильно зв'язним, так як в ньому немає шляху з вершини 1 в вершину 2. Пропущений сагайдак (1) є сильно зв'язним.

2. Формулювання основної теореми та список сильно зв'язних сагайдаків без кратних стрілок та петель.

В цій статті ми приводимо перелік всіх сильно зв'язних сагайдаків з числом вершин $p = 2, 3, 4$. При $p = 4$ існує 83 сильно зв'язних сагайдака. Для цих сагайдаків ми рахуємо їх індекси (найбільше за величиною власне значення їх матриць суміжності) та власні вектори, що відповідають цим індексам.

Ми дотримуємося наступної нумерації, прийнятої в додатку 2 монографії [1] за виключенням випадків, котрі будуть спеціально вказані.

Нагадаємо означення сагайдака $Q(B)$ матриці B з елементами з поля дійсних чисел R . Нехай $M_n(R)$ - множина всіх квадратних матриць порядку n з елементами з R та $B = (b_{ij}) \in M_n(R)$.

Довільний сагайдак Q складається з двох множин VQ та AQ , де VQ множина всіх вершин

Q , а AQ множина всіх його стрілок. Множина вершин $VQ(B) = \{1, \dots, n\}$. Стрілка σ_{ij} з початком в вершині i та кінцем в вершині j лежить в $AQ(B)$ тоді і тільки тоді, коли $b_{ij} \neq 0$. Наступні два приклади взяті з книги [2, § 2.2].

Приклад 1. Нехай P_1 – стохастична матриця порядку 5 наступного вигляду:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

, де $p + q = 1$ та $p \neq 0$ і $q \neq 0$ [2, § 2.2].

Очевидно, $Q(P)$ має наступний вигляд:



Зауважимо, що цей сагайдак не є сильно зв'язним.

Приклад 2. Нехай P_2 – стохастична матриця порядку 5 наступного вигляду:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

та $p \neq 0$ і $q \neq 0$.

Очевидно, $Q(P)$ має наступний вигляд:



Зауважимо, що цей сагайдак є сильно зв'язним.

За [4], вводимо означення перестановочно звідної та перестановочно незвідної матриці. Такі матриці в книзі [3, гл. 13] називаються відповідно розкладними і нерозкладними матрицями.

Нехай $e_{ij} \in M_n(R)$ – матрична одиниця. Це означає, що матриця e_{ij} має вигляд:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

, тобто єдиним ненульовим елементом матриці

$e_{ij} \in 1 \in R$, що стоїть на перетині i -тої строки та j -того стовпця матриці e_{ij} .

Нехай τ – перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Позначимо через $P_\tau \in M_n(R)$ наступну матрицю:

$$P_\tau = \sum_{i=1}^n e_{i\tau(i)}. \text{ Очевидно, } P_\tau^T P_\tau = P_\tau P_\tau^T = E.$$

Матриця P_τ називається матрицею перестановки τ або перестановочною матрицею.

Означення. Матриця $B \in M_n(R)$ називається перестановочно звідною, якщо існує перестановочна матриця P_τ така, що $P_\tau^T B P_\tau = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де

B_1 та B_2 квадратні матриці порядку, меншого за n . В іншому випадку матриця B називається перестановочно незвідною.

Має місце наступна теорема (див. [4], § 7.7).

Теорема. Матриця $B \in M_n(R)$ перестановочно незвідна тоді і тільки тоді, коли її сагайдак $Q(B)$ сильно зв'язний.

Позначимо через $1, \dots, s$ всі вершини сагайдака Q і нехай існує рівно t_{ij} стрілок з вершини i в вершину j . Якщо немає стрілок з i в j , то $t_{ij} = 0$. Матриця

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \dots & t_{ss} \end{pmatrix}$$

називається матрицею суміжності сагайдака Q і позначається $[Q]$.

З вище вказаної теореми випливає наслідок.

Наслідок. Сагайдак Q сильно зв'язний тоді і тільки тоді, коли його матриця суміжності $[Q]$ перестановочно незвідна.

В силу теореми Перона-Фробеніуса (див. [3] стор. 354-355) для кожної додатної перестановочно незвідної матриці існує власний додатний вектор з найбільшим додатним власним числом цієї матриці. Два додатних вектори будемо називати еквівалентними, якщо один отримується з другого перестановкою координат.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Основна теорема. Нехай Q_1 та Q_2 – сильно зв'язний сагайдак без петель та кратних стрілок, число вершин якого не більше за 4. Сагайдаки Q_1 і Q_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли характеристичні многочлени їх матриць суміжності співпадають, а власні додатні вектори, що відповідають найбільшому власному числу цих матриць еквівалентні.

Доведення теореми базується на обчисленні характеристичних многочленів цих сагайдаків та їх власних векторів.

	Число вершин р сагайдака Q та чис- ло q стрі- лок Q (p, q)	Матриця суміжності [Q] сагайдака Q	Характе- ристичний многочлен матриці [Q] та її індекс імприміта- вності h
2.1	(2, 2)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^2 - 1$ h = 2
3.1	(3, 3) № 2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 - 1$ h = 3
3.2	(3, 4) № 1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 - 2\lambda$ h = 2
3.3	(3, 4) № 2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 - \lambda - 1$ h = 1
3.4	(3, 5)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 - 2\lambda - 1$ h = 1
3.5	(3, 6)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^3 - 3\lambda - 2$ h = 1
4.1	(4, 4) № 4.16	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 1$ h = 4
4.2	(4, 5) № 5.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 1$ h = 2
4.3	(4, 5) № 5.25	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda$ h = 1
4.4	(4, 5) № 5.32	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda - 1$ h = 1
4.5	(4, 5) № 5.35	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda$ h = 3

4.6	(4, 6) № 6.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2$ h = 2
4.7	(4, 6) № 6.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$ h = 2
4.8	(4, 6) № 6.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2$ h = 2
4.9	(4, 6) № 6.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 1$ h = 2
4.10	(4, 6) № 6.11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$ h = 1
4.11	(4, 6) № 6.14	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$ h = 1
4.12	(4, 6) № 6.16	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$ h = 1
4.13	(4, 6) № 6.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1$ h = 1
4.14	(4, 6) № 6.28	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda$ h = 1
4.15	(4, 6) № 6.30	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ h = 1
4.16	(4, 6) № 6.31	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda$ h = 1
4.17	(4, 6) № 6.33	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1$ h = 1
4.18	(4, 6) № 6.34	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1$ h = 1

4.19	(4, 6) № 6.37	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - \lambda - 1$ $h = 1$
4.20	(4, 6) № 6.42	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.21	(4, 6) № 6.45	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.22	(4, 7) № 7.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda + 1$ $h = 1$
4.23	(4, 7) № 7.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2$ $h = 2$
4.24	(4, 7) № 7.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda + 1$ $h = 1$
4.25	(4, 7) № 7.6	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda$ $h = 1$
4.26	(4, 7) № 7.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda + 1$ $h = 1$
4.27	(4, 7) № 7.8	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$ $h = 1$
4.28	(4, 7) № 7.10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$ $h = 1$
4.29	(4, 7) № 7.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.30	(4, 7) № 7.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda - 1$ $h = 1$

4.31	(4, 7) № 7.15	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.32	(4, 7) № 7.17	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.33	(4, 7) № 7.18	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.34	(4, 7) № 7.20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda - 1$ $h = 1$
4.35	(4, 7) № 7.21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.36	(4, 7) № 7.23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ $h = 1$
4.37	(4, 7) № 7.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.38	(4, 7) № 7.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda - 1$ $h = 1$
4.39	(4, 7) № 7.30	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.40	(4, 7) № 7.32	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.41	(4, 7) № 7.33	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.42	(4, 7) № 7.35	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 2$ $h = 1$

4.43	(4,7) № 7.38	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - \lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.44	(4,8) № 8.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$ $h = 1$
4.45	(4,8) № 8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2$ $h = 2$
4.46	(4,8) № 8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.47	(4,8) № 8.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda$ $h = 1$
4.48	(4,8) № 8.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.49	(4,8) № 8.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 1$ $h = 1$
4.50	(4,8) № 8.7	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.51	(4,8) № 8.8	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.52	(4,8) № 8.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - \lambda$ $h = 1$
4.53	(4,8) № 8.11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.54	(4,8) № 8.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$

4.55	(4,8) № 8.14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.56	(4,8) № 8.15	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.57	(4,8) № 8.16	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 4\lambda$ $h = 1$
4.58	(4,8) № 8.17	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.59	(4,8) № 8.19	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.60	(4,8) № 8.20	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 2$ $h = 1$
4.61	(4,8) № 8.23	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.62	(4,8) № 8.24	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 2$ $h = 1$
4.63	(4,8) № 8.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.64	(4,8) № 8.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.65	пропущений сагайдак(4,8)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 1$ $h = 1$
4.66	(4,9) № 9.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 3\lambda$ $h = 1$
4.67	(4,9) № 9.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 3\lambda$ $h = 1$

4.68	(4,9) № 9.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.69	(4,9) № 9.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 1$ $h = 1$
4.70	(4,9) № 9.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.71	(4,9) № 9.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$ $h = 1$
4.72	(4,9) № 9.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.73	(4,9) № 9.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 2$ $h = 1$
4.74	(4,9) № 9.10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 2$ $h = 1$
4.75	(4,9) № 9.12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 3$ $h = 1$
4.76	(4,9) № 9.13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$ $h = 1$
4.77	(4,10) № 10.1	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$ $h = 1$
4.78	(4,10) № 10.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2$ $h = 1$
4.79	(4,10) № 10.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1$ $h = 1$

4.80	(4,10) № 10.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1$ $h = 1$
4.81	(4,10) № 10.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 1$ $h = 1$
4.82	(4,11)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 6\lambda - 2$ $h = 1$
4.83	(4,12)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$ $h = 1$

3. Сагайдаки, характеристичні многочлени яких співпадають.

З вказаної вище таблиці легко бачити, що є декілька груп сагайдаків, характеристичні многочлени яких співпадають:

1. сагайдак під номером 4.10 із № 4.12, № 4.27 та № 4.28;
2. сагайдак під номером 4.13 із № 4.17, № 4.18 та № 4.19;
3. сагайдак під номером 4.14 із № 4.16;
4. сагайдак під номером 4.15 із № 4.31, № 4.32, № 4.35 та № 4.58;
5. сагайдак під номером 4.20 із № 4.39, № 4.41 та № 4.43;
6. сагайдак під номером 4.22 із № 4.24;
7. сагайдак під номером 4.25 із № 4.47 та № 4.52;
8. сагайдак під номером 4.29 із № 4.33 та № 4.37, № 4.59, № 4.64 та № 4.65;
9. сагайдак під номером 4.30 із № 4.34 та № 4.38;
10. сагайдак під номером 4.46 із № 4.48, № 4.50, № 4.51, № 4.55 та № 4.71;
11. сагайдак під номером 4.53 із № 4.70 та № 4.72, № 4.76;
12. сагайдак під номером 4.60 із № 4.62;
13. сагайдак під номером 4.61 із № 4.63;
14. сагайдак під номером 4.66 із № 4.67;
15. сагайдак під номером 4.73 із № 4.74;
16. сагайдак під номером 4.79 із № 4.80.

Приклад 1. Знайти власні вектори для сагайдаків з п.1.

Запишемо матриці суміжності для сагайдаків під номерами 4.10, 4.12, 4.27 та 4.28.

Відповідно маємо наступні матриці суміжності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Всі ці матриці мають наступний характеристичний многочлен

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda$$

Індексом всіх цих сагайдаків є число

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Для кожної з цих матриць суміжності запишемо їх власні вектори з власним числом, яке дорівнює індексу:

$$\bar{f}_1 = \left(\frac{1}{\lambda}, 1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2} \right)^T,$$

$$\bar{f}_2 = \left(\frac{1}{\lambda}, 1, \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda + 1}{\lambda^2} \right)^T,$$

$$\bar{f}_3 = (\lambda^3 - \lambda, 1, \lambda, \lambda^2 - 1)^T,$$

$$\bar{f}_4 = (1, \lambda^2 - \lambda, \lambda^2 - 1, \lambda)^T,$$

$$\text{де } \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Аналізуючи отриманий результат легко

бачити, що серед векторів $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4$ немає еквівалентних.

Таким же чином розглядаються і інші випадки сагайдаків, характеристичні многочлени яких співпадають. В жодному з випадків 2-16 немає еквівалентних власних векторів з власними числами, які дорівнюють індексам цих сагайдаків.

Тому основну теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Харари Ф., Теорія графів, пер. с англ., М., 1973.
2. Кемени Джон Дж. и Дж. Лори Снелл, Конечные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1970.
3. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, М., 1967.
4. Gubareni M., Kirichenko V., Rings and modules, Czestochowa 2001.

Надійшла до редколегії 10.10.2007

УДК 512.552

Віктор М. Журавльов*

Глобальна розмірність горенштейнових
SPSD-кілець з ненульовим радикалом
Джекобсона

Серія: фізико-математичні науки

В роботі доводиться, що глобальна розмірність первинного нетерового справа напівдосконалого напівдистрибутивного горенштейнового кільця з ненульовим радикалом Джекобсона дорівнює або один або нескінченність.

Ключові слова: SPSPD-кілець, горенштейновий черепичний порядок, глобальна розмірність, ґратка, підстановка Кириченка.

*E-mail: vshur@univ.kiev.ua

У роботі [2] С. Ейленберг та Т. Накаяма довели, що глобальна розмірність фробеніусової алгебри над полем дорівнює або 0 або ∞ . У цій же роботі встановлено, що, якщо алгебра A над полем K з $(A : K) < \infty$ є квазіфробеніусовим кільцем, то або $\text{gl.dim} A = 0$ або $\text{gl.dim} A = \infty$. У роботі [1] М. Ауслендер довів, що глобальна розмірність квазіфробеніусового кільця дорівнює або 0 або ∞ . Точніше він довів більш загальне твердження.

Асоціативне кільце A з одиницею називається напівпримарним, якщо радикал Джекобсона R цього кільця нільпотентний та факторкільце A/R є напівпростим кільцем. Нехай $A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$ — розклад напівпримарного кільця в пряму суму нерозкладних проєктивних лівих A -модулів. Тоді з точністю до ізоморфізму $\{V_i = Q_i/RQ_i\}_{i=1}^s$ — множина всіх простих лівих A -модулів. Для напівпримарного кільця завжди існують лівий та правий цоколі, причому $\text{soc}_A A \supset \bigoplus_{i=1}^s V_i$. Радикал R нільпотентний: $R^m = 0$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді ланцюг $A \subset R \subset R^2 \subset \dots \subset R^{m-1} \subset R^m = 0$ є спадним рядом Льові напівпримарного кільця.

Твердження 1 ([1]). Нехай A — напівпримарне кільце таке, що кожен простий лівий A -модуль ізоморфний лівому ідеалу кільця A . Тоді або $\text{gl.dim} A = 0$ або $\text{gl.dim} A = \infty$.

Ауслендер описав деякі класи кілець, які задовольняють умовам цього твердження.

Viktor N. Zhuravlev*

Global dimension of Gorenstein
SPSD-rings with nonzero Jacobson
radical

Series: Physics & Mathematics Sciences

We proved that global dimension of prime right Noetherian semiperfect semidistributive Gorenstein ring with nonzero Jacobson radical is either one or infinity.

Key words: SPSPD-ring, Gorenstein tiled order, global dimension, lattice, Kirichenko's permutation.

Твердження 2 ([1]). Умови твердження 1 виконані в кожному з наступних випадків:

- (a) кільце A є прямою сумою скінченного числа примарних кілець (напівпримарне кільце A є примарним, якщо $\bar{A} = A/R$ є простим кільцем);
- (b) кільце A є напівпримарним комутативним кільцем;
- (c) кільце A є артіновим зліва та справа і кожен двосторонній ідеал в A є головним правим ідеалом і головним лівим ідеалом;
- (d) кільце A є квазіфробеніусовим кільцем.

В.В. Кириченко висловив гіпотезу, що за аналогією з квазіфробеніусовими кільцями глобальна розмірність первинних нетерових справа горенштейнових SPSPD-кілець, які не є простими артіновими, дорівнює або 1 або ∞ .

1 Черепичні порядки

Означення 1. Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим справа кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [4].

Теорема 1 ([4]). Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добу-

тку первинних кілець наступного вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком. Ми будемо використовувати наступне позначення: $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$, де $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця A , т.б. $A = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є зведеним, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, т.б., $\mathcal{E}(A)$ є зведеною.

Кільце $\mathcal{O}$ вкладається в класичне тіло часток $\mathcal{D}$, і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}} \mathcal{O} = e_{ii} A e_{jj}$, де $e_{11}, \dots, e_{nn}$ — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця A .

Зрозуміло, що кільце A є як нетеровим справа, так і нетеровим зліва.

Означення 2. Модуль M називається дистрибутивним, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Очевидно підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається напівдистрибутивним, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A (${}_A A$) є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним (див. [7]).

Теорема 2 ([7]). Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:

- кільце A напівдистрибутивне;
- кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Черепичний порядок — це нетерове первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. В цьому випадку $\mathcal{O} = eAe$ є дискретно нормованим кільцем для кожного примітивного ідемпотента $e \in A$.

Ми будемо писати $SPSD$ -кільце A для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A .

Добре відомо, що кожне напівдосконале кільце Моріта-еквівалентне зведеному напівдосконалому кільцю. Нехай A_A (${}_A A$) — правий (лівий) регулярний A -модуль, тобто A_A є правим модулем над собою. Очевидно, що якщо A і B Моріта-еквівалентні напівдосконалі кільця, то $\text{inj.dim}_A A_A = \text{inj.dim}_B B_B$.

Кожне нетерове справа напівпервинне $SPSD$ -кільце A еквівалентне в сенсі Моріти кільцю $A_1 \times \dots \times A_m$, де A_i є або D_i , де D_i — тіло, або $A_i = \{\mathcal{O}_i, \mathcal{E}(A_i)\}$, де $\mathcal{E}(A_i)$ — зведена матриця показників. Відмітимо, що $\text{inj.dim}_{D_i} D_i$ дорівнює нулю.

В [5] доведена наступна теорема.

Теорема 3. Нехай $A = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(A)\}$ — зведене первинне нетерове $SPSD$ -кільце A з матрицею показників $\mathcal{E}(A) = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Тоді $\text{inj.dim}_A A_A = 1$ тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathcal{E}(A)$ є горенштейнвою. В цьому випадку $\text{inj.dim}_A A_A = 1$.

Означення 3. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A -граткою називається правий (лівий) A -модуль, який є скінченнопородженим вільним $\mathcal{O}$ -модулем (див. [3]).

Зокрема, всі скінченнопороджені проєктивні A -модулі є A -гратками. Позначимо через $\text{Lat}_r(A)$ (відп. $\text{Lat}_l(A)$) категорію правих (відп. лівих) A -граток.

Між категоріями $\text{Lat}_r(A)$ та $\text{Lat}_l(A)$ є дуальність (див. [5]). Нехай $M \in \text{Lat}_r(A)$. Позначимо $M^* = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$. Для довільного $f \in M^*$ і $a \in A$ визначимо af за формулою $(af)(m) = f(ma)$, де $m \in M$. Тоді легко перевірити, що M^* є лівим A -модулем.

Нехай $\varphi: M \rightarrow N$ — гомоморфізм модулів $M, N \in \text{Lat}_r(A)$, тобто $\varphi \in \text{Hom}_A(M, N)$. Тоді $\varphi^*: N^* \rightarrow M^*$ можна визначити за формулою $(\varphi^* f)(m) = f\varphi(m)$, де $f \in N^*$. Це гомоморфізм з N^* у M^* , тобто $\varphi^* \in \text{Hom}_A(N^*, M^*)$. Очевидно, що, якщо ми маємо гомоморфізми $\psi: L \rightarrow$

M та $\varphi: M \rightarrow N$, то $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$ і $1_M^* = 1_{M^*}$. Крім цього, для будь-якого $M \in \text{Lat}_r(A)$ маємо $M^{**} = M$ і для будь-якого $N \in \text{Lat}_l(A)$ справедливо $N^{**} = N$. З іншої сторони, для довільного $\varphi: M \rightarrow N$ ми маємо $\varphi^{**} = \varphi$. Є також очевидним, що $(M \oplus N)^* = M^* \oplus N^*$.

Твердження 3 ([5]). Нехай

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{P} N \longrightarrow 0$$

точна послідовність, де $L, M, N \in \text{Lat}_r(A)$. Тоді послідовність

$$0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{P^*} M^* \longrightarrow L^* \longrightarrow 0$$

є точною.

Серед всіх A -граток виділяються так звані незвідні A -гратки, тобто A -гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q -модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [4] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A -гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A -модулем з Q -базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A); \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i, & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A), \end{cases}$$

де буква T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок A . В цьому випадку елементи $S_r(A)$ ($S_l(A)$) знаходяться в бієктивній відповідності з цілочисельними рядками векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (стовпчиками векторів $\vec{a}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$), де $\vec{a}$ і $\vec{a}^T$ задовольняють вищезазначеним умовам. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

Просто встановити дуальність незвідних та цілком розкладних A -граток.

Нехай $M \in S_r(A)$ та $M = \sum_{i=1}^n e_i \pi^{\alpha_i} Q$. Якщо $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — дуальний Q -базис для $e_1, \dots, e_n$ (див. [5]), то $\pi^{-\alpha_1}\varphi_1, \dots, \pi^{-\alpha_n}\varphi_n$ — дуальний Q -базис для Q -базису $e_1 \pi^{\alpha_1}, \dots, e_n \pi^{\alpha_n}$. Отже, якщо $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то $M^* = (-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)^T$. Використовуючи запис $N = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, маємо $N^* = (-\beta_1, \dots, -\beta_n)$. Легко бачити, що

$$(M_1 + M_2)^* = M_1^* \cap M_2^* \text{ та } (M_1 \cap M_2)^* = M_1^* + M_2^*$$

для довільних $M_1, M_2 \in S_r(A)$. Більше того, якщо $M_1 \subset M_2$ — включення двох незвідних A -граток, то $M_2^* \subset M_1^*$. (В цьому випадку гратка M_2 називається надмодулем гратки M_1).

Означення 4. A -гратка M називається відносно ін'єктивною, якщо $M \simeq {}_A P^*$, де ${}_A P$ — скінченнопороджений проективний лівий A -модуль.

Означення 5. A -гратка M називається цілком розкладною, якщо вона є прямою сумою нерозкладних A -граток.

Означення 6. Напівмаксимальний порядок Λ будемо називати горенштейновим напівмаксимальним порядком, якщо Λ є бієктивною Λ -граткою, тобто Λ^* є проективною лівою Λ -граткою.

Надалі горенштейновий напівмаксимальний порядок ми будемо часто називати просто горенштейновим порядком.

Теорема 4 ([7]). Наступні умови для зведеного напівмаксимального порядку

$\Lambda = \{Q, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{pq})\}$ еквівалентні:

- (a) Λ є горенштейновим;
- (b) існує підстановка $\sigma: i \rightarrow \sigma(i)$ така, що $\alpha_{ik} + \alpha_{k\sigma(i)} = \alpha_{i\sigma(i)}$ для $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, n$.

Надалі підстановку σ будемо називати підстановкою Кириченка.

2 Глобальна розмірність кілець

Нехай A — кільце. Позначимо через $\text{mod } A$ ($A - \text{mod}$) категорію правих (лівих) A -модулів.

Означення 7. Проективною резольвентою A -модуля M називається точна послідовність A -модулів

$$\dots \longrightarrow P^{(2)} \xrightarrow{d_2} P^{(1)} \xrightarrow{d_1} P^{(0)} \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0,$$

в якій всі модулі P^i проективні. Якщо існує n таке, що $P^n \neq 0$ а $P^k = 0$ для всіх $k > n$, то говорять, що довжина проективної резольвенти дорівнює n (і ∞ , якщо такого числа не існує).

Означення 8. Говорять, що проективна розмірність A -модуля M дорівнює n та пишуть $\text{proj.dim}_A M = n$, якщо існує проективна резольвента довжини n :

$$0 \rightarrow P^{(n)} \rightarrow \dots \rightarrow P^{(1)} \rightarrow P^{(0)} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

та не існує коротшої проективної резольвенти.

Якщо не існує проективної резольвенти скінченної довжини, то покладають $\text{proj.dim}_A M = \infty$.

Ін'єктивна резольвента та ін'єктивна розмірність модуля визначається дуальним чином.

Твердження 4 ([6]). Кожен модуль має як ін'єктивну, так і проективну резольвенти.

Означення 9. Права проективна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:

$$\text{r.proj.gl.dim } A = \sup\{\text{proj.dim}_A M : M \in \text{mod-}A\}.$$

Аналогічно визначається ліва проективна глобальна розмірність кільця:

$$\text{l.proj.gl.dim } A = \sup\{\text{proj.dim}_A N : N \in A\text{-mod}\}.$$

Означення 10. Права ін'єктивна глобальна розмірність кільця A визначається наступним чином:

$$\text{r.inj.gl.dim } A = \sup\{\text{inj.dim}_A M : M \in \text{mod-}A\}.$$

Аналогічно визначається ліва ін'єктивна глобальна розмірність кільця:

$$\text{l.inj.gl.dim } A = \sup\{\text{inj.dim}_A N : N \in A\text{-mod}\}.$$

Теорема 5 ([6]). Для будь-якого кільця A мають місце рівності

$$\begin{aligned} \text{r.proj.gl.dim } A &= \text{r.inj.gl.dim } A, \\ \text{l.proj.gl.dim } A &= \text{l.inj.gl.dim } A. \end{aligned}$$

Враховуючи попередню теорему, можна визначити праву (ліву) глобальну розмірність кільця як спільне значення правої (лівої) проективної глобальної розмірності та правої (лівої) ін'єктивної глобальної розмірності:

$$\begin{aligned} \text{r.gl.dim } A &= \text{r.proj.gl.dim } A = \text{r.inj.gl.dim } A, \\ \text{l.gl.dim } A &= \text{l.proj.gl.dim } A = \text{l.inj.gl.dim } A. \end{aligned}$$

Твердження 5 ([6]). Глобальна розмірність кільця є інваріантною в сенсі Моріти.

Теорема 6 ([6]). Якщо A – кільце, то $\text{r.gl.dim } A = \sup_{I \subseteq A} \{\text{proj.dim}_A (A/I)\}$, тобто права глобальна розмірність кільця A дорівнює точній верхній межі проективних розмірностей циклічних правих A -модулів.

Наслідок 1 ([6]). Для довільного кільця A

$$\begin{aligned} \text{r.gl.dim } A &= \sup\{\text{proj.dim}_A M : \\ &M_A \text{ – скінченно породжений } A\text{-модуль}\}. \end{aligned}$$

Зауваження. Права та ліва глобальна розмірність у випадку довільного кільця можуть не співпадати. Зокрема, спадкове справа кільце може не бути спадковим зліва (приклад такого кільця навів І. Капланський у 1958 році).

Теорема 7 ([6]). Якщо A – нетерове справа та зліва кільце, то $\text{r.gl.dim } A = \text{l.gl.dim } A$.

Нехай маємо точну послідовність $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ та проективні резольвенти A -модулів M' та M'' відповідно:

$$\dots \rightarrow P'_2 \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

$$\dots \rightarrow P''_2 \rightarrow P''_1 \rightarrow P''_0 \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

Тоді наступна точна послідовність

$$\dots \rightarrow P'_2 \oplus P''_2 \rightarrow P'_1 \oplus P''_1 \rightarrow P'_0 \oplus P''_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

є резольвентою модуля M (див. Ауслендер). Звідси

$$\text{proj.dim}_A M \leq \max(\text{proj.dim}_A M', \text{proj.dim}_A M'').$$

Зокрема, якщо $M = M' \oplus M''$, то

$$\text{proj.dim}_A M = \max(\text{proj.dim}_A M', \text{proj.dim}_A M'').$$

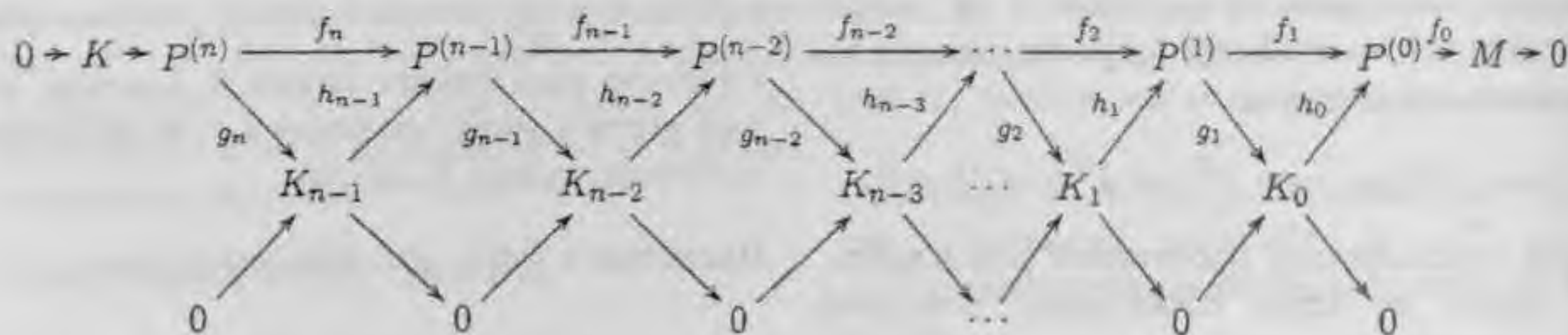
В загальному випадку, якщо $M = \bigoplus_i M_i$, то

$$\text{proj.dim}_A M = \sup_i (\text{proj.dim}_A M_i). \quad (2)$$

Нехай послідовність модулів

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K \rightarrow P^{(n)} \xrightarrow{f_n} P^{(n-1)} \xrightarrow{f_{n-1}} P^{(n-2)} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \\ \dots \xrightarrow{f_2} P^{(1)} \xrightarrow{f_1} P^{(0)} \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

є точною, де $P^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n$ – проективні модулі. Іноді таку послідовність зручно розглядати разом з допоміжними точними короткими послідовностями



тобто з послідовностями

$$0 \rightarrow K \rightarrow P^{(n)} \xrightarrow{g_n} K_{n-1} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow K_0 \xrightarrow{h_0} P^{(0)} \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow K_i \xrightarrow{h_i} P^{(i)} \xrightarrow{g_i} K_{i-1} \rightarrow 0,$$

де $K_0 = \ker f_0$, $K_{i-1} = \ker g_i = \operatorname{im} h_{i-1}$ — непроективні модулі, $f_i = h_{i-1}g_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Нехай A — зведене напівдосконале кільце, $1 = e_1 + \dots + e_n$ — розклад $1 \in A$ в суму локальних взаємно ортогональних ідемпотентів, $R = \operatorname{rad} A$ — радикал Джекобсона кільця A . Тоді всі прості праві (ліві) A -модулі з точністю до ізоморфізму вичерпуються модулями $U_1 = e_1 A / e_1 R, \dots, U_n = e_n A / e_n R$ ($V_1 = Ae_1 / Re_1, \dots, V_n = Ae_n / Re_n$).

За теоремою Басса кожен скінченнопороджений A -модуль M над напівдосконалим кільцем має проективне накриття $P(M)$, причому $P(M) = P(M / \operatorname{rad} M)$. Оскільки для довільного модуля $M / \operatorname{rad} M \simeq \bigoplus_{i=1}^n U_i^{m_i}$ — напівпростий модуль, то

$$P(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^n P(U_i)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^n (e_i A)^{m_i}.$$

Звідси, враховуючи наслідок 1 та (2) отримуємо, що

$$\operatorname{r.gl.dim} A = \max_{1 \leq i \leq n} \{\operatorname{proj.dim}_A U_i\}. \quad (3)$$

Останню рівність можна подати у вигляді

$$\operatorname{r.gl.dim} A = \{\operatorname{proj.dim}_A (A_A / R_A)\}. \quad (4)$$

Якщо напівдосконале кільце нетерове справа та зліва, то

$$\begin{aligned} \operatorname{gl.dim} A &= \max_{1 \leq i \leq n} \{\operatorname{proj.dim}_A U_i\} = \\ &= \{\operatorname{proj.dim}_A (A_A / R_A)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 8 ([6]). Глобальна розмірність квазіфробеніусового кільця дорівнює або 0 або ∞ .

Доведення. Нехай A — квазіфробеніусове кільце і правий A -модуль M має скінченну резольвенту

$$0 \rightarrow P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow P^{(1)} \rightarrow P^{(0)} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Припустимо, що $n > 0$. Розглянемо допоміжну коротку точну послідовність

$$0 \rightarrow P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)} \rightarrow K_{n-2} \rightarrow 0.$$

Оскільки правий регулярний модуль A_A є ін'єктивним справа, то ця послідовність розщеплюється: $P^{(n-1)} \simeq P^{(n)} \oplus K_{n-2}$. Звідси отримуємо, що модуль K_{n-2} є проективним правим A -модулем. Отримали протиріччя. $\square$

Теорема 9. Глобальна розмірність горенштейнового черепичного порядку дорівнює або 1 або ∞ .

Доведення. Нехай $\Lambda = \{O, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — горенштейновий черепичний порядок. Можна вважати порядок Λ зведеним. Розглянемо випадок, коли глобальна розмірність кільця Λ скінченна: $\operatorname{gl.dim} \Lambda = n < \infty$. Тоді існує правий Λ -модуль M , проективна розмірність $\operatorname{proj.dim}_\Lambda(M)$ якого дорівнює n . Це означає, що модуль M має проективну резольвенту довжини n

$$0 \rightarrow P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)} \rightarrow P^{(n-2)} \rightarrow \dots \rightarrow P^{(1)} \rightarrow P^{(0)} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

В цій точній послідовності модулі $P^0, P^1, \dots, P^{(n)}$ проективні.

Припустимо, що $n > 1$. Розглянемо допоміжну коротку послідовність

$$0 \rightarrow P^{(n)} \rightarrow P^{(n-1)} \rightarrow K_{n-2} \rightarrow 0.$$

Оскільки коротка послідовність точна, то за твердженням 3 точною буде послідовність $0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(P^{(n-1)}, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(P^{(n)}, \mathcal{O}) \rightarrow 0$.

Модулі $P^{(k)}$ проєктивні, тому $P^{(k)} = \bigoplus_{i=1}^m (e_{ii}\Lambda)^{k_i}$. Тоді

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(P^{(k)}, \mathcal{O}) &= \text{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\bigoplus_{i=1}^m (e_{ii}\Lambda)^{k_i}, \mathcal{O}\right) \simeq \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}_{\mathcal{O}}((e_{ii}\Lambda)^{k_i}, \mathcal{O}) \simeq \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^m (\text{Hom}_{\mathcal{O}}((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}))^{k_i}. \end{aligned}$$

Оскільки Λ — горенштейновий черепичний порядок, то $\text{Hom}_{\mathcal{O}}((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}) \simeq \Lambda e_{\sigma(i)\sigma(i)}$ — проєктивний лівий Λ -модуль, де σ — підстановка Кириченка горенштейнового порядку Λ . Отже, $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(P^{(k)}, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{i=1}^m (\text{Hom}_{\mathcal{O}}((e_{ii}\Lambda), \mathcal{O}))^{k_i} = Q^{(k)}$ — проєктивний лівий Λ -модуль. Маємо точну послідовність

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \rightarrow Q^{(n-1)} \rightarrow Q^{(n)} \rightarrow 0.$$

Модуль $Q^{(n)}$ проєктивний, тому ця послідовність розщеплюється: $Q^{(n-1)} \simeq Q^{(n)} \oplus \text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O})$. Звідси лівий модуль $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O})$ є проєктивним: $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus_{j=1}^m (\Lambda e_{jj})^{t_j}$. Тоді

$$\begin{aligned} K_{n-2} &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(K_{n-2}, \mathcal{O}), \mathcal{O}) \simeq \\ &\text{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\bigoplus_{j=1}^m (\Lambda e_{jj})^{t_j}, \mathcal{O}\right) \simeq \bigoplus_{j=1}^m (e_{\sigma^{-1}(j)\sigma^{-1}(j)}\Lambda)^{t_j}. \end{aligned}$$

Тому K_{n-2} є проєктивним модулем, що суперечить тому, що проєктивна розмірність модуля M дорівнює $n > 1$. Отже, $n \leq 1$. Добре відомо, що глобальна розмірність кільця A дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли кільце A є напівпростим. Горенштейновий черепичний порядок Λ не є напівпростим кільцем, тому $\text{gl.dim } \Lambda = 1$. Горенштейнові черепичні порядки, глобальна розмірність яких дорівнює ∞ , існують. Теорема доведена. $\square$

Горенштейновий черепичний порядок глобальної розмірності один є спадковим. Він

Моріта-еквівалентний порядку $H_m(\mathcal{O}) = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(H_m) = (\alpha_{ij})\}$ з підстановкою Кириченка $\sigma = (m \ m-1 \ m-2 \ \dots \ 2 \ 1)$, де $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \leq j; \\ 1, & \text{якщо } i > j. \end{cases}$ Неспадкові горенштейнові черепичні порядки мають глобальну розмірність ∞ .

Наслідок 2. Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij}) \in M_m(\mathbb{Z})\}$ — горенштейновий черепичний порядок з підстановкою Кириченка σ . Якщо $\sum_{i=1}^m \alpha_{i\sigma(i)} < m$, то $\text{gl.dim } \Lambda = 1$. У всіх інших випадках $\text{gl.dim } \Lambda = \infty$.

Список використаних джерел

1. Auslander, M., *On the dimension of modules and algebras*, III, Nagoya Math. J., 9, 1955, pp. 67-77.
2. Eilenberg S., Nakayama T., *On the dimension of modules and algebras*, II, Nagoya Math. J., 9, 1955, pp. 1-16.
3. Roggenkamp, K.W., Kirichenko, V.V., Khibina, M.A. and Zhuravlev, V. N., *Gorenstein tiled orders*, Comm. in Algebra, 29(9), 2001, 4231-4247.
4. Завадский, А.Г., Кириченко, В.В., *Модули без кручения над первичными кольцами*, Зап. науч. семинар. Ленинград. отдел. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ) - 1976. - т. 57. - с. 100-116.
5. Kirichenko, V.V., *On semiperfect rings of injective dimension one*, preprint, Trabalhos do departamento de matemática, Universidade de São Paulo, Instituto de matemática e estatística, Brasil, 2006, 25 p.
6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., *Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications*, Springer, 2007, v. 2, 400 p.
7. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., *Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications*, Springer, 2004, v. 1, 380 p.

Надійшла до редколегії 05.06.2007

УДК 512.53

Юрій В. Жучок

Ендоморфізми відношень еквівалентності

В роботі описується напівгрупа всіх ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності. Крім цього, наводяться критеріальні умови, за яких напівгрупа всіх ендоморфізмів відношення еквівалентності є регулярною напівгрупою.

Ключові слова: ендоморфізм, відношення еквівалентності, регулярність.

E-mail: zhuchok_y@mail.ru

1. Вступ

Одним з перших результатів про ендоморфізми бінарних відношень є теорема Л.М. Глускіна [3], згідно з якою напівгрупа ендоморфізмів кожного нетривіального відношення квазіпорядку з точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму характеризується цим квазіпорядком. Подібні результати для виділеного підкласу із класу рефлексивних бінарних відношень отримав Б.В. Попов [7], який надав розвитку цьому напрямку в [8], розглядаючи напівгрупи ендотопізмів μ -арних відношень. Абстрактну характеристику напівгрупи усіх ендоморфізмів квазіупорядкованої множини, а також квазіупорядкованої напівгрупи усіх ендоморфізмів квазіпорядку, знайшов Л.Б. Шнеперман [9].

В багатьох роботах особливу увагу приділено вивченню напівгрупи ендоморфізмів відношення часткового порядку і, зокрема, напівгрупи ендоморфізмів лінійно упорядкованої множини. Так, А.Я. Айзенштат [1] знайшла твірні та співвідношення, якими задається напівгрупа ендоморфізмів скінченного ланцюга. Умови, за яких елемент напівгрупи ендоморфізмів довільного ланцюга розкладається у добуток ідемпотентів, досліджував Б.М. Шайн [10]. Деякі комбінаторні властивості напівгруп ендоморфізмів часткових порядків вивчалися А. Умаром та А. Лараджі [6].

Разом з цим, відкритим залишається питання про будову напівгруп ендоморфізмів різних типів бінарних відношень. Основною метою цієї роботи є побудова напівгрупи, яка є ізоморфною

Yuriy V. Zhuchok

Endomorphisms of equivalence relations

In work the semigroup of all endomorphisms of arbitrary equivalence relation is described. Besides criterial conditions of regularity of semigroup of all endomorphisms of equivalence relation are found.

Key Words: endomorphism, equivalence relation, regularity.

напівгрупі ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності.

2. Основні поняття

2.1. Нехай X – довільна непорожня множина. Позначимо через $\mathfrak{I}(X)$ симетричну напівгрупу на множині X , а через $\mathfrak{I}_m(X)$ – її піднапівгрупу всіх ін'єктивних перетворень X .

Якщо $\rho \subseteq X \times X$ – довільне відношення і $A \subseteq X$, то відношення $\rho|_A \subseteq A \times A$, що визначається умовою:

$$(x, y) \in \rho|_A \Leftrightarrow (x, y) \in \rho,$$

називається обмеженням відношення ρ на підмножину A множини X .

Подібним чином визначається поняття обмеження відображення на будь-яку підмножину із області визначення цього відображення.

Нехай $\rho \subseteq X \times X$ – довільне відношення. Ендоморфізмом відношення ρ називається таке перетворення $f \in \mathfrak{I}(X)$, що при будь-яких $a, b \in X$ з умови $(a, b) \in \rho$ випливає $(af, bf) \in \rho$.

Множина усіх ендоморфізмів відношення ρ відносно звичайної операції композиції перетворень є напівгрупою, яка називається напівгрупою ендоморфізмів відношення ρ . Будемо позначати цю напівгрупу через $\text{End}(X, \rho)$.

2.2. Нехай X – довільна множина така, що $|X| \geq 2$, і $\omega_A = A \times A$, де $A \subseteq X$. Покладемо $i_X = \{(a, a) | a \in X\}$ та позначимо через Δ операцію симетричної різниці на множині всіх

бінарних відношень на X , тобто

$$\rho \Delta \sigma = (\rho \cup \sigma) \setminus (\rho \cap \sigma).$$

Розглянемо приклад опису будови напівгрупи ендоморфізмів для відношення $\delta = \omega_A \Delta i_X$, заданого на множині X .

Якщо $A = \emptyset$ або $A = X$, то будова напівгрупи $End(X, \delta)$ є тривіальною.

Візьмемо $A \subseteq X$, $\emptyset \neq A \neq X$ та покладемо $B = X \setminus A$. Неважко помітити, що перетворення $f: X \rightarrow X$ є ендоморфізмом відношення δ тоді й тільки тоді, коли виконується лише одна з наступних двох умов:

$f|_A$ – ін'єктивне перетворення множини A

$$\text{і } f|_B \in \mathfrak{I}(B);$$

$f|_A$ – константне відображення A у множину B

$$\text{і } f|_B \in \mathfrak{I}(B).$$

Позначимо далі через $M_{const}(A; B)$ множину всіх константних відображень з множини A у множину B і покладемо

$$S = M_{const}(A; B) \times \mathfrak{I}(B),$$

$$T = \mathfrak{I}_m(A) \times \mathfrak{I}(B), \quad P_A = S \cup T.$$

На множині P_A визначимо бінарну операцію за правилом:

$$(\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2; \psi_2) = \begin{cases} (\varphi_1 \psi_2; \psi_1 \psi_2), & \text{якщо } (\varphi_1; \psi_1) \in S, \\ (\varphi_1 \varphi_2; \psi_1 \psi_2), & \text{якщо } (\varphi_1; \psi_1) \in T. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $SS \subseteq S$, $TT \subseteq T$, $ST \subseteq S$, $TS \subseteq S$. Перевіримо тепер асоціативність цієї операції.

Очевидно, коли $(\varphi_1; \psi_1), (\varphi_2; \psi_2) \in T$, а $(\varphi_3; \psi_3) \in P_A$, тотожність асоціативності для цих елементів виконується.

Якщо $(\varphi_1; \psi_1) \in S$, $(\varphi_2; \psi_2), (\varphi_3; \psi_3) \in P_A$, то

$$((\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2; \psi_2)) \chi (\varphi_3; \psi_3) = (\varphi_1 \psi_2; \psi_1 \psi_2) \chi (\varphi_3; \psi_3) =$$

$$= ((\varphi_1 \psi_2) \psi_3; (\psi_1 \psi_2) \psi_3) = (\varphi_1 (\psi_2 \psi_3); \psi_1 (\psi_2 \psi_3)) =$$

$$= \begin{cases} (\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2 \varphi_3; \psi_2 \psi_3) = (\varphi_1; \psi_1) \chi ((\varphi_2; \psi_2) \chi (\varphi_3; \psi_3)), & \text{якщо } (\varphi_2; \psi_2) \in T, \\ (\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2 \psi_3; \psi_2 \psi_3) = (\varphi_1; \psi_1) \chi ((\varphi_2; \psi_2) \chi (\varphi_3; \psi_3)), & \text{якщо } (\varphi_2; \psi_2) \in S. \end{cases}$$

В інших випадках, тобто коли $(\varphi_1; \psi_1) \in T$, $(\varphi_2; \psi_2) \in S$ та $(\varphi_3; \psi_3) \in P_A$, матимемо:

$$((\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2; \psi_2)) \chi (\varphi_3; \psi_3) = (\varphi_1 \varphi_2; \psi_1 \psi_2) \chi (\varphi_3; \psi_3) =$$

$$= ((\varphi_1 \varphi_2) \psi_3; (\psi_1 \psi_2) \psi_3) = (\varphi_1 (\varphi_2 \psi_3); \psi_1 (\psi_2 \psi_3)) =$$

$$= (\varphi_1; \psi_1) \chi (\varphi_2 \psi_3; \psi_2 \psi_3) = (\varphi_1; \psi_1) \chi ((\varphi_2; \psi_2) \chi (\varphi_3; \psi_3)).$$

Отже, P_A – напівгрупа, при цьому така, що

$$End(X, \delta) \cong P_A, \text{ де } A \subseteq X, \emptyset \neq A \neq X.$$

Цей ізоморфізм задає відображення

$$End(X, \delta) \rightarrow P_A: f \mapsto (f|_A; f|_B).$$

Таким чином, для будь-якої множини $A \subseteq X$ маємо:

$$End(X, \delta) \cong \begin{cases} \mathfrak{I}_m(X), & \text{якщо } A = X, \\ \mathfrak{I}(X), & \text{якщо } A = \emptyset, \\ P_A, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Природною, в цьому напрямку, є задача описання напівгруп ендоморфізмів змістовних класів бінарних відношень, наприклад, таких, як еквівалентність, відношення толерантності, частковий порядок тощо.

3. Напівгрупа ендоморфізмів відношення еквівалентності

3.1. Нехай $Eq(X)$ – множина всіх відношень еквівалентності на множині X та $\alpha \in Eq(X)$. Через X/α будемо позначати фактор-множину множини X за відношенням еквівалентності α .

Якщо $|X| \geq 3$, $\alpha \in Eq(X)$, $i_X \neq \alpha \neq \omega_X$ і $f \in End(X, \alpha)$, то зрозуміло, що для кожного $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$ такий, що $f(A) \subseteq B$, оскільки в протилежному випадку знайшовся би клас $C \in X/\alpha$, $|f(C)| > 1$, і елементи $y, z \in C$, $y \neq z$, такі, що $f(y) \in D$, але $f(z) \notin D$ для деякого $D \in X/\alpha$. А це означало би, що $(y; z) \in \alpha$, але $(yf; zf) \notin \alpha$.

В усіх інших випадках, тобто коли X – довільна непорожня множина і відношення $\alpha \in Eq(X)$ таке, що $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$, згадувана умова також виконується.

Навпаки, коли перетворення f множини X задовольняє умову: для всіх $A \in X/\alpha$ існує $B \in X/\alpha$ таке, що $f(A) \subseteq B$, то, очевидно, $f \in End(X, \alpha)$.

Отже, ендоморфізми відношень еквівалентності описує

Лема. Перетворення $f \in \mathfrak{I}(X)$ є ендоморфізмом відношення $\alpha \in Eq(X)$ тоді й лише тоді, коли для кожного класу еквівалентності $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$ такий, що $f(A) \subseteq B$.

3.2. Нехай B_X – напівгрупа всіх бінарних відношень на множині X .

Нагадаємо, що бінарне відношення $\rho \subseteq A \times B$ називається функціональним, якщо для кожного $a \in A$ існує єдине $b \in B$ таке, що $(a; b) \in \rho$.

Якщо $A, B \subseteq X$ – непорожні підмножини, то через $\text{Fun}(A; B)$ позначатимемо множину всіх функціональних відношень на множинах A, B .

Для будь-якого $\rho \in \text{Fun}(A; B)$, де $A, B \subseteq X$, вживатимемо позначення:

$$\text{Dom } \rho = A, \text{Im } \rho = \{y \in B \mid \exists x \in A: (x, y) \in \rho\}.$$

Нехай $D_X = \{X_i \mid i \in I\}$ – деяке розбиття множини X , $F = \bigcup_{A \in D_X} \text{Fun}(A; B)$ і $F^0 = F \cup \{0\}$,

де 0 – нуль напівгрупи B_X .

Множина F^0 є піднапівгрупою напівгрупи B_X , оскільки для всіх $\alpha, \beta \in F^0$ таких, що $\alpha \neq 0 \neq \beta$, $\text{Im } \alpha \cap \text{Dom } \beta \neq \emptyset$ маємо $\alpha\beta \in F^0$ (тому, що $\alpha\beta$ – функціональне відношення і $\text{Dom}(\alpha\beta) = \text{Dom } \alpha$, $\text{Im}(\alpha\beta) \subseteq \text{Im } \beta$), а в інших випадках $\alpha\beta = 0 \in F^0$.

Для всіх $A \in D_X$ покладемо $F_A = \{\rho \in F \mid \text{Dom } \rho = A\}$ та $F_A^0 = F_A \cup \{0\}$.

Неважко помітити, що сукупність $L = \{F_A^0 \mid A \in D_X\}$ задає декомпозицію напівгрупи F^0 у ліву суму [2] напівгруп $F_A^0, A \in D_X$.

Множину ненульових елементів, які беруться в точності по одному з кожної лівої компоненти $F_A^0, A \in D_X$, назвемо множиною ненульових представників елементів сукупності L .

Нехай $Q(L)$ – клас усіх множин ненульових представників елементів сукупності L . Має місце наступна

Лема. Нехай $C, D \in Q(L)$. Тоді для кожного $\rho \in C$ існує єдине $\sigma \in D$ таке, що $\rho\sigma \neq 0$.

Доведення. Оскільки $\{\text{Dom } \lambda \mid \lambda \in D\} = D_X$, то для будь-якого $\rho \in C$ знайдеться лише один елемент $\sigma \in D$ такий, що $\text{Im } \rho \cap \text{Dom } \sigma \neq \emptyset$ і, отже, $\rho\sigma \neq 0$. В усіх інших випадках, тобто коли $\text{Im } \rho \cap \text{Dom } \mu = \emptyset$, де $\mu \in D$, $\mu \neq \sigma$, отримуємо $\rho\mu = 0$.

Лемі доведено.

З цієї леми випливає, що з будь-яких множин $C, D \in Q(L)$ можна отримати нову множину

$$E = \{\rho\sigma \mid \rho \in C, \sigma \in D, \text{Im } \rho \cap \text{Dom } \sigma \neq \emptyset\},$$

яка є множиною ненульових представників елементів сукупності L , оскільки $\text{Dom}(\rho\sigma) = \text{Dom } \rho$, де $\rho\sigma \neq 0$, та

$$\{\text{Dom } \rho \mid \rho \in C\} = D_X.$$

Це означає, що на множині $Q(L)$ виникає така бінарна операція:

$$\circ: Q(L) \times Q(L) \rightarrow Q(L): (C; D) \mapsto C \circ D = E.$$

Оскільки добуток $C \circ D$ довільних множин $C, D \in Q(L)$ зводиться до добутку ненульових елементів напівгрупи F^0 , то щойно визначена операція $\circ$ є асоціативною. Отриману напівгрупу позначимо через $Q_{D_X}^L$.

3.3. Нехай $f: A \rightarrow B$ – довільне відображення. Через f^* будемо позначати відповідне відображенню f функціональне відношення, тобто

$$f^* = \{(x; xf) \mid x \in A\}.$$

Зауважимо, що коли $\rho \in \text{Fun}(A; B)$ і $(x; y) \in \rho$, то будемо писати також $\rho(x) = y$.

Якщо $\alpha \in \text{Eq}(X)$ і $x \in X$, то через $[x]\alpha$ позначатимемо клас еквівалентності, що містить елемент x .

Основним результатом цієї роботи є

Теорема. Для будь-якого відношення $\alpha \in \text{Eq}(X)$ має місце ізоморфізм:

$$\text{End}(X, \alpha) \cong Q_{X/\alpha}^L.$$

Доведення. Визначимо відображення g з напівгрупи $\text{End}(X, \alpha)$ у напівгрупу $Q_{X/\alpha}^L$ умовою:

$$g(\eta) = \{\eta^* \mid_A: A \in X/\alpha\} \text{ для всіх } \eta \in \text{End}(X, \alpha).$$

Нехай $\varphi, \psi \in \text{End}(X, \alpha)$ такі, що $\varphi \neq \psi$. Це означає, що існує $x \in X$, для якого $\varphi(x) \neq \psi(x)$. Тоді $\varphi^* \mid_{[x]\alpha} \neq \psi^* \mid_{[x]\alpha}$, звідки $g(\varphi) \neq g(\psi)$.

Візьмемо довільне $\rho = \{\rho_A \mid A \in X/\alpha\} \in Q_{X/\alpha}^L$. Оскільки при будь-якому $A \in X/\alpha$ відношення ρ_A (де $\rho_A \in F_A$) є функціональним, то коректно визначенням є перетворення:

$$f: X \rightarrow X: x \mapsto xf = \rho_{[x]\alpha}(x).$$

Якщо $(x; y) \in \alpha$, то $x, y \in [x]\alpha$, звідки за визначенням перетворення f маємо $xf = \rho_{[x]\alpha}(x)$, $yf = \rho_{[y]\alpha}(y)$. Враховуючи, що $[x]\alpha = [y]\alpha$ отримуємо $xf, yf \in [z]\alpha$ для деякого $z \in X$. Отже, $(xf; yf) \in \alpha$ і тоді $f \in \text{End}(X, \alpha)$.

Більш того, за побудовою f , зрозуміло, що $g(f) = \rho$. Таким чином, f – бієкція.

Нехай $\rho \in g(\varphi\psi) = \{(\varphi\psi)^* \mid_C: C \in X/\alpha\}$, де $\varphi, \psi \in \text{End}(X, \alpha)$ – довільні. Тоді $\rho = (\varphi\psi)^* \mid_A$ для деякого класу $A \in X/\alpha$.

Визначимо далі два функціональних відношення $\lambda \subseteq A \times [x]\alpha$, де $x \in \varphi(A)$, і $\mu \subseteq [x]\alpha \times [y]\alpha$, де $y \in \psi([x]\alpha)$, поклавши, $\lambda(a) = \varphi(a)$ для всіх $a \in A$ і відповідно $\mu(b) = \psi(b)$ для всіх $b \in [x]\alpha$.

Зрозуміло, що $\rho = \lambda\mu$, при цьому $\lambda = \varphi^*|_A \in g(\varphi)$, $\mu = \psi^*|_{[x]\alpha} \in g(\psi)$, де $x \in \varphi(A)$, і, отже, $g(\varphi\psi) \subseteq g(\varphi)g(\psi)$.

Навпаки, якщо $\rho \in g(\varphi)g(\psi)$, то, беручи до уваги лему п.3.2., знайдуться одиниці $\sigma \in g(\varphi)$ і $\delta \in g(\psi)$ такі, що $\rho = \sigma\delta$. Неважко помітити, що $\sigma = \varphi^*|_{Dom\rho}$ та $\delta = \psi^*|_{[x]\alpha}$, де $x \in Dom\rho$, звідки $\sigma\delta = \varphi^*|_{Dom\rho} \cdot \psi^*|_{[x]\alpha} = (\varphi\psi)^*|_{Dom\rho} \in g(\varphi\psi)$. Таким чином, $g(\varphi)g(\psi) \subseteq g(\varphi\psi)$.

Теорему доведено.

3.4. Відмітимо, що ізоморфну конструкцію для напівгрупи $End(X, \alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, можна визначити дещо в інший спосіб.

Нехай S – довільна напівгрупа, $G(S)$ – множина усіх її підмножин. Поклавши $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ для всіх $A, B \subseteq S$ дістаємо напівгрупу на множині $G(S)$, яка називається глобальною наднапівгрупою напівгрупи S .

Множина всіх елементів, які беруться в точності по одному з кожного блоку розбиття $D_x = \{X_i \mid i \in I\}$ множини X , називається трансверсаллю цього розбиття.

Нагадаємо (див. п.3.2), що $F_x = \{\rho \in F \mid Dom\rho = A\}$, де $A \in D_x$.

Для розбиття $P^{D_x} = \{F_A \mid A \in D_x\} \cup \{\{0\}\}$ напівгрупи F^0 множину всіх його трансверсалей позначимо через $T(P^{D_x})$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися в тому, що $T(P^{D_x})$ – піднапівгрупа глобальної наднапівгрупи $G(F^0)$ напівгрупи F^0 .

Таким чином, для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ має місце ізоморфізм:

$$End(X, \alpha) \cong T(P^{X/\alpha}).$$

Стверджуваний ізоморфізм визначається таким відображенням:

$$End(X, \alpha) \rightarrow T(P^{X/\alpha}): f \mapsto \{f^*|_A \mid A \in X/\alpha\} \cup \{0\}$$

4. Регулярність

Нагадаємо, що напівгрупа S називається регулярною, якщо для кожного $a \in S$ існує

елемент $b \in S$ такий, що $aba = a$.

Відомо (див. напр., [5]), що симетрична напівгрупа є регулярною. Але напівгрупа $End(X, \rho)$ ендоморфізмів бінарного відношення ρ не завжди регулярна.

Так, у випадку, коли ρ – відношення лінійного часткового порядку на зліченій множині X , В.І. Кімом та І.Б. Кожуховим [4] отримані умови регулярності напівгрупи $End(X, \rho)$.

Критеріальні умови регулярності напівгрупи всіх ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності встановлює наступне

Твердження. Нехай X – довільна непорожня множина. Напівгрупа $End(X, \alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною напівгрупою тоді й лише тоді, коли $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$.

Доведення. Якщо $\alpha \in Eq(X)$ таке, що $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$, то зрозуміло (див. [3]), що $End(X, \alpha) = \mathcal{I}(X)$ і, отже, напівгрупа $End(X, \alpha)$ є регулярною.

Навпаки, нехай напівгрупа $End(X, \alpha)$, де $\alpha \in Eq(X)$, є регулярною напівгрупою. Якщо X така множина, що $|X| \in \{1, 2\}$, то, очевидно, $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$.

Нехай тепер множина X така, що $|X| \geq 3$. Припустимо, що, $\alpha \neq i_X$ та $\alpha \neq \omega_X$. З умови $\alpha \neq i_X$ випливає існування класу $A \in X/\alpha$, для якого $|A| \geq 2$.

Візьмемо далі елементи $x, y \in A$ такі, що $x \neq y$, та визначимо перетворення f множини X умовою:

$$af = \begin{cases} x, & \text{якщо } a \in A, \\ y, & \text{якщо } a \notin A \end{cases}$$

для всіх $a \in X$.

За лемою п.3.1. отримуємо, що $f \in End(X, \alpha)$. Оскільки напівгрупа $End(X, \alpha)$ – регулярна, то існує $\varphi \in End(X, \alpha)$, для якого $f\varphi f = f$. Тоді для будь-якого $z \in A$

$$z(f\varphi f) = (zf)\varphi f = (x\varphi)f = zf = x,$$

тобто $(x\varphi)f = x$. Звідси, $x\varphi \in A$.

З умови $\alpha \neq \omega_X$ випливає, що існує клас $B \in X/\alpha$ такий, що $B \neq A$.

Оскільки $f\varphi f = f$, то при будь-якому $b \in B$ справджуються умови:

$$b(f\varphi f) = (bf)\varphi f = (y\varphi)f = bf = y,$$

тобто $(y\varphi)f = y$. Отже, $y\varphi \in A$.

Таким чином, для кожного $C \in X/\alpha$ маємо $\varphi(A) \not\subset C$, що протирічить тому, що $\varphi \in \text{End}(X, \alpha)$. Отже, $\alpha = i_X$ або $\alpha = \omega_X$.

Твердження доведено.

Висновки

В роботі побудовано напівгрупу, яка є ізоморфною напівгрупі всіх ендоморфізмів довільного відношення еквівалентності. Знайдено необхідні та достатні умови, за яких напівгрупа всіх ендоморфізмів відношення еквівалентності є регулярною напівгрупою.

Список використаних джерел

1. Айзенштат А.Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. Мат. Журн. – 1962. – Т. 3. – №2. – С. 161-169.
2. Bogdanović S., Ćirić M. Decompositions of semigroup with thero // Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série. – 1995. – №57 (71). – P. 111-123.
3. Глускин Л.М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи Математических Наук. – 1961. – Т. 16. – №5 (101). – С. 157-162.

4. Ким В.И., Кожухов И.Б. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006. – Т. 12, №8. – С. 97-104.

5. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп // М.: Мир. – 1972. – Т.1 – 285с.

6. Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // Algebra. – 2004. – Vol. 278, no. 1. – P. 342-359.

7. Попов Б.В. Полугруппы эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений // Ученые записки ЛНПУ имени А. Герцена. – 1967. – Т. 302. – С. 116-123.

8. Попов Б.В. Полугруппы эндотопизмов μ -арных отношений // Ученые записки ЛНПУ имени А. Герцена. – 1965. – Т. 274. – С. 184-201.

9. Шнеперман Л.Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств. Ленинградский государственный педагогический университет имени А.И. Герцена // Ученые записки. – 1962. – Т. 238. – С. 21-37.

10. Schein B.M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains // Semigroup Forum. – 1975. – Vol. 11, no. 1. – P. 297-309.

Надійшла до редколегії 09.02.2007

УДК 512.552

Олексій В. Зеленський, аспірант

Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників

Розглядається один клас жорстких сагайдаків та доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю.

Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак, жорсткий сагайдак.

E-mail: Zelik82@mail.ru

1 Вступ

Матриці показників та їх сагайдаки вперше розглядаються в [1] (див. також [2], [3], [4]). З кожною скінченною частково впорядкованою множиною асоційована $(0, 1)$ -матриця показників. Скінченні частково впорядковані множини, сагайдаки асоційованих з ними матриць показників ізоморфні, називаються Q -еквівалентними і вивчаються в [2]–[6]. Жорсткі сагайдаки вперше розглядаються в [4].

В даній роботі досліджуються сагайдаки на жорсткість. Доводиться, що сагайдак, який має хоча б одну петлю, не може бути жорстким. Серед допустимих сагайдаків без петель виділено один клас сагайдаків, які є жорсткими.

2 Попередні відомості

Означення. $M_n(\mathbb{Z})$ – це кільце матриць розмірності n з цілими елементами.

Означення. Матриця $\varepsilon = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, для якої виконуються наступні умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$,

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$,

називається **матрицею показників**. Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i \neq j$

називається **зведеною матрицею показників**.

Введемо матрицю $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon + E = (\beta_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, де E – одинична матриця.

Для матриці $\varepsilon^{(1)}$ виконуються умови (1), (3) і $\alpha_{ii} = 1$ для $i = 1, \dots, n$.

Введемо матрицю $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, елементи якої обчислюються за формулою:

$$\gamma_{ij} = \min_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\},$$

або

O. V. Zelenskiy, PhD student

Rigid quivers of reduced exponent matrices

We consider a class of rigid quivers and prove that admissible quiver with at least one loop is not rigid.

Key Words: exponent matrix, admissible quiver, rigid quiver.

$$\gamma_{ij} = \min \{1, \min_{k \neq i, j} \{\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij}\}\} \text{ при } i \neq j;$$

$$\gamma_{ii} = \min \{1, \min_{k \neq i} \{\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1\}\}.$$

Означення. Сагайдаком матриці показників називається сагайдак $Q = Q(\varepsilon)$, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$.

Приклад.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad [Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриці ε_1 і ε_2 називаються еквівалентними, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

- 1) Відняти ціле число l від елементів $i^{\text{го}}$ рядка та додати це число до елементів $i^{\text{го}}$ стовпчика.
- 2) Поміняти місцями одночасно два рядка і поміняти місцями два стовпця з такими ж номерами.

Означення. Сагайдак Q називається **допустимим**, якщо існує зведена матриця показників ε така, що $Q(\varepsilon) = Q$.

3 Жорсткі сагайдаки

Означення. Допустимий сагайдак Q називається **жорстким**, якщо існує з точністю до еквівален-

тності єдина зведена матриця показників ε така, що $Q(\varepsilon) = Q$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що на чотирьох вершинах існує тільки чотири різних неізоморфних жорстких сагайдака:

$$[Q_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [Q_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[Q_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [Q_4] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лема 1. Нехай $\varepsilon = (a_{ij})$ – зведена матриця показників, $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(1)}$ – мінор матриці $\varepsilon^{(1)}$, який знаходиться на перетині рядків та стовпчиків з номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$. Тоді в мінорі $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(1)}$ існує рядок, всі елементи якого додатні.

Доведення. З матрицею ε асоціюється частково впорядкована множина $P_\varepsilon = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ з відношенням порядку “ $\leq$ ”, що визначаються правилом: $\varphi_i \leq \varphi_j$ тоді і тільки тоді, коли $a_{ij} = 0$.

Оскільки ε – зведена матриця показників, то мінор $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ також є зведеною матрицею показників. З ним асоційована ч. в. м. $P_M = \{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}\}$, яка є підмножиною ч. в. м. P_ε . Будь-яка скінченна ч. в. м. має хоча б один максимальний елемент φ_{i_p} , що означає, що $a_{i_p j} > 0$ для всіх $j \neq i_p$. Враховуючи, що $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(1)} = M_{i_1 i_2 \dots i_k} + E_k$, отримуємо $a_{i_p j} > 0$ для всіх $j = i_1, \dots, i_k$. Лема доведена.

Теорема 2. [2] Нехай $\varepsilon' = (b_{ij})$, $\varepsilon = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ – зведені матриці показників, $a_{ij}, b_{ij} \in \{0, 1\}$ і $Q(\varepsilon') = Q(\varepsilon)$. Тоді ε еквівалентна ε' .

Теорема 3. Нехай $\varepsilon = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, $a_{ii} = 0$ і $a_{ij} = 1$. Тоді $Q(\varepsilon)$ – жорсткий.

Доведення. Нехай $\varepsilon = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, $a_{ii} = 0$ та $a_{ij} = 1$. Тоді $a_{ij} \leq a_{ii} + a_{ij} = 0 + 1 = 1$ для всіх $j > i$. В першому рядку матриці ε всі елементи, окрім a_{11} , додатні. Застосуємо лему 1 до мінора $M_{23\dots n}^{(1)}$. Нехай x_1 – номер рядка матриці $\varepsilon^{(1)}$, який не містить 0 в мінорі $M_{23\dots n}^{(1)}$. До матриці ε виконаємо елементарне перетворення 2-го типу: поміняємо місцями рядки та стовпчики з номерами 2 та x_1 . Зрозуміло, що перетворення не змінить перший рядок та перший стовпчик. Позначимо нову матрицю через ε_1 . До мінора $M_{23\dots n}^{(1)}$ матриці $\varepsilon^{(1)}$ за-

стосуємо лему 1. Нехай x_2 – номер рядка матриці $\varepsilon_1^{(1)}$, який не містить 0 в мінорі $M_{34\dots n}^{(1)}$. До матриці ε_1 виконаємо елементарне перетворення 2-го типу: поміняємо місцями рядки та стовпчики з номерами 3 та x_2 . Продовжимо ці міркування. Після $(k-1)$ -го кроків отримаємо матрицю

$$\varepsilon_{k-1} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & c_{32} & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & c_{42} & c_{43} & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ де } c_{ij} \in \{0, 1\}$$

та $k \leq n$.

Матриці ε_{k-1} та ε еквівалентні і мають ізоморфні сагайдаки. Тому можна вважати, що $\varepsilon = \varepsilon_{k-1}$.

$$\text{Тоді } [Q(\varepsilon)] = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & q_{13} & q_{14} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{31} & q_{32} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & q_{n4} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що існує інша матриця $\varepsilon' = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q(\varepsilon') = Q(\varepsilon)$. Нехай $b_{ii} = 0$ (цього завжди можна досягти перетворенням 1-го типу).

$$\varepsilon' = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} & \dots & b_{3n} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & 0 & \dots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $b_{ii} = 0$ для всіх i , то при $k > 1$ $b_{ik} \leq b_{ii} + b_{ik} = b_{ik}$, тобто b_{ik} – максимальний елемент в своєму стовпчику. Покажемо, що $b_{ik} = 1$ для всіх $k > 1$.

Доведення будемо робити для кожного $k > 1$.

Крок 1. Нехай $b_{1n} = b$. Припустимо, що серед елементів множини $b_{2n}, b_{3n}, \dots, b_{n,n}$ є елемент, який менший за b . Нехай $b_{i_1 n} = b_{i_2 n} = \dots = b_{i_k n} < b$, де $b_{i_1 n}, b_{i_2 n}, \dots, b_{i_k n}$ – мінімальні елементи серед $b_{1n}, \dots, b_{n,n}$. Якщо $k = 1$, тобто мінімальним є лише один елемент,

$q_{i_1 n} = \min\{1, \min_{j \neq i_1, n} \{(b_{ij} + b_{jn}) - b_{i_1 n}\}\} = 1$, що неможливо. Якщо $k > 1$, то розглянемо мінор $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(1)}$. За лемою 1 він містить рядок без нулів. Нехай рядок з номером i_p не має нулів, тобто $b_{i_p j} > 0$ для $j = i_1, \dots, i_k$. Оскільки $q_{i_p n} = 0$, то існує j таке що

$b_{i,p} + b_{j,n} = b_{i,p}$. Враховуючи, що $b_{j,n} \geq b_{i,p}$ отримуємо $b_{i,p} = 0$ та $b_{j,n} = b_{i,p}$. Це суперечить тому, що в мінорі $M_{i_1, \dots, i_p}^{(1)}$ i_p -ий рядок ненульовий.

Оскільки $b_{i,n}$ — максимальний елемент у своєму стовпчику, то $b_{i,n} = b$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Випадок $b > 1$ неможливий тому, що $q_{n,n} = \min_j (b_{nj} + b_{j,n}) - 1 = \min_{j \neq n} \{1, \min\{(b_{nj} + b_{j,n}) - 1\}\} = 1$,

що неможливо.

Випадок $b = 0$ також неможливий, бо $b_{i,n} + b_{n,i} > 0$. Отже, $b_{i,n} = b = 1$ для $i = 1, \dots, n-1$.

Отже, ε' має вигляд:

$$\varepsilon' = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & b_{23} & b_{24} & \dots & 1 \\ 0 & b_{32} & 0 & b_{34} & \dots & 1 \\ 0 & b_{42} & b_{43} & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що $b_{i,n-1} = 1$. Припустимо протилежне, що $b_{i,n-1} = b > 1$. З нерівності $b_{i,n} + b_{n,n-1} \geq b_{i,n-1}$ отримуємо, що $b_{n,n-1} \geq b_{i,n-1} - b_{i,n} = b - 1$. Оскільки

$$q_{n,n-1} = \min\{1, \min_{j \neq n-1} \{b_{n-1,j} + b_{j,n-1} - 1\}\} = 0,$$

то існує $j \neq n-1$ таке, що $b_{n-1,j} + b_{j,n-1} - 1 = 0$. З $b_{n,n-1} \geq b - 1$ та $b_{n-1,n} = 1$ випливає, що $b_{n,n-1} + b_{n-1,n} \geq (b-1) + 1 = b > 1$. Тому $j \neq n$ і $b_{j,n-1} \leq 1$ для деяких $j < n-1$.

Нехай $b_{i_1,n-1}, b_{i_2,n-1}, \dots, b_{i_p,n-1}$ — мінімальні елементи серед $b_{1,n-1}, \dots, b_{n-1,n-1}$.

$$b_{i_1,n-1} = b_{i_2,n-1} = \dots = b_{i_p,n-1} = y \leq 1 \quad (1 < i_1, i_2, i_p < n-1).$$

Якщо $p = 1$, тобто мінімальним є лише один елемент, то

$$q_{i_1,n-1} = \min\{1, \min_{j \neq i_1, n-1} \{b_{i_1,j} + b_{j,n-1} - b_{i_1,n-1}\}\} = \min\{1, \min_{j \neq i_1, n-1} \{(b_{i_1,j} - y) + b_{j,n-1}\}\} = 1,$$

що неможливо. Якщо $p > 1$, то розглядаємо мінор $M_{i_1, \dots, i_p}^{(1)}$. За лемою 1 він містить рядок без нулів.

Нехай рядок з номером t_p не має нулів, тобто $b_{i,j} > 0$ для $j = t_1, \dots, t_p$. Оскільки $q_{i_1,n-1} = 0$, то існує $j \neq t_p$, $n-1$ таке, що $b_{i_1,j} + b_{j,n-1} = b_{i_1,n-1}$. Враховуючи, що $b_{i_1,n} + b_{n,n-1} \geq 1 + (b-1) = b > 1 = b_{i_1,n-1}$ та $b_{j,n-1} \geq b_{i_1,n-1}$ при $j < n-1$ отримаємо, що $b_{i_1,j} = 0$ і $b_{j,n-1} = b_{i_1,n-1}$. Це суперечить тому, що в мінорі $M_{i_1, \dots, i_p}^{(1)}$ t_p -ий рядок ненульовий. Отже, $b_{i,n-1} = b_{j,n-1}$ для $i = 1, \dots, n-2$, $b_{i,n-1} = b_{i,n} = 1$ і матриця ε' має вигляд:

$$\varepsilon' = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b_{23} & \dots & 1 & 1 \\ 0 & b_{32} & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & 0 & 1 \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Продовжуючи аналогічні міркування для $(n-2)$ -го стовпчика, потім $(n-3)$ -го і т. д., одержуємо:

$$\varepsilon' = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & b_{32} & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \dots & 0 & 1 \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & b_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, $b_{ij} = 1$ для всіх $j > 1$. Тому $b_{ij} \leq b_{i1} + b_{1j} = 0 + 1 = 1$ для всіх i, j ($i \neq j$).

За теоремою 2 матриці ε' еквівалентна ε . Теорему доведено.

Теорема 4. Допустимий сагайдак Q , який має хоча б одну петлю, не є жорстким.

Доведення. Нехай Q — допустимий сагайдак, який має хоча б одну петлю. Тоді існує матриця показників $\varepsilon = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\varepsilon)$. Можна вважати, що $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i (цього можна досягти еквівалентними перетвореннями 1-го типу). Також можна вважати, що $q_{11} = 1$ (це досягається еквівалентними перетвореннями 2-го типу).

За матрицею ε визначимо множину $M \subseteq \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$ двома умовами:

- 1) Якщо α_{ij} знаходиться в першому стовпчику, або не є максимальним елементом в j -ому стовпчику, то $\alpha_{ij} \in M$;
- 2) Якщо $\alpha_{ik} \in M$, $\alpha_{kj} \in M$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, то $\alpha_{ij} \in M$.

З визначення множини M маємо, що цій множині можуть не належати тільки максимальні в своєму стовпчику елементи.

Розглянемо деякі властивості множини M .

(а) $\alpha_{1j} \in M$ для $j > 1$. Зокрема, $M \neq \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Дійсно з нерівності $\alpha_{ij} \leq \alpha_{1i} + \alpha_{1j} = 0 + \alpha_{1j} = \alpha_{1j}$ випливає, що α_{1j} ($j > 1$) є максимальним елементом в j -ому стовпчику. Тому він не може належати множині M за умовою 1). Не може він належати множині M і за умовою 2), бо не існує k такого, що $\alpha_{1j} \leq \alpha_{1k} + \alpha_{kj}$, де α_{1k}, α_{kj} належать M .

Отже, $\alpha_{1j} \in M$ для $j > 1$ і тому M є власною

підмножиною $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

(b) Якщо $\alpha_{ij} < 2$, то $\alpha_{ij} \in M$. Якщо $\alpha_{ij} \notin M$ то $\alpha_{ij} \geq 2$.

З рівності

$$l = q_{11} = \min \left(1, \min_{k \neq 1} (\alpha_{1k} + \alpha_{k1} - 1) \right)$$

отримуємо, що $\alpha_{1k} = \alpha_{1k} + \alpha_{k1} > 1$ для всіх $k > 1$. Тому максимальний елемент в k -ому стовпчику ($k > 1$) завжди більший, ніж 1. За умовою 1) всі елементи α_{ij} ($j > 1$), які не перевищують 1, належать множині M .

(c) $\alpha_{ii} \in M$ для всіх i .

При $i > 1$ (c) є частинним випадком (b). $\alpha_{11} \in M$ за умовою 1).

За матрицею показників $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ побудуємо матрицю $B = (\beta_{ij})$ наступним чином:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{якщо } \alpha_{ij} \in M; \\ \alpha_{ij} + 1, & \text{якщо } \alpha_{ij} \notin M. \end{cases}$$

Наприклад, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо множину M :

після першого кроку $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & & 3 \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$,

після другого кроку $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$.

Побудуємо матрицю B :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Твердження 5. B – зведена матриця показників.

За властивістю (c) $\alpha_{ii} \in M$ для всіх i . Тому $\beta_{ii} = \alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Покажемо, що для елементів матриці B виконуються нерівності $\beta_{ik} + \beta_{kj} \geq \beta_{ij}$. Припустимо

супротивне, тобто $\beta_{ik} + \beta_{kj} < \beta_{ij}$ для деяких i, j, k .

Оскільки за визначенням (β_{ij}) $\alpha_{ij} \leq \beta_{ij} \leq \alpha_{ij} + 1$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$, то $\alpha_{ij} + 1 \geq \beta_{ij} > \beta_{ik} + \beta_{kj} \geq \alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$.

Останній ланцюг нерівностей можливий лише при $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + 1$ та $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$.

Рівності для β_{ik} , β_{kj} , β_{ij} означають, що $\alpha_{ik} \in M$,

$\alpha_{kj} \in M$, $\alpha_{ij} \notin M$. Тоді за умовою 2) визначення

множини M маємо $\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} \in M$. Отримали

протиріччя. Отже, B – матриця показників. ε –

зведена матриця показників. Тому

$\beta_{ij} + \beta_{ji} \geq \alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ при $j \neq i$. Отже, B – зведена ма-

триця показників. Твердження доведено.

Твердження 6. $Q(B) = Q(\varepsilon)$.

Доведення. Нехай $Q(B) = (\overline{q_{ij}})$. З визначення

сагайдака матриці показників, маємо $q_{ij} = 0$ при $i \neq j$

тоді і тільки тоді, коли існує $k \neq i, j$ таке, що

$\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$; $\overline{q_{ij}} = 0$ при $i \neq j$ тоді і тільки тоді, ко-

ли існує $l \neq i, j$ таке, що $\beta_{il} + \beta_{lj} = \beta_{ij}$.

Розглянемо випадки:

1) $\alpha_{ij} \notin M$;

2) $\alpha_{ij} \in M$.

1). Нехай $\alpha_{ij} \notin M$. Тоді елемент α_{ij} – макси-

мальним в j -ому стовпчику ($j > 1$). З нерівності

$\alpha_{1j} = \alpha_{1i} + \alpha_{ij} \geq \alpha_{ij}$ отримуємо, що $\alpha_{1j} = \alpha_{ij}$. Тому

$\alpha_{1i} + \alpha_{ij} = \alpha_{ij}$ і $q_{1i} = 0$. Оскільки $\alpha_{1i} = 0 \in M$, $\alpha_{1j} \in M$,

$\alpha_{ij} \notin M$, то $\beta_{1i} = \alpha_{1i} = 0$, $\beta_{1j} = \alpha_{1j} + 1$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + 1$. Маємо

рівність $\beta_{1i} + \beta_{1j} = \beta_{ij}$ і тому $\overline{q_{1i}} = 0$. Отже, якщо

$\alpha_{ij} \notin M$, то $q_{1i} = \overline{q_{1i}} = 0$.

2) Нехай $\alpha_{ij} \in M$.

Припустимо, що $q_{ij} = 0$. Якщо α_{ij} – максимальний

елемент в j -ому стовпчику, то за умовою 2) ви-

значення множини M $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$, де $\alpha_{ik} \in M$,

$\alpha_{kj} \in M$ при $k \neq i, j$.

Тоді $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$, $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\beta_{ij} = \beta_{ik} + \beta_{kj}$.

Звідки $\overline{q_{ij}} = 0$.

Якщо α_{ij} не є максимальним елементом в j -

ому стовпчику, то з рівності $\alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$ при

$k \neq i, j$ маємо $\alpha_{kj} \leq \alpha_{ij}$. Тому α_{kj} теж не є максима-

льним елементом в j -ому стовпчику і $\alpha_{kj} \in M$.

При $\alpha_{ik} \in M$ елемент α_{ik} є максимальним в

k -ому стовпчику ($k > 1$) і $\alpha_{ik} = \alpha_{1k}$. Тоді

$\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj} \geq \alpha_{ij}$. Отримали протиріччя, бо α_{ij} – максимальний елемент в j -го стовпчику. Отже $\alpha_{ik} \in M$. Тому $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$, $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ і $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$. Отримали $\overline{q_{ij}} = 0$.

Таким чином, якщо $q_{ij} = 0$, то $\overline{q_{ij}} = 0$.

Навпаки, нехай $\overline{q_{ij}} = 0$. Тоді $\beta_{ik} + \beta_{kj} = \beta_{ij}$, $k \neq i, j$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ ($\alpha_{ij} \in M$).

Якщо припустити, що $\alpha_{ik} \notin M$ або $\alpha_{kj} \notin M$, то отримаємо протиріччя:

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \beta_{ik} + \beta_{kj} \geq \alpha_{ik} + \alpha_{kj} + 1 \geq \alpha_{ij} + 1.$$

Отже, $\alpha_{ik} \in M$ і $\alpha_{kj} \in M$. Тоді $\beta_{ik} = \alpha_{ik}$, $\beta_{kj} = \alpha_{kj}$ і $\alpha_{ij} = \alpha_{ik} + \alpha_{kj}$. Звідси $q_{ij} = 0$. Твердження доведено.

З властивості (а) і визначення матриці B випливає, що $\sum_{i,j} \beta_{ij} > \sum_{i,j} \alpha_{ij}$. Тому за [7] матриця показників B не еквівалентна матриці показників ε .

Таким чином, існує принаймні дві нееквівалентні матриці показників ε і B такі, що $Q(\varepsilon) = Q(B) = Q$. Тому за означенням сагайдак Q не є жорстким. Теорема доведена.

4 Висновки

В роботі розглянуто один клас жорстких сагайдаків. Матриці показників з такими сагайдаками є $(0, 1)$ -матрицями. Доведено, що жорсткий сагайдак не може мати петель.

Список використаних джерел

- 1) Zh.T. Chernousova, M.A. Dokuchaev, M.A. Khibina, V.V. Kirichenko, S.G.

Miroshnichenko, V.N. Zhuravlev "Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets". II., Algebra and Discrete mathematics, №2, 2003 p. 47-86.

- 2) V.V. Kirichenko, A.V. Zelensky, V.N. Zhuravlev "Exponent matrices and their quivers". Bul. Acad. de Stiinte a Rep. Moldova, Matematica, №1 (44), 2004, 57-66.
- 3) M.A. Dokuchaev, V.V. Kirichenko, A.V. Zelensky, V.N. Zhuravlev "Gorenstein matrices", Algebra and Discrete mathematics, №1, 2005, pp. 8-29.
- 4) V.V. Kirichenko, A.V. Zelensky, V.N. Zhuravlev, Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings. // International Journal of Algebra and Computation. Vol. 15, Nos. 5 & 6 (2005) 1-16.
- 5) Журавльов В.М., Циганівська І.М., Q - еквівалентні скінчені частково впорядковані множини // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. №1, 2005 р. с. 47-51.
- 6) Кириченко В.В., Журавльов В.Н., Хиби́на М.А., Черепичные порядки и их свойства // Изв. Гомельского гос.ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского Ун-та. – 2006. – т. 3(36). – С. 155 – 172.
- 7) Журавльов В.Н., Зеленский А.В., Об одном классе горенштейновых черепичных порядков // Изв. Гомельского гос.ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского Ун-та. – 2006. – т. 3(36). – С. 147 – 154.

Надійшла до редколегії 09.02.2007

УДК 512.544

Леонид А. Курдаченко, д.ф.-м.н., профессор,
Н.Ф. Кузенный, д.ф.-м.н., профессор, Николай
Н. Семко, д.ф.-м.н., Игорь Я. Субботин, д.ф.-
м.н., профессор

О некоторых вопросах теории обобщенно разрешимых групп

Стаття присвячена дев'яносто п'ятиріччю від дня народження Сергія Миколайовича Чернікова (1912 – 1987), який був визначною фігурою в теорії груп двадцятого сторіччя, роботи якого багато в чому визначили її подальший розвиток і вплив якого продовжує відчуватись до сьогодні. Вона написана математиками, учителем яких був С.М. Черніков, і відображає їх особисту точку зору на роль С.М. Чернікова у створенні та розвитку теорії узагальнено розв'язних груп.

Ключові слова: С.М. Черніков, узагальнено розв'язні групи.

Leonid A. Kurdachenko, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor, N.F. Kuzennyi, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor, Nikolay N. Semko, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor, Igor' Ya. Subbotin, D.Sci. (Phys.-Math.), Full Professor

On some questions of generalized soluble groups theory

This article is written in honor of the ninety fifth anniversary of Sergey Nikolaevich Chernikov (1912 – 1987) who was a leading figure in twentieth century group theory, whose work in group theory foreshadowed many later developments and whose influence continues to be felt today. In this survey the authors students of S.N. Chernikov express their point of view on a role of S.N. Chernikov in a creation and development of the theory of generalized soluble groups.

Key Words: S. N. Chernikov, generalized soluble groups.

E-mail: lkurdachenko@hotmail.com, n_semko@mail.ru, isubboti@nu.edu

1 Введение



С.Н. Черников был одним из основателей теории бесконечных групп. Его творческая биография является неотъемлемой частью истории становления этой важной части современной теории групп. Его вклад в эту область алгебры трудно переоценить. С.Н. Черников не только сам плодотворно и интенсивно работал в теории бесконечных групп, его идеи и его влияние на ее развитие проявлялись и в работах его учеников и последователей. В данной статье мы хотим проследить развитие и продолжение некоторых исследований, которые были начаты самим С.Н. Черниковым и его учениками и проанализи-

ровать ту степень влияния, которую оказали идеи С.Н. Черникова на современную теорию обобщенно разрешимых групп.

2 Биографические данные о С.Н. Черникове

С.Н. Черников родился 11 мая 1912 года в городе Сергиев-Посад Московской области в семье священника. После окончания в 1933 г. Саратовского педагогического института работал в г. Свердловске в Уральском политехническом институте. В 1937 – 1939 гг. являлся аспирантом А.Г. Куроша в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В 1940 г. С.Н. Черников стал доктором физико-математических наук, в 1941 г. – профессором. Дальнейший период его жизни связан с Уралом. В этот период своей жизни С.Н. Черников является одним из создателей уральской алгебраической школы. В 1946 – 1951 гг. он работает в Уральском государственном университете. С 1951 по 1961 г. Сергей Николаевич возглавлял кафедру алгебры и геометрии Пермского государственного университета. На кафедре он создал крупную научную школу в области теории групп. С 1961 по 1964 гг. Сергей Николаевич заведовал отделом алгебры Свердловского отделения ИМ АН СССР. Его уральскими учениками, защитившими кандидатские диссертации, были Ю.Н. Нефедьев, Х.Х. Мухаммеджан, В.М. Глушков, В.С. Чарин, И.И. Еремин.

М.И.Каргаполов, Ю.М.Горчаков, Н.В.Баева (Н.В.Черникова), Г.А.Маланьина, Г.С.Шевцов, Г.Ф.Бачурин, Я.Д.Половицкий, В.П.Шунков, М.И.Сергеев, И.Н.Абрамовский, из которых докторами физико-математических наук стали В.М.Глушков, В.С.Чарин, И.И.Еремин, М.И.Каргаполов, Ю.М.Горчаков, В.П.Шунков.

С 1965 г. начинается другой период жизни С.Н.Черникова, связанный с Украиной. В 1965 г. он переезжает в Киев, где становится заведующим отделом алгебры Института математики Академии наук УССР. В 1967 г. он избирается членом-корреспондентом Академии наук УССР. В эти же годы он читает лекции в Киевском педагогическом университете. Здесь, так же как и на Урале, С.Н.Черников создает мощную теоретико-групповую школу. Список его учеников, защитивших кандидатские диссертации в Киеве, более объемный: Д.И.Зайцев, Ф.Н.Лиман, А.М.Андрухов, Л.М.Кляцкая, О.Н.Зуб, А.Ф.Баранник, Э.С.Алексеева, С.С.Левищенко, П.П.Барышовец, Л.А.Курдаченко, Н.Ф.Кузенный, Я.П.Сысак, В.В.Цыбуленко, И.Я.Субботин, Б.И.Мищенко, В.В.Пылаев, М.В.Цыбанев, К.Ш.Кемхадзе, Л.С.Можаровская, В.Э.Горещкий, А.П.Петравчук, Н.Н.Семко, В.С.Мулдагалиев, А.Н.Ткаченко, С.А.Чечин, В.С.Марач, А.Н.Тузлов, Т.Г.Лелеченко, А.В.Спиваковский, А.В.Тушев, А.В.Крайчук, О.Д.Артемович, В.В.Атамась, Д.Я.Требенко. Из них докторами физико-математических наук стали Д.И.Зайцев, Л.А.Курдаченко, Я.П.Сысак, А.Ф.Баранник, С.С.Левищенко, Ф.Н.Лиман, Н.Ф.Кузенный, А.П.Петравчук, О.Д.Артемович, Н.Н.Семко, А.В.Тушев.

3 Научные интересы С.Н.Черникова

Математические вкусы С.Н.Черникова формировались в Московском университете, который в 30-е годы XX века был ведущим математическим центром Советского Союза. Многие ведущие ученые МГУ, в частности, О.Ю.Шмидт и А.П.Александров – руководитель А.Г.Куроша, имели тесные контакты с ведущими немецкими алгебраистами. Многие немецкие математики, среди которых была и Э.Нетер, приглашались в МГУ и читали там лекции. Влияние немецкой алгебраической школы было весьма ощутимым. Это было время формирования теории колец, в которой важную роль играли условия максимальности и минимальности. А поскольку в этот период начинала формироваться теория бесконечных групп, то естественным было попытаться использовать подходы, оказавшиеся продуктивными в теории колец и модулей, в теории групп.

В частности, так формируется идея рассмотрения групп с условием минимальности.

В работе [76] А.Г.Курош описал абелевы группы с условием минимальности для всех подгрупп. Но как описывать неабелевы группы с таким условием? Понятно, что в общем случае это трудная задача (в связи с этим заметим, что в общем случае она не решена до сих пор, и не видно перспектив ее решения в обозримое время). Но тогда возникает вопрос: в каких рамках и при каких ограничениях такое изучение становится реальным? Ответ на этот вопрос и предстояло найти в первую очередь. Сергей Николаевич в своей работе [44] описывает поиски своего пути в этом направлении. Приведем некоторые интересные выдержки из этой работы:

«Весной 1938 г. О.Ю.Шмидт передал мне через А. Г.Куроша приглашение выступить на его семинаре с докладом о результатах, полученных мною при перенесении на бесконечные группы известной теоремы Фробениуса о числе решений уравнения $x^n = a$ в конечных группах. Эти результаты опубликованы мною в статье [1]. С радостью и большим волнением я принял приглашение Отто Юльевича. Заседание, на котором слушался мой доклад, проводилось на квартире О.Ю.Шмидта; для меня это было первое из заседаний знаменитого шмидтовского семинара, в которых мне довелось участвовать. На заседании, кроме О.Ю.Шмидта и меня, присутствовали А.П.Дицман, П.Е.Дюбюк, А.Г.Курош, Л.Я.Окунев и еще 3 – 4 человека. Первая часть доклада была посвящена доказательству установленной мною теоремы о конечности группы, удовлетворяющей следующим условиям: (1) все убывающие цепочки подгрупп конечны (условие минимальности для подгрупп); (2) порядок центра конечен; (3) множество элементов любого порядка конечно. Считая такие группы бесконечными, А.И.Узков перенес на них отмеченную здесь теорему Фробениуса. Отмечая, что каждая бесконечная группа G , удовлетворяющая условию (1), содержит бесконечную группу, все истинные подгруппы которой конечны, докладчик показал, что при дополнительном условии (3) такая подгруппа содержится в центре группы G ; однако это несовместимо с условием (2). Таким образом, группы, рассматривавшиеся А.И.Узковым как бесконечные, в действительности оказались конечными. Во второй части доклада рассматривалось некоторое (предлагаемое докладчиком) обобщение теоремы Фробениуса, справедливое для любых бесконечных групп. При обсуждении доклада кто-то из слушателей (кажется, это был С.А.Чунихин), обращаясь к О.Ю.Шмидту и как бы продолжая

начатый ранее разговор, отметил, что всякое обобщение дает, вообще говоря, начало новым обобщениям и что если, налагая те или иные ограничения на рассматриваемые группы, не исследовать при этом объем получаемых классов групп, то можно прийти к необобщающим обобщениям, подобным обобщению А.И.Узкова. Выступивший затем О.Ю.Шмидт согласился с этим мнением и отметил при этом, что в доказательстве докладчика основную роль играло выделение в рассматриваемой группе бесконечной подгруппы, все истинные подгруппы которой конечны, и что известен, по-видимому, только один пример таких групп (что подтвердил присутствовавший на докладе А.Г.Курош) – силовские подгруппы мультипликативной группы всевозможных комплексных корней из единицы, так называемые примарные абелевы группы типа p^∞ . О.Ю.Шмидт обратил при этом внимание на то, что и у докладчика бесконечная группа, все истинные подгруппы которой конечны, оказалась абелевой и, значит, примарной абелевой группой типа p^∞ . Далее О.Ю.Шмидт, обращаясь к А.Г.Курошу, выразил удивление, что бесконечные группы, все истинные подгруппы которых конечны, т.е. группы, находящиеся на стыке между конечными и бесконечными группами, выпали из поля зрения при изучении бесконечных групп и предложил считать одним из первоочередных вопросов для бесконечных групп «установление (выражение О.Ю.Шмидта) всех бесконечных групп, все собственные подгруппы которых конечны». Таким образом, сам О.Ю.Шмидт сформулировал свою проблему как проблему установления (описания) всех бесконечных групп, все истинные подгруппы которых конечны, а вовсе не как проблему существования бесконечной неабелевой группы с этим свойством. По-видимому, в то время он не сомневался в существовании неабелевых групп такого рода Внимание алгебраистов проблема Шмидта начала привлекать несколько позднее в связи с изучением бесконечных неабелевых групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. Совокупность таких групп охватывает, очевидно, и все бесконечные неабелевы группы, все собственные подгруппы которых конечны В то время вопрос о строении неабелевых групп с условием минимальности не ставился и никаких гипотез об их строении не высказывалось. Несколько позднее был поставлен вопрос об их счетности. А.Г.Курошем он был рекомендован в качестве одной из основных проблем теории бесконечных групп. Изучение неабелевых групп с условием минимальности для подгрупп началось в 1938 г. в связи с предпринятой мною

попыткой построить для бесконечных групп теорию, аналогичную теории конечных специальных (нильпотентных) групп, изложенной в книге О.Ю.Шмидта «Абстрактная теория групп» ».

Далее в этой статье Сергей Николаевич описывает, как шаг за шагом возникали многие, теперь ставшие уже привычными для нас, понятия теории бесконечных групп. Первоначально они имели в основном характер так называемых условий конечности. Под условием конечности в теории групп понимается всякое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существует хотя бы одна бесконечная группа, которая этим свойством не обладает. Наложение условий конечности позволяет выделять такие бесконечные группы, которые сохраняют те или иные свойства конечных групп. Естественно, одними из первых условий конечности были классические условия минимальности и максимальности (для всех подгрупп). В связи с уже полученным описанием некоторых классов бесконечных групп с условием минимальности, С.Н.Черниковым в 1940 г. была сформулирована следующая проблема (которая вскоре получила название *проблемы Черникова*) – не будет ли всякая группа, удовлетворяющая условию минимальности для всех подгрупп, конечным расширением прямого произведения конечного множества групп типа p^∞ ? Группы такого рода называют теперь *черниковскими группами* [20]. Многообразные исследования, индуцированные проблемой Черникова, сыграли ключевую роль в развитии теории бесконечных групп.

Условиями конечности определился естественный подход к изучению групп, находящихся на стыке конечных групп с бесконечными. После серии работ С.Н.Черникова [3 – 9], показавших эффективность этого подхода, в систематическое изучение групп с условиями конечности включились такие выдающиеся алгебраисты как О.Ю.Шмидт, А.И.Мальцев, Р.Бэр, Ф.Холл. По существу эти математики вместе с С.Н.Черниковым явились основателями большой и содержательной новой области исследований – теории обобщенно разрешимых групп. Особая роль принадлежит здесь именно С.Н.Черникову, инициатива и творческие вклады которого в значительной мере определили направление исследований. С.Н.Черников ввел в науку ряд понятий и методов, без которых нельзя представить себе современную общую теорию групп.

Исследуя группы с условием минимальности для нормальных подгрупп и группы с условием минимальности для абелевых подгрупп, С.Н.Черников приходит к оказавшейся

очень плодотворной идее изучения влияния на структуру группы той или иной важной ее системы подгрупп. Накладывая на эту систему подгрупп некоторое естественное ограничение, С.Н.Черников стремится найти основные свойства или даже описать строение группы. Одной из первых систем подгрупп, на которую обратил внимание С.Н.Черников, была система всех ее конечно порожденных подгрупп.

Остановимся на этом чуть подробнее. Возможно идея «локальности» (на это указывает и выбранный термин) пришла из топологии (А.Г.Курош занимался топологическими группами, а его руководитель – П.С.Александров, является одним из крупнейших топологов). Она оказалась одной из самых плодотворных для теории бесконечных групп. Уже в работах [3 – 6] появляются новые классы бесконечных групп, возникающие при наложении некоторых свойств на систему конечно порожденных подгрупп. Так, в работе [3] появляются понятия локальной разрешимости и локальной нильпотентности (в работе использовался термин локально специальная группа, только позднее он был заменен привычным для нас термином локально нильпотентная группа). Там же обнаружилось, что некоторые свойства конечно порожденных подгрупп группы могут в той или иной форме распространяться и на всю группу. Однако также выяснилось, что из локальной нильпотентности группы с условием минимальности для всех подгрупп в общем случае не вытекает нильпотентность группы. Вытекает лишь существование у нее возрастающего центрального ряда, достигающего до самой группы, который может быть бесконечным. Таким образом, возникла важная проблема нахождения той обобщенной формы разрешимости (соответственно нильпотентности), в какой будет распространяться на всю группу свойство разрешимости (соответственно нильпотентности) всех ее конечно порожденных подгрупп. Идея искомой обобщенной формы пришла с понятием силовского множества, введенного С.Н.Черниковым в работе [6]. Силовским множеством периодической группы G С.Н.Черников называет упорядоченное по включению семейство S ее нормальных подгрупп, удовлетворяющее следующим условиям: (1) $\langle 1 \rangle, G \in S$; (2) S содержит пересечение и объединение произвольного множества своих подгрупп; (3) его факторы, т. е. фактор-группы, определяемые членами семейства S , между которыми не содержится других ее членов, являются p -группами; (4) не существует факторов множества S , отвечающих одному и тому же простому числу p .

Следующим шагом были понятия разрешимой и центральной систем, введенные С.Н.Черниковым в работе [7]. Окончательно эти понятия были отшлифованы в совместной статье с А.Г.Курошем [74], которая на многие годы определила пути развития теории бесконечных групп. Классы обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп, выделенные в этой статье, получили название *классов Куроша-Черникова*. В этой работе установлены некоторые взаимосвязи между теми или иными из этих классов, а также поставлен ряд вопросов относительно других возможных их взаимосвязей и о свойствах содержащихся в них групп. Статья [74] во многом определила и стимулировала многочисленные исследования по теории обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп; сформулированные в ней вопросы привлекли внимание многочисленных специалистов.

Одним из важных последующих шагов было выяснение структуры классов Куроша-Черникова при некоторых условиях конечности. Достаточно полное и отчетливое представление о развитии этих исследований дают обзорные статьи С. Н.Черникова [31] и Б.И.Плоткина [77].

Следующим существенным этапом было изучение влияния на структуру группы таких важных естественных систем ее подгрупп, как абелевы и неабелевы, нормальные подгруппы и различные их обобщения, примарные подгруппы и т.п. Результаты работ С.Н.Черникова по этой тематике нашли очень хорошее освещение в обзорных статьях С.Н.Черникова [36, 41, 47, 58, 64] и его монографии [62], а также в обзорах [78, 79]. Полученные результаты вызвали живой интерес у других алгебраистов, что стимулировало в свою очередь новые исследования, оказывавшие как прямое, так и опосредованное влияние на школу С.Н.Черникова. Этот естественный ход развития и привел к созданию современной теории обобщенно разрешимых групп. Отметим, что многие проблемы, возникшие в рамках этой теории, получили свое решение за пределами этой теории. Точнее говоря, в рамках этой теории они решались положительно, в то время как за рамками теории обобщенно разрешимых групп были построены уникальные контрпримеры. Так, А.Ю.Ольшанский ([80, глава 28]), построил серию примеров периодических групп, все собственные подгруппы которых циклические, тем самым получив решение как проблемы Шмидта, так и проблемы Черникова. Эти уникальные примеры давали отрицательное решение и для ряда других известных проблем теории групп. Другие интересные примеры конечно порожден-

ных периодических групп, обладающих многими необычными свойствами, были построены Р.И.Григорчуком (см., например, обзор [81]). Эти блестящие конструкции А.Ю.Ольшанского и Р.И.Григорчука показали, что традиционные для теории обобщенно разрешимых групп методы, приемы и подходы не работают вне этой теории. Однако было бы ошибкой рассматривать это как недостаток теории обобщенно разрешимых групп. Многие методы теории конечных групп или теории конечномерных линейных групп также не работают вне рамок этих теорий. Однако никому не приходит в голову говорить, что эти теории несовершенны. Наоборот, как заметил по этому поводу сам С.Н.Черников, эти примеры «оттеняют завершенность полученных положительных результатов» и приводят к ясному пониманию того важного факта, что теория обобщенно разрешимых групп, насыщенная многочисленными интересными и глубокими результатами, подобно другим традиционным областям теории групп, таким как теория конечных групп, теория абелевых групп, теория линейных групп и т.п., является важной специфической частью общей теории групп, имеющей собственные объекты исследований, свою методологию и богатую историю. Как мы уже говорили выше, в настоящей статье мы хотим проследить степень влияния идей С.Н.Черникова на различные области теории обобщенно разрешимых групп.

Одной из первых областей, которая заинтересовала С.Н.Черникова, была теория групп с конечными классами сопряженных элементов (FC-групп). В 1948 г. опубликована его работа [12], в которой он дал довольно детальное описание одного из интересных подклассов FC-групп – слойно-конечных групп. К FC-группам он возвращается в работах [26 – 29]. Всякую FC-группу можно рассматривать, с одной стороны, как обобщение абелевой группы, а с другой стороны, как обобщение конечной группы. Таким образом, FC-группы имеют черты, присущие как абелевым, так и конечным группам, т.е. в некотором смысле являются неким органическим объединением таких групп. Поэтому и теория FC-групп распадается на две части. Задача первой из них – перенесение результатов теории конечных групп на периодические FC-группы. А вторая занимается расширением теории абелевых групп. В работе [26] С.Н.Черников расширил на периодические FC-группы теорему Шура-Цассенхауза и дал критерий локальной разрешимости периодических FC-групп, связанный с дополняемостью силовских p -подгрупп таких групп. В работе [29]

С.Н.Черников получил один из первых классов FC-групп, вложимых в прямое произведение конечных групп. В том же 1959 г. выходит работа Ф.Холла [82], в которой тот также показывает, какую важную роль играют подгруппы прямых произведений конечных групп для теории FC-групп. Тем самым, С.Н.Черников начал исследования в обеих частях теории FC-групп. Существенный вклад в теорию FC-групп был внесен учеником С.Н.Черникова – Ю.М.Горчаковым, который разработал новые методы исследований в этой теории и получил важные фундаментальные результаты (см. монографии [83, 84] и обзорную статью [85]). В частности, Ю.М.Горчаков получил важные аналоги теорем Х.Прюфера и Л.Я.Куликова (см. [83], глава II, § 2). Используя эти результаты Ю.М.Горчакова, М.Томкинсон поставил финальную точку в теории периодических FC-групп, доказав, что всякая такая группа вкладывается в группу $(\times_{\lambda \in \Lambda} G_{\lambda}) \wr (\prod_{\lambda \in \Lambda} G_{\lambda})$, где G_{λ} – конечные группы для всех $\lambda \in \Lambda$ (см. [84], теорема 2.24). Теория непериодических FC-групп начала строиться в работах Л.А.Курдаченко [86 – 93]. В частности, выяснялись вопросы вложимости FC-групп в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения. Очень интересное расширение класса FC-групп возникло в работе [94] другого ученика С.Н.Черникова – Я.Д.Половицкого. Мы не будем ограничиваться определением Я.Д.Половицкого, а сразу рассмотрим общую ситуацию.

Пусть G – группа и S – G -инвариантное подмножество G . Тогда его централизатор $C_G(S)$ будет нормальной подгруппой в G . Соответствующая фактор-группа $\text{Coc}_G(S) = G/C_G(S)$ называется *коцентрализатором подмножества S в группе G* (Л.А.Курдаченко [95]). Влияние коцентрализаторов различных объектов, связанных с группой, на структуру всей группы является предметом изучения в различных областях теории групп. Например, во многих разделах теории конечных групп изучается влияние коцентрализаторов главных факторов группы. В частности, это имеет место в теории формаций, где, например, можно отметить, что локальные формации определяются через коцентрализаторы главных факторов группы. Перейдем теперь к классам бесконечных групп, которые определяются по коцентрализаторам их классов сопряженных элементов.

Пусть X – класс групп. Будем говорить, что группа G имеет X -сопряженные классы или что G является XC -группой, если $\text{Coc}_G(g^G) \in X$ для каждого элемента $g \in G$.

Если $X = I$ – класс всех единичных групп, то класс IC -групп – это в точности класс A всех абелевых групп. Поэтому XC -группы можно рассматривать как обобщение абелевых групп.

Если $X = F$ – класс всех конечных групп, то FC -группы – это в точности группы с конечными классами сопряженных элементов (FC -группы), о которых мы говорили чуть выше.

Если $X = C$ – класс черниковских групп, то CC -группы – это группы с черниковскими классами сопряженных элементов. Эти группы были введены в рассмотрение Я.Д.Половицким в работе [94]. Теория CC -групп не является такой развитой как теория FC -групп, тем не менее этим группам посвящено много содержательных статей (см., например, работы Х.Алькасара и Х.Отала [96], С.Франциози, Ф. де Жиованни, М.Томкинсона [97], М.Гонсалеса и Х.Отала [98 – 100], М.Гонсалеса, Х.Отала и М.Пеньи [101], Х.Отала и М.Пеньи [102 – 106], Х.Отала, М.Пеньи и М.Томкинсона [107]). Исследования XC -групп для других важных классов групп X находятся еще в первоначальной стадии (см. работы С.Франциози, Ф. де Жиованни, Л.А.Курдаченко [108], С.Франциози, Ф. де Жиованни, М.Томкинсона [109], Л.А.Курдаченко [95, 110], Л.А.Курдаченко, Х.Отала [111], Л.А.Курдаченко, И.Я.Субботина [112]).

Подгруппа H группы G называется *почти нормальной*, если она нормальна в подгруппе конечного индекса, т.е. $N_G(H)$ имеет конечный индекс в G . Подгруппа H группы G будет почти нормальной тогда и только тогда, когда множество $cl_G(H) = \{H^g \mid g \in G\}$ – конечно. Если H – нормальна в G , то $cl_G(H) = \{H\}$, так что почти нормальные подгруппы – это естественное обобщение нормальных подгрупп. В работе [113] Б.Нейман рассмотрел группы, у которых каждая подгруппа почти нормальна. Такие группы оказались конечными над центром. К этим же группам пришел и С.Н.Черников, рассматривая в своей работе [27] группы, в которых $C_G(A)$ имеет конечный индекс для каждой абелевой подгруппы A . В связи с этим результатом естественно возник вопрос о строении групп, в которых $N_G(A)$ имеет конечный индекс для каждой абелевой подгруппы A , т.е. каждая абелева подгруппа почти нормальна. Ответ на него получил И.И.Еремин – ученик С.Н.Черникова, доказавший, что такие группы также будут конечными над центром [114]. В статье [115] И.И.Еремин начал изучать группы, в которых все бесконечные подгруппы почти нормальны. Локально почти разрешимые группы с этим свойством были описаны позднее в работе Н.Н.Семко, С.С.Левищенко и

Л.А.Курдаченко [116]. С этой работы начинается систематическое изучение групп, в которых семейство $L_{an}(G)$ всех почти нормальных подгрупп является «очень большим» или семейство $L_{non-an}(G)$ всех подгрупп, которые не являются почти нормальными, «очень мало». Этой тематике посвящен большой массив работ, но мы не будем дальше углубляться в нее. Отметим, что тематика, целью которой является изучение групп, в которых семейство $L_v(G)$ всех подгрупп, имеющих свойство v , является «очень большим» или семейство $L_{non-v}(G)$ всех подгрупп, не имеющих этого свойства, «очень мало», также была начата С.Н.Черниковым. В работе [36] он рассмотрел группы, в которых семейство $L_{non-norm}(G)$ всех подгрупп, которые не являются нормальными, состоит только из конечных подгрупп. А в работе [50] он рассмотрел группы, в которых семейство $L_{non-norm}(G)$ удовлетворяет условию минимальности. В этих работах были рассмотрены и некоторые обобщения. Одним из типов групп, которые появились в этих исследованиях, были метатамилтоновы группы. Так были названы группы, у которых семейство $L_{non-norm}(G)$ состоит из абелевых подгрупп. Они были введены в рассмотрение Н.Ф.Сесекиным и Г.М.Ромалисом – уральскими коллегами С.Н.Черникова – в работе [117]. Метатамилтоновы группы встречались и в других работах С.Н.Черникова, но он всегда выделял их отдельно и не вмешивался в их изучение, предоставив это Н.Ф.Сесекину и Г.М.Ромалису. Последние написали еще две работы [118, 119] о этих группах, но их описание так и не было получено. Позднее к изучению конечных метатамилтоновых групп присоединился А.А.Махнев [120]. Полное описание метатамилтоновых групп было получено Н.Ф.Кузненным и Н.Н.Семко – учениками С.Н.Черникова – в их цикле работ [121 – 127]. Обобщая эту ситуацию, в работах [128 – 129] Л.А.Курдаченко, Х.Отал, А.Руссо и Дж.Винчензи рассмотрели группы, у которых семейство $L_{non-norm}(G)$ состоит из FC -подгрупп.

В работе [11] С.Н.Черников обратился к локально конечным p -группам с условием минимальности для нормальных подгрупп. Они оказались черниковскими. Затем В.С.Чарин [130] построил пример метабелевой группы, которая не является черниковской, но удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Эта работа показала, что изучение групп с ограничениями на нормальные подгруппы требует привлечения другой техники, основанной на теории модулей.

Пусть G – группа и A – нормальная абелева подгруппа G . Положим $H=G/A$ и определим естественное действие H на A по правилу: $ah = a^h$, где $h = gA \in H$, $a \in A$. Это действие естественным образом расширяется до действия на A группового кольца ZH . Такой подход позволяет привлечь для изучения структуры подгрупп группы методы теории групповых колец и модулей над ними. Он был эффективно реализован в теории конечных групп. В своих, уже ставших классическими, работах [131, 132] Ф.Холл продемонстрировал эффективность методов теории нетеровых модулей для изучения бесконечных разрешимых групп. Однако в ситуациях, где возникают артиновы модули (что имеет место при изучении разрешимых групп с условием минимальности для нормальных подгрупп) соответствующее групповое кольцо может быть устроено очень сложно. Поэтому здесь необходимы другие подходы и направления. Это были критерии дополняемости подмодулей, критерии полупростоты, поиск обобщений классических теорем Машке и Фиттинга, поиск некоторых канонических прямых разложений артиновых модулей и т.п. В этой области большой вклад внес Д.И.Зайцев – бесспорно самый лучший из киевских учеников С.Н.Черникова. Мы не будем касаться здесь результатов, относящихся к этой обширной теме, поскольку они были детально освещены в обзоре Л.С.Казарина и Л.А.Курдаченко [133], а затем и в книге Л.А.Курдаченко, Х.Отала и И.Я.Субботина [134].

Важную роль играют модульные методы и в вопросах факторизации групп. Эта тематика естественным образом выросла из теории групп с различными системами дополняемых подгрупп, созданной С.Н.Черниковым и развиваемой его учениками. Результаты этих исследований подробно отражены в обзорах самого С.Н.Черникова, в его книге [62], а также в обзорах [78, 79]. Новые подходы, давшие возможность значительного продвижения в теории факторизуемых групп, были разработаны Д.И.Зайцевым (см. обзор [133]). Существенный вклад в теорию факторизуемых групп был внесен Н.С.Черниковым – сыном С.Н.Черникова, а также Я.П.Сысаком.

Как уже выше отмечалось, С.Н.Черников был инициатором подхода, суть которого основана на изучении влияния на структуру группы свойств важных ее систем подгрупп. Естественным образом возникает параллельная задача о влиянии на строение группы важных ее систем фактор-групп (системы всех собственных фактор-групп, всех конечных фактор-групп, всех фактор-групп по бесконечным нормальным подгруппам и

т.п.). Эта тематика оказалась полезной и интересной, сейчас она весьма хорошо разработана. Существенный вклад в нее внесли Л.А.Курдаченко и И.Я.Субботин – киевские ученики С.Н.Черникова. Мы не будем здесь останавливаться на этом, поскольку эти вопросы были детально рассмотрены в книге Л.А.Курдаченко, Х.Отала и И.Я.Субботина [135].

Затроним еще одну интересную область теории бесконечных групп. Как известно, свойство «быть нормальной подгруппой» не является транзитивным.

Группа G называется T -группой, если из того факта, что H – нормальная подгруппа K , а K – нормальная подгруппа G , вытекает, что H – нормальна в G . Группа G называется $\bar{T}$ -группой, если каждая подгруппа G является T -группой. Конечные T -группы изучались многими авторами. Бесконечные разрешимые T -группы начал изучать Д.Робинсон [136], получивший основные результаты о их строении. После этого в изучение T -групп и $\bar{T}$ -групп включились многие другие алгебраисты. Среди них были и М.И.Каргаполов, И.Н.Абрамовский [137, 138], ученики С.Н.Черникова. Кандидатская диссертация И.Н.Абрамовского была посвящена выяснению различных (в частности, локальных) свойств этих групп. Некоторые естественные обобщения T -групп изучали И.Я.Субботин и Н.Ф.Кузенный. Одним из интересных свойств $\bar{T}$ -групп является тот факт, что всякая ее подгруппа пронормальна. Поэтому естественно возник вопрос о группах, всякая подгруппа которых пронормальна, и о их связях с $\bar{T}$ -группами. Напомним, что подгруппа H группы G называется *проноормальной* (в G), если подгруппы H и H^g – сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ для каждого элемента $g \in G$. Пронормальные подгруппы естественным образом возникли в процессе изучения таких ключевых типов подгрупп конечных разрешимых групп, как силовские подгруппы, холловские подгруппы, системные нормализаторы, подгруппы Картера и т.п. Сам термин «проноормальная подгруппа» принадлежит Ф.Холлу. Интересно отметить, что понятие проноормальной подгруппы, являясь обобщением силовских подгрупп конечной группы, тем не менее не несет в себе никаких условий, связанных с порядком группы. Это позволяет выйти за рамки теории конечных групп и рассматривать проноормальность в бесконечных группах без дополнительных ограничений, присущих конечным группам. Н.Ф.Кузенный и И.Я.Субботин в работе [139] получили полное описание периодических локально ступенчатых групп, все подгруппы которых проноормальны, а также непериодических

локально разрешимых групп такого рода. Оказалось, что в отличие от случая конечных групп [146], классы групп с пронормальными подгруппами и $\bar{T}$ -групп различны. Как показали Н.Ф.Кузенный и И.Я.Субботин в другой работе [140], такое совпадение имеет место только для групп, все циклические подгруппы которых пронормальны. Следует отметить, что С.Н.Черников сразу оценил перспективность изучения групп, насыщенных пронормальными подгруппами. Дальнейшие поиски на этом направлении позволили выделить новые интересные связи и свойства. Будем говорить, что подгруппа H группы G транзитивно нормальна, если H является нормальной в каждой такой подгруппе $K \geq H$, что H – субнормальна в K . Всякая пронормальная подгруппа транзитивно нормальна, поэтому вполне естественно ставить вопрос о том, когда транзитивно нормальные подгруппы будут пронормальными. Некоторые условия для этого были найдены Л.А.Курдаченко и И.Я.Субботиным в статье [141]. Они позволили взглянуть на ситуацию с наиболее общей точки зрения.

С пронормальностью также связана следующая характеристика конечных нильпотентных групп: *конечная группа будет нильпотентной тогда и только тогда, когда всякая ее пронормальная подгруппа нормальна*. Известно, что во всякой локально нильпотентной группе пронормальные подгруппы нормальны [142]. В связи с этим естественно возникает вопрос о том, будут ли локально нильпотентными группы, в которых все пронормальные подгруппы нормальны. Положительный ответ на этот вопрос для некоторых достаточно широких классов групп был получен в работах Л.А.Курдаченко, Х.Отала, И.Я.Субботина [143], Л.А.Курдаченко, И.Я.Субботина [144], Л.А.Курдаченко, А.Руссо, Дж.Винчензи [145].

Подгруппа H группы G называется *слабо пронормальной* в G , если для всякой пары таких подгрупп K, L , включающих H , что K – нормальна в L , имеет место следующее включение $L \leq N_G(H)K$ (в этом случае говорят также, что H имеет свойство Фраттини). Для конечных разрешимых групп в работе Т.Пенга [146] было доказано совпадение свойств пронормальности и слабой пронормальности. Этот результат был расширен в работе Л.А.Курдаченко, Х.Отала, И.Я.Субботина [147], на группы, обладающие возрастающим рядом нормальных подгрупп, факторы которых будут N -группами.

Пронормальность не является транзитивным свойством. Поэтому естественным представляется вопрос о группах, в которых свойство

«быть пронормальной подгруппой» является транзитивным. Достаточно полный ответ на него получен Л.А.Курдаченко и И.Я.Субботиным в работе [148]. В этой связи интересно отметить, что вопрос о транзитивности частного случая пронормальности – абнормальности – является намного более сложным. Напомним, что подгруппа H группы G называется абнормальной (в G), если $g \in \langle H, H^g \rangle$ для каждого элемента g группы G . Условия транзитивности абнормальности, а также другие важные свойства абнормальных подгрупп можно найти в работе [149] и обзоре [150].

В работах [27, 31, 32] С.Н.Черников начал изучение некоторых классов локально конечных групп с черниковскими силовскими подгруппами. Позднее в изучение локально конечных групп с черниковскими силовскими подгруппами включились М.И.Каргаполов и В.П.Шунков. Это изучение оказалось очень интересным и результативным и привлекло многих специалистов. Теперь это довольно хорошо развитая часть теории локально конечных групп. Мы не будем здесь вдаваться в детали, отметим только, что эта тематика нашла хорошее отражение в книге М.Диксона [151]. В частности, оказалось, что класс радикальных групп с черниковскими силовскими подгруппами занимает особое место. Он оказался одним из немногих классов локально конечных групп, на которые могут быть расширены разнообразные результаты теории конечных групп. Обзор некоторых из этих результатов можно найти в статьях [152, 153].

Мы не затронули также тематику, связанную с плотными системами различных подгрупп. Она очень активно развивалась С.Н.Черниковым и его учениками. Мы не делаем это ввиду ограниченности объема, а также потому, что она была достаточно хорошо отражена в монографии Н.Н.Семко [154].

4 Список основных публикаций С.Н.Черникова

1. Перенесение одной теоремы Frobenius'a на бесконечные группы // Мат. сб. – 1938. – 3. – С. 413 – 416.
2. К теореме Frobenius'a // Там же. – 1938. – 4. – С. 531 – 539.
3. Бесконечные специальные группы // Там же. – 1939. – 6, №2. – С. 199 – 214.
4. Бесконечные локально разрешимые группы // Там же. – 1940. – 7, №1. – С. 35 – 61.
5. К теории бесконечных специальных групп // Там же. – 1940. – 7, №3. – С. 539 – 548.
6. О группах с силовским множеством // Там же. – 1940. – 8, №3. – С. 377 – 394.

7. К теории локально разрешимых групп // Там же. – 1943. – 13, №2 – 3. – С. 317 – 333.
8. О бесконечных специальных группах с конечным центром // Там же. – 1945. – 17, № 1. – С. 105 – 130.
9. К теории бесконечных p -групп // Докл. АН СССР. – 1945, 50, № 1. – С. 71 – 74.
10. Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом // Мат. сб. – 1946. – 18, №3. – С. 397 – 422.
11. К теории конечных p -расширений абелевых p -групп // Докл. АН СССР. – 1947, 58, № 6. – С. 1287 – 1289.
12. Бесконечные слойно-конечные группы // Мат. сб. – 1948. – 22, № 2 – С. 101 – 133.
13. К теории полных групп // Там же. – 1948. – 22, №3. – С. 319 – 348.
14. Дополнения к статье «К теории полных групп» // Там же. – 1948. – 22, № 4. – С. 455 – 456.
15. К теории специальных p -групп // Докл. АН СССР. – 1948, 63, №1. – С. 11 – 14.
16. К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. – 1949, 65, № 1. – С. 21 – 24.
17. К теории групп без кручения, обладающих возрастающим центральным рядом // Ученые записки Уральского (Свердловского) ун-та. – 1949. – №7. – С. 3 – 21.
18. О полных группах с возрастающим центральным рядом // Докл. АН СССР. – 1950, 70, №6. – С. 965 – 968.
19. О централизаторе полного абелева нормального делителя в бесконечной периодической группе // Там же. – 1950, 72, №2. – С. 243 – 246.
20. Об условии минимальности для абелевых подгрупп // Там же. – 1950, 75, №3. – С. 345 – 347.
21. Периодические ZA -расширения полных групп // Мат. сб. – 1950. – 27, № – С. 117 – 128.
22. О специальных p -группах // Там же. – 1950. – 27, №2. – С. 185 – 200.
23. О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Там же. – 1951. – 28, №1. – С. 119 – 129.
24. Группы с системами дополняемых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1953, 92, № 5. – С. 891 – 894.
25. Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб. – 1954. – 35, № 1. – С. 93 – 128.
26. О дополняемости силовских Π -подгрупп в некоторых классах бесконечных групп // Там же. – 1955. – 37, №3. – С. 557 – 566.
27. О группах с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР. – 1957, 114, №6. – С. 1177 – 1179.
28. О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Там же. – 1957, 115, №1. – С. 60 – 63.
29. О слойно-конечных группах // Мат. сб. – 1958. – 45, №3. – С. 415 – 416.
30. Некоторые классы групп с условиями конечности // Докл. АН СССР. – 1959, 127, №6. – С. 1176 – 1178.
31. Условия конечности в общей теории групп // Успехи матем. наук. – 1959, 14, №5. – С. 45 – 96.
32. О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами // Мат. сб. – 1960. – 52, №1. – С. 647 – 652.
33. Условия локальной конечности однослойных p -групп // Докл. АН СССР. – 1962, 147, №1. – С. 49 – 52.
34. Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Там же. – 1964, 159, №4. – С. 759 – 760.
35. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Там же. – 1966, 171, №4. – С. 806 – 809.
36. Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1967, 19, №6. – С. 111 – 131.
37. О нормализаторном условии // Мат. заметки. – 1968. – 3, №1. – С. 45 – 50.
38. О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Там же. – 1968. – 4, №1. – С. 91 – 96.
39. Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для инвариантных подгрупп // Там же. – 1969. – 6, № 1. – С. 11 – 18.
40. Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для инвариантных абелевых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1969, 184, №4. – С. 786 – 789.
41. Исследование групп с заданными свойствами подгрупп // Укр. мат. журн. – 1969, 21, №2. – С. 193 – 209.
42. Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР. – 1970, 194, №6. – С. 1280 – 1283.
43. Исследования О.Ю.Шмидта в теории бесконечных групп // Укр. мат. журн. – 1971, 23, №5. – С. 591 – 597.
44. О проблеме Шмидта // Там же. – 1971, 23, №5. – С. 598 – 603.
45. Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Там же. – 1971, 23, №5. – С. 604 – 628.
46. Теория групп в Киевской алгебраической школе Д.А.Граве и первые исследования групп с ограничениями для подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. –

С. 9 – 17.

47. *О группах с ограничениями для подгрупп* // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 17 – 39.

48. *Группы с инвариантными бесконечными абелевыми подгруппами* // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 47 – 65.

49. *Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп* // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 96 – 106.

50. *Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп* // Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 106 – 115.

51. *Сверхразрешимые группы с дополняемыми абелевыми нормальными делителями* // Группы с системами дополняемых подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1972. – С. 35 – 48.

52. *Обобщенные сверхразрешимые группы с системами дополняемых абелевых подгрупп* // Докл. АН СССР. – 1972, 205, №6. – С. 1306 – 1309.

53. *Группы, имеющие сепарирующие подгруппы* // Группы с заданными свойствами. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 6 – 14.

54. *Группы с системами дополняемых абелевых нормальных делителей* // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 5 – 71.

55. *Группы с плотной системой дополняемых подгрупп* // Некоторые вопросы теории групп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 5 – 29.

56. *Группы с примитивно-плотной системой дополняемых подгрупп* // Исследования по теории групп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 3 – 25.

57. *Некоторые виды бесконечных групп с заданной системой дополняемых бесконечных абелевых подгрупп* // Алгебра и логика. – 1976, 15, №6. – С. 660 – 683.

58. *Некоторые аспекты изучения групп с заданными свойствами системы подгрупп* // Теоретико-групповые исследования. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 3 – 7.

59. *Некоторые условия дополняемости подгрупп в сверхразрешимых периодических группах* // Теоретико-групповые исследования. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 8 – 15.

60. *Некоторые условия экстремальности бесконечных p -групп* // Строение групп и свойства их подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 5 – 16.

61. *Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами* // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 3 – 15.

62. *Группы с заданными свойствами системы подгрупп*. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

63. *Бесконечные обобщенно гамильтоновы группы* // Конструктивное описание групп с заданными свойствами подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 3 – 15.

64. *Бесконечные группы, определяемые свойствами системы бесконечных подгрупп* // VI Всесоюзный симпозиум по теории групп. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 5 – 22.

65. *Сверхразрешимые примарно элементарные группы* // Исследование групп с заданными свойствами системы подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 3 – 15.

66. *Об условии минимальности для подгрупп* // Докл. АН СССР. – 1981, 260, №2. – С. 300 – 302.

67. *О группах с условием минимальности для подгрупп* // Подгрупповая характеристика групп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 3 – 12.

68. *Нормально факторизуемые неабелевы группы с абелевым коммутантом* // Группы и системы их подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 3 – 15.

69. *Исследования В.М.Глушкова по теории групп* // Укр. мат. журн. – 1983, 35, №6. – С. 801 – 804.

70. *Периодические группы с абелевыми силовскими подгруппами и абелевым коммутантом* // Строение групп и их подгрупповая характеристика. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 3 – 15.

71. *Сверхразрешимые группы с условием минимальности, все примарные подгруппы которых абелевы* // Алгебра и логика. – 1984. – 23, № 6. – С. 702 – 720.

72. *Факторизационный критерий локальной разрешимости локально конечных групп с условием минимальности для примарных подгрупп* // Укр. мат. журн. – 1985, 37, №. – С. 762 – 766.

73. *Локально сверхразрешимые периодические A -группы с условием минимальности для примарных подгрупп* // Строение групп и свойства их подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 5 – 21.

74. *Курош А.Г., Черников С.Н. Разрешимые и нильпотентные группы* // Успехи матем. наук – 1947. – 2, № 3. – С. 18 – 59.

75. *Черников С.Н., Зайцев Д.И., Чарни В.С. Абстрактно групповые исследования и теория топологических групп* // Укр. мат. журн. – 1973, 25, №6. – С. 772 – 783.

Список использованной литературы

76. Курош А.Г. *Zur Zerlegung unendlicher Gruppen* // Math. Annalen – 1932. – 106. – S. 107 – 113.
77. Плоткин Б.И. *Обобщенно разрешимые и обобщенно нильпотентные группы* // Успехи матем. наук. – 1958. – 13, № 4. – С. 89 – 172.
78. Зайцев Д.И., Каргаполов М.И., Чарин В.С. *Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп* // Укр. мат. журн. – 1972. – 24, №5. – С. 618 – 633.
79. Чарин В.С., Зайцев Д.И. *Группы с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп* // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, №3. – С. 277 – 287.
80. Олышанский А.Ю. *Геометрия определяющих соотношений в группах*. – М.: Наука, 1989. – 447 с.
81. Grigorchuk R.I. *Solved and unsolved problems around one group* // Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects. Progress in Mathematics Series, Vol. 248. Bartholdi, L.; Ceccherini – Silberstein, T.; Smirnova-Nagnibeda, T.; Zuk, A. (Eds.). – 2005, 413 p., BIRKHÄUSER: pp. 117 – 218.
82. Hall P. *Periodic FC-groups* // Journal London Math. Soc. – 1959. – 34. – P. 289 – 304.
83. Горчаков Ю.М. *Группы с конечными классами сопряженных элементов*. – М.: Наука, 1978. – 116 с.
84. Tomkinson M.J. *FC-groups*. – Boston: Pitman, 1984. – 171 p.
85. Tomkinson M.J. *FC-groups: recent progress* // In *CC-groups* 1994 (Ravello 1994). – Berlin: Walter de Gruyter, 1996. – P. 271 – 285.
86. Курдаченко Л.А. *FC-группы, периодическая часть которых вкладывается в произведение конечных групп* // Мат. заметки. – 1977. – 21, №1. – С. 9 – 20.
87. Курдаченко Л.А. *О строении FC-групп, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп* // Там же. – 1979. – 25, №1. – С. 15 – 26.
88. Курдаченко Л.А. *Вложимость FC-групп в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения* // Там же. – 1981. – 29, №3. – С. 359 – 373.
89. Курдаченко Л.А. *Некоторые условия вложимости FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения* // Мат. сб. – 1981. – 114, № 4. – С. 566 – 582.
90. Курдаченко Л.А. *FC-группы с ограниченной периодической частью* // Укр. мат. журн. – 1983. – 35, №3. – С. 374 – 378.
91. Курдаченко Л.А. *О некоторых непериодических FC-группах* // Группы и системы их подгрупп. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 92 – 100.
92. Курдаченко Л.А. *Непериодические FC – группы и связанные с ними классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения* // Сиб. мат. журн. – 1986. – 27, №2. – С. 104 – 116.
93. Курдаченко Л.А. *FC-группы счетного свободного ранга* // Мат. заметки. – 1986. – 40, №1. – С. 16 – 30.
94. Половицкий Я.Д. *Группы с экстремальными классами сопряженных элементов* // Сиб. мат. журн. – 1964. – 5. – С. 891 – 895.
95. Курдаченко Л.А. *О группах с минимаксными классами сопряженных элементов* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Наук. думка, 1993. – С. 160 – 177.
96. Alcasar J. and Otal J. *Sylow subgroups of groups with Chernikov conjugacy classes* // Journal Algebra. – 1987. – 110, №2. – P. 507 – 513.
97. Franciosi S., de Giovanni F., Tomkinson M.J. *Groups with Chernikov conjugacy classes* // Journal Austral. Math. Soc. (series A). – 1991. – 50. – P. 1 – 14.
98. Gonzales M., Otal J. *Hall's covering group and embedding of countable CC-groups* // Communications Algebra. – 1990. – 18. – P. 3405 – 3412.
99. Gonzales M., Otal J. *Embedding theorems for residually Chernikov CC-groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – 123, №8. – P. 2383 – 2332.
100. Gonzales M., Otal J. *The extension of results due to Gorchakov and Tomkinson from FC-groups to CC-groups* // Journal Algebra. – 1996. – 185. – P. 314 – 328.
101. Gonzales M., Otal J. and Peña M. *CC-groups with periodic central factors* // Manuscripta Math. – 1990. – 69. – P. 93 – 103.
102. Otal J. and Peña M. *Minimal non-CC-groups* // Communications Algebra. – 1988. – 16, №6. – P. 1231 – 1242.
103. Otal J. and Peña M. *Groups in which every proper subgroup is Chernikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Chernikov* // Archiv Math. – 1988. – 51. – P. 193 – 197.
104. Otal J. and Peña M. *Groups with minimal condition related to finiteness properties of conjugate classes* // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1989. – 81. – P. 79 – 84.
105. Otal J. and Peña M. *Characterizations of the conjugacy of Sylow p-subgroups of CC-groups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – 106. – P. 605 – 610.
106. Otal J. and Peña M. *Sylow theory of CC-groups: a survey* // London Math. Soc. Lecture Notes Ser. – 1991. – 160. – P. 400 – 407.
107. Otal J., Peña M. and Tomkinson M.J. *Locally inner automorphisms of CC-groups* // Journal

Algebra. – 1991. – 141. – P. 382 – 398.

108. Franciosi S., de Giovanni F. and Kurdachenko L.A. *The Schur property and groups with uniform conjugacy classes* // Journal Algebra. – 1995. – 174. – P. 823 – 847.

109. Franciosi S., de Giovanni F. and Tomkinson M.J. *Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes* // Bolletino Unione Mat. Italiana. – 1990. – 4B, №7. – P. 35 – 55.

110. Kurdachenko L.A. *On normal closures of elements in generalized FC-groups* // Infinite groups 1994 (Ravello 1994). – Berlin: Walter de Gruyter, 1996. – P. 141 – 151.

111. Kurdachenko L.A., Otal J. *Frattini properties of groups with minmax conjugacy classes* // Quaderni di Matematica. – 2001. – 8. – P. 221 – 237.

112. Kurdachenko L.A. and Subbotin I.Ya. *Groups with restrictions for cocentralizers of elements* // Communications Algebra. – 1996. – 24, №3. – P. 1173 – 1187.

113. Neumann B.H. *Groups with finite classes of conjugate subgroups* // Math. Z. – 1955. – 63, №1. – P. 76 – 96.

114. Еремін І.І. *Групи з кінцевими класами сопряжених абелевих підгруп* // Мат. сб. – 1959. – 47, №1. – С. 45 – 54.

115. Еремін І.І. *Групи з кінцевими класами сопряжених бесконечных підгруп* // Уч. зап. Пермського ун-та. – 1960. – 17, №2. – С. 13 – 14.

116. Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А. *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – №10. – С. 57 – 63.

117. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. *О метамильтоновых группах I* // Мат. зап. Уральского ун-та. – 1966. – 5, №3. – С. 45 – 49.

118. Сесекин Н.Ф., Ромалис Г.М. *О метамильтоновых группах II* // Мат. зап. Уральского ун-та. – 1968. – 6, №5. – С. 50 – 53.

119. Ромалис Г.М., Сесекин Н.Ф. *О метамильтоновых группах III* // Мат. зап. Уральского ун-та. – 1970. – 7, №3. – С. 195 – 199.

120. Махнев А.А. *О конечных метамильтоновых группах* // Мат. зап. Уральского ун-та. – 1976. – 10, №1. – С. 60 – 75.

121. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение разрешимых неильпотентных метамильтоновых групп* // Мат. заметки. – 1983. – 34, №2. – С. 179 – 188.

122. Кузенный Н.Ф., Семко М.М. *Будова розв'язних метамильтонових груп* // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1985. – №2. – С. 6 – 9.

123. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении неперiodических метамильтоновых групп* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – №11. – С. 32 – 40.

124. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *Строение периодических метабелевых метамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом* // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, №2. – С. 180 – 185.

125. Семко Н.Н., Кузенный Н.Ф. *Строение периодических метабелевых метамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два* // Там же. – 1987. – 39, №6. – С. 743 – 750.

126. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О строении периодических неабелевых метамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три* // Там же. – 1989. – 41, №2. – С. 170 – 176.

127. Кузенный Н.Ф., Семко Н.Н. *О метамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два* // Там же. – 1990. – 42, №2. – С. 168 – 175.

128. Kurdachenko L.A., Otal J., Russo A., C. Vincenzi G. *The local structure of groups whose non-normal subgroups have finite conjugacy classes* // Advanced in Group Theory 2002, Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoli, May – June 2002. – 2003. – Roma: Aracne. – P. 93 – 110.

129. Kurdachenko L.A., Otal J., Russo A., C. Vincenzi G. *Groups whose non-normal subgroups have finite conjugate classes* // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. – 2004. – 104A, №2. – P. 177 – 189.

130. Чарин В.С. *Замечание о условии минимальности для подгруп* // Докл. АН СССР. – 1949. – 66, №4. – С. 575 – 576.

131. Hall P. *Finiteness conditions for soluble groups* // Proc. London Math. Soc. – 1954. – 4. – P. 419 – 436.

132. Hall P. *On the finiteness of certain soluble groups* // Proc. London Math. Soc. – 1959. – 9. – P. 595 – 632.

133. Казарин Л.С., Курдаченко Л.А. *Условия конечности и факторизации в бесконечных группах* // Успехи мат. наук. – 1992. – 47, №3. – С. 75 – 114.

134. Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya. *Artinian modules over group rings*. – Basel: Birkhauser, 2007. – 245 p.

135. Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya. *Groups with prescribed quotient groups and associated module theory*. – New Jersey: World Scientific, 2002. – 227 p.

136. Robinson D.J.S. *Groups in which normality is a transitive relation* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1964. – 60. – P. 21 – 38.

137. Абрамовский И.Н., Каргаполов М.И. *Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных подгруп* // Успехи мат. наук. – 1958. – 13, №3. – С. 242 – 243.

138. Абрамовский И.Н. Локально обобщенно гамильтоновы группы // Сиб. мат. журн. – 1966. – 7, №3. – С. 481 – 485.
139. Кузевый Н.Ф., Субботин И.Я. Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, №3. – С. 325 – 329.
140. Кузевый Н.Ф., Субботин И.Я. Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. вузов. Математика. – 1987. – №11. – С. 77 – 79.
141. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *Transitivity of normality and pronormal subgroups* // AMS Special session on infinite groups. October 8 – 9, 2005, Bard College. Combinatorial group Theory, discrete groups, and number theory. American Mathematical Society, Contemporary Mathematics. – 2006. – 421. – P. 201 – 212.
142. Кузевый Н.Ф., Субботин И.Я. Новая характеристика локально нильпотентных $\overline{PH}$ -групп // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, №3. – С. 322 – 326.
143. Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya. *On some criteria of nilpotency* // Communications in Algebra. – 2002. – 30, №2. – P. 3755 – 3776.
144. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *Pronormality, contranormality and generalized nilpotency in infinite groups* // Publicacions Matemàtiques. – 2003. – 189, №2. – P. 389 – 414.
145. Kurdachenko L.A., Russo A., Vincenzi G. *Groups without proper abnormal subgroups* // Journal Group Theory. – 2006. – 9. – P. 507 – 518.
146. Peng T.A. *Pronormality in finite groups* // J. London Math. Soc. – 1971. – 3, №2. – P. 301 – 306.
147. Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya. *Abnormal, Pronormal, Contranormal, and Carter Subgroups in Some Generalized Minimax Groups* // Communications in Algebra. – 2005. – 33, №12. – P. 4595 – 4616.
148. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *On transitivity of pronormality* // Comment. Mathemat. Univ. Caroline. – 2002. – 43, №4. – P. 583 – 594.
149. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. *Abnormal subgroups and Carter subgroups in some infinite groups* // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – №1. – P. 63 – 77.
150. Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya. *On properties of abnormal and pronormal subgroups in some infinite groups* // Groups St. Andrews 2005. Cambridge University Press, Series: London Mathematical Society Lecture Note Series (No.340). – 2007. – P. 772 – 782.
151. Dixon M.R. *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups*. – Singapore : World Scientific, 1994. – 304 p.
152. Ballester-Bolinches A., Pedraza T. *On radical locally finite groups with Min-p for all primes p* // Advanced in Group Theory 2002, Proceedings of the Intensive Bimester Dedicated to the Memory of Reinhold Baer, Napoly, May – June 2002. – 2003. – Roma: Aracne. – P. 223 – 234.
153. Ballester-Bolinches A., Pedraza T. *Locally finite groups with Min-p for all primes p. Groups with all non-subnormal subgroups of finite rank* // Groups St Andrews 2001 in Oxford. Volume 1. London Mathematical Society. Lecture Note Series 304. Cambridge Univ. Press. – 2003. – P. 39 – 43.
154. Семко М.М. *Групи з умовами щільності нормальності та її узагальнень для деяких систем підгруп*. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 285 с.

Надійшла до редколегії 28.03.2007

УДК 512.54

Я. В. Лавренюк, А. С. Олійник

**Про вінцеві добутки за деревовидно
впорядкованими множинами**

В роботі вказано точні дії вінцевих добутків груп підстановок за деревовидно впорядкованими множинами автоморфізмами на кореневому дереві. Отримано критерій ізоморфізму таких груп для певних порядків та груп підстановок.

Ключові слова: деревовидний порядок, вінцевий добуток, кореневе дерево, група автоморфізмів дерева.

1. Вінцеві добутки за послідовностями груп підстановок є одним з найцікавіших напрямків досліджень сучасної теорії груп. Вони знаходять широкі застосування як в алгебрі, так і в топології, символічній динаміці, голоморфній динаміці, ергодичній теорії (див. напр. роботи [1, 4] і списки літератури в них). Разом з тим, природні узагальнення таких вінцевих добутків вивчаються мало. У даній роботі розглядаються вінцеві добутки тих множин груп підстановок, на яких введено структуру деревовидного порядку. Показано, як можна визначити точну дію таких вінцевих добутків автоморфізмами корневих дерев. Окремо розглянуто випадок скінченних транзитивних груп підстановок, які не допускають нетривіального розкладу в прямий чи вінцевий добуток. Для локально скінченних деревовидно впорядкованих без некорневих висячих елементів множин таких груп підстановок доводиться, що кожен ізоморфізм відповідних вінцевих добутків визначається ізоморфізмом цих деревовидно впорядкованих множин.

2. Нехай $(\Lambda, <)$ — строго впорядкована множина. Для елемента $\alpha \in \Lambda$ позначимо символом Λ_α підмножину всіх тих елементів $\beta \in \Lambda$, що $\beta < \alpha$. Будемо називати множину $(\Lambda, <)$ деревовидно впорядкованою (а порядок " $<$ " на ній деревовидним), якщо вона має найменший елемент і для довільного елемента $\alpha \in \Lambda$ підмножина Λ_α є скінченною, а індукований порядок на ній лінійним. Попереднім елементом для елемента $\alpha \in \Lambda$ назвемо найбільший елемент підмножини Λ_α . Попередній елемент існує для кожного, відмінного від найменшого, елемента де-

Y. V. Lavrenyuk, A. S. Oliynyk

**On wreath products over tree ordered
sets**

Faithful actions by automorphisms on rooted trees for wreath products of permutation groups over tree ordered sets are constructed. An isomorphism criterion for such wreath products for some ordered sets and permutation groups is obtained.

Key words: tree order, wreath product, rooted tree, automorphism group of tree.

ревовидно впорядкованої множини Λ . Деревовидно впорядковану множину будемо називати локально скінченною, якщо кожен її елемент є попереднім лише для скінченного числа елементів цієї множини.

Зафіксуємо деяку деревовидно впорядковану множину $(\Lambda, <)$ з найменшим елементом α_0 . Розглянемо родину груп підстановок (G_α, M_α) , $\alpha \in \Lambda$, причому множини M_α , $\alpha \in \Lambda$, попарно не перетинаються. Елементи декартового добутку M множин M_α , $\alpha \in \Lambda$, будемо називати кортежами і записувати у вигляді $\bar{m} = (m_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. При цьому елемент m_α будемо називати α -координатою кортежа $\bar{m}$, $\alpha \in \Lambda$.

Розглядатимемо такі підстановки f на множині M , що для довільного елемента $\alpha \in \Lambda$ виконані наступні дві умови.

По-перше, для довільного кортежа $\bar{m} \in M$ α -координата кортежа $f(\bar{m})$ залежить лише від тих β -координат кортежа $\bar{m}$, що $\beta \leq \alpha$.

Ця умова зокрема означає, що при фіксованих $m_\beta \in M_\beta$, $\beta \in \Lambda_\alpha$, функція f визначає підстановку π на множині M_α таку, що для довільного $m_\alpha \in M_\alpha$ елемент $\pi(m_\alpha)$ є α -координатою кортежа $f(\bar{m})$, де в кортежі $\bar{m}$ α -координата рівна m_α , а для $\beta \in \Lambda_\alpha$ його β -координата рівна m_β . Другою умовою, якій задовольняє підстановка f , є умова належності підстановки π групі G_α .

З результатів роботи [2] випливає, що всі такі підстановки f утворюють підгрупу в симетричній групі множини M . Позначимо цю підгрупу символом

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

і назвемо вінцевим добутком груп підстановок (G_α, M_α) , $\alpha \in \Lambda$, за деревовидним порядком " $<$ ". Як впливає з означення, елемент f групи

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

можна записувати у вигляді кортежу $(f_\alpha(\bar{x}))_{\alpha \in \Lambda}$, де $f_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}$, $f_\alpha(\bar{x})$ — відображення, яке діє з декартового добутку множин M_β , $\beta \in \Lambda_\alpha$, у групу G_α , $\alpha \in \Lambda$, $\alpha \neq \alpha_0$. Зазначимо, що описана конструкція вінцевого добутку збігається з добре відомою (див. напр. [1]) конструкцією вінцевого добутку за послідовністю груп підстановок у випадку, коли деревовидно впорядкована множина ізоморфна множині натуральних чисел з природним порядком " $<$ " на ній.

Також ми будемо вільно використовувати стандартні поняття та позначення, пов'язані з кореневими деревами, їхніми границями та групами, які діють на них (див. [1, 4]).

3. Кожній деревовидно впорядкованій множині $(\Lambda, <)$ з найменшим елементом α_0 поставимо у відповідність неорієнтований граф $T = T(\Lambda)$, множиною вершин якого є Λ , а дві вершини з'єднуються ребром тоді й тільки тоді, коли одна з них є попередньою для іншої. Граф T буде кореневим деревом, коренем якого є α_0 — найменший елемент множини Λ . Це дерево буде локально скінченним тоді й тільки тоді, коли множина $(\Lambda, <)$ є локально скінченною. Кожній вершині $\alpha \in \Lambda$ цього дерева ставиться у відповідність невід'ємне ціле число $l(\alpha)$ — номер рівня дерева T , на якому лежить вершина α . А саме, для вершини α_0 покладемо $l(\alpha_0) = 0$. Для довільної іншої вершини α покладемо $l(\alpha)$ рівним тому натуральному числу n , що номером рівня вершини, попередньої для α , є число $n - 1$. Таке означення є коректним в силу означення деревовидного порядку. Для кожного невід'ємного цілого n позначимо символом $L(n)$ множину вершин дерева T , які лежать на рівні з номером n . Назвемо множину $L(n)$ n -тим рівнем дерева T . Таким чином, множина Λ розбивається в об'єднання не більш ніж зліченної кількості своїх рівнів. Аналогічне розбиття на рівні вводиться для множини вершин довільного кореневого дерева.

Розглянемо вінцевий добуток

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

груп підстановок (G_α, M_α) , $\alpha \in \Lambda$, за деревовидним порядком " $<$ ", M — декартів добуток множин M_α , $\alpha \in \Lambda$.

Розглянемо також дерево з мітками T_G , яке отримується з дерева $T(\Lambda)$ шляхом присвоєння кожній вершині α мітки G_α .

Для кожного $\alpha \in \Lambda$ розглянемо множину

$$\Lambda^\alpha = \{\beta \in \Lambda : \alpha < \beta \text{ або } \alpha = \beta\}$$

разом з індукованим на ній порядком " $<$ ". Тоді вона також є деревовидно впорядкованою і можемо розглядати вінцевий добуток

$$G^\alpha = \bigcup_{\beta \in \Lambda^\alpha} G_\beta,$$

який є групою підстановок на множині M^α — декартовому добутку множин M_β , $\beta \in \Lambda^\alpha$.

Твердження 1. Група підстановок (G, M) ізоморфна як група підстановок вінцевому добутку групи підстановок $(G_{\alpha_0}, M_{\alpha_0})$ з декартовою сумою груп (G^α, M^α) , $\alpha \in L(1)$.

Доведення відразу впливає з означення вінцевого добутку за деревовидно впорядкованою множиною, а також природного представлення множини M у вигляді декартового добутку M_{α_0} з диз'юнктним об'єднанням множин M^α , $\alpha \in L(1)$.

Теорема 1. Існує точна дія групи G автоморфізмами на деякому кореневому дереві $T(G)$.

Доведення. Далі будемо розглядати лише такі деревовидно впорядковані множини $(\Lambda, <)$, що для довільного елемента $\alpha \in \Lambda$ множина Λ^α є нескінченною. Ця умова рівносильна відсутності некореневих висячих вершин у відповідному дереві $T(\Lambda)$. В загальному випадку доведення буде відрізнятися лише незначними деталями.

Визначимо індуктивно кореневе дерево $T(G)$. Його коренем буде елемент α_0 — єдина вершина нульового рівня. Для $n \geq 1$ множиною вершин n -того рівня є множина наборів $(\alpha, m_1, \dots, m_n)$ таких, що $\alpha \in L(n)$, а $m_i \in M_{\beta_i}$ для деякого $\beta_i \in L(i - 1)$, $1 \leq i \leq n$. Кожна така вершина з'єднується з вершиною $(\alpha', m'_1, \dots, m'_{n-1})$ попереднього рівня тоді й лише тоді, коли $\alpha' < \alpha$ і $m'_1 = m_1, \dots, m'_{n-1} = m_{n-1}$.

Дію групи G на дереві $T(G)$ визначимо так. Коренева вершина буде нерухомою. Вершина ж $(\alpha, m_1, \dots, m_n)$ ($m_i \in M_{\beta_i}$ для $\beta_i \in L(i - 1)$),

$1 \leq i \leq n$) під дією елемента $(f_\beta(\bar{x}))_{\beta \in \Lambda}$ групи G перейде у вершину $(\alpha, m'_1, \dots, m'_n)$ таку, що

$$m'_1 = m_1^{f_{\alpha_0}}, \dots, m'_n = m_n^{f_{\beta_{n-1}}(m_1, \dots, m_{n-1})}.$$

З означення вінцевого добутку за деревовидно впорядкованою множиною одразу випливає, що так визначене перетворення буде автоморфізмом дерева $T(G)$, звідки й випливає потрібне твердження. $\square$

Безпосередньо з попередньої теореми одержуємо

Наслідок 1. Якщо кожна з груп $G_\alpha, \alpha \in \Lambda$, є скінченною, а деревовидний порядок на Λ локально скінченним, то група G є резидуально скінченною.

4. Далі розглядатимемо лише локально скінченні деревовидно впорядковані множини $(\Lambda, <)$, для яких відповідне дерево $T(\Lambda)$ не має некорених висячих вершин. Позначимо символом $\mathcal{W}_R$ клас вінцевих добутків нетривіальних транзитивних скінченних груп підстановок, що не розкладаються у нетривіальні вінцеві та прямі добутки груп підстановок, за такими деревовидними порядками. За твердженням 1 кожна така група G , як група підстановок, допускає розклад вигляду

$$(H, X) \wr (G_1 \oplus \dots \oplus G_n),$$

в якому (H, X) — нетривіальна транзитивна скінченна група підстановок, що не розкладається у нетривіальний вінцевий чи прямий добуток груп, а кожна з груп $G_1, \dots, G_n$ належить класу $\mathcal{W}_R$.

Нам знадобиться такий результат М.Рубіна.

Теорема 2 ([5]). Нехай G_1 та G_2 — групи, що діють точно гомеоморфізмами на Хаусдорфові топологічні простори X_1 та X_2 відповідно. Припустимо, що для кожного $i = 1, 2$ виконуються такі умови:

- (1) Для кожної не порожньої відкритої множини $U \subset X_i$ існує неодиначний елемент $g \in G_i$, такий що обмеження g на $X_i \setminus U$ є тривіальним.
- (2) Для кожної не порожньої відкритої множини $U \subset X_i$ існує не порожня відкрита

множина $U_1 \subseteq U$, така що для кожної відкритої підмножини $W_1, W_2 \subset U_1$, з існування такого $g \in G_i$, що $g(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$, випливає, що існує таке $h \in G$, що обмеження h на $X_i \setminus U_1$ тривіальне і $h(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$.

Якщо $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ — ізоморфізм груп, то існує гомеоморфізм $F: X_1 \rightarrow X_2$, який індукує ϕ , тобто, такий що $F(g(x)) = \phi(g)(F(x))$ для всіх $x \in X_1$ і $g \in G_1$.

Лема 1. В групі $(G, T(G))$ стабілізатори рівнів збігаються із жорсткими стабілізаторами тих самих рівнів.

Доведення. Одразу випливає з визначення дії G на $T(G)$. $\square$

Наслідок 2. Група $(G, T(G))$ задовольняє умовам (1) та (2) Теорему 2.

Теорема 3. Нехай $\{G_1, \dots, G_n, H_1, \dots, H_m\} \subset \mathcal{W}_R$. Якщо $G = G_1 \times \dots \times G_n$ ізоморфна $H = H_1 \times \dots \times H_m$, то $n = m$ і для кожного i знайдеться таке j , що $G_i \cong H_j$.

Доведення. Нехай $\phi: G \rightarrow H$ — ізоморфізм, тоді за наслідком 2 він індукується деяким гомеоморфізмом

$$h: \bigsqcup_{i=1}^n \partial T(G_i) \rightarrow \bigsqcup_{j=1}^m \partial T(H_j).$$

Покажемо, що для такого h і кожного i ($1 \leq i \leq n$) існує таке j ($1 \leq j \leq m$), що

$$h(\partial T(G_i)) = \partial T(H_j). \quad (1)$$

Спочатку доведемо, що $\phi(G_i)$ є жорстким стабілізатором множини $h(\partial T(G_i))$ в групі H . Зрозуміло, що $\phi(G_i)$ є підгрупою жорсткого стабілізатора множини $h(\partial T(G_i))$. Але з іншого боку

$$h(\partial T(G_i)) \cap h(\partial T(G_j)) = \emptyset,$$

якщо $i \neq j$. Тому

$$\phi(G) = \bigoplus_{i=1}^n (\phi(G_i), h(\partial T(G_i))) = H. \quad (2)$$

Звідки і випливає необхідне.

Тепер припустимо, що для якогось i рівність (1) не виконується. Не обмежуючи загальності можна вважати, що $h(x_1) = y_1 \in \partial T(H_1)$, а $h(x_2) = y_2 \in \partial T(H_1)$ для деяких $x_1 \in \partial T(G_1), x_2 \in \partial T(G_2)$. Тобто $h(\partial T(G_1)) \cap \partial T(H_1) \neq \emptyset$ і $h(\partial T(G_1)) \cap \partial T(H_2) \neq \emptyset$.

Розглянемо таку вершину v першого рівня дерева $T(H_1)$, що $v \in y_1$. З розкладу (2) і нашого припущення випливає, що орбіта групи H , що містить v не містить $V_1(T(H_1))$ повністю. Зокрема, вершина зі шляху y_2 не міститься в цій орбіті. Але група H_1 діє транзитивно на вершинах першого рівня дерева $T(H_1)$. Одержали суперечність.

Отже, з 1 та 2, випливає, що $n = m$ та для кожного i знайдеться таке j , що $G_i \simeq H_j$. $\square$

Теорема 4. Групи G та H з $\mathcal{W}_R$ будуть ізоморфними тоді і лише тоді, коли дерева T_G та T_H будуть ізоморфними, як дерева з мітками.

Доведення. В один бік доведення очевидне.

В інший бік. Нехай групи G та H з $\mathcal{W}_R$ – ізоморфні.

Групи G та H розкладаються у вінець добутки $G = (G_0, X) \wr (G_1 \oplus \dots \oplus G_n)$, $H = (H_0, Y) \wr (H_1 \oplus \dots \oplus H_m)$. За теоремою Боднарчука (див. [3]) $G_0 \simeq H_0$, а також ізоморфні базисні підгрупи та $G_1 \oplus \dots \oplus G_n \simeq H_1 \oplus \dots \oplus H_m$. Звідси, застосовуючи теорему 3 до компонент вінець добутків та до базисних підгруп, одержимо, що $n = m$, для кожного i знайдеться таке j , що $G_i \simeq H_j$ та $|X| = |Y|$.

Залишилося довести, що $(G_0, X) \simeq (H_0, Y)$ як групи підстановок. За наслідком 2 існує гомеоморфізм h простору $\partial T(G)$ на $\partial T(H)$, який індукує ізоморфізм $\phi : G \rightarrow H$. Крім цього за теоремою Боднарчука при ізоморфізмі базисна підгрупа переходить у базисну підгрупу: $\phi(B(G)) = B(H)$. При цьому жорсткі стабілізатори вершин першого рівня дерева $T(G)$ переходять в жорсткі стабілізатори вершин першого рівня дерева $T(H)$ за теоремою 3 та її доведенням. Тому гомеоморфізм h задає бієктивне відображення $V_1(T(G)) \rightarrow V_1(T(H))$, яке в свою чергу індукує ізомор-

фізм груп $(G_0, X) \rightarrow (H_0, Y)$ як груп підстановок. (Що звісно ж збігається з ізоморфізмом $G/B(G) \rightarrow H/B(H)$.) $\square$

Висновки

Розглянуто вінець добутки груп підстановок за деревовидно впорядкованими множинами. Вказано точні дії таких груп автоморфізмами кореневих дерев. Наведено критерій ізоморфізму вінець добутків скінченних транзитивних нерозкладних у нетривіальні прямі та вінець добутки груп підстановок за локально скінченими деревовидно впорядкованими множинами без некореневих висячих вершин.

Список використаних джерел

1. Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Суцанский В.И. Автоматы, динамические системы и группы// Труды Математического института имени В.М.Стеклова, т.231, 2000, с.134-214.
2. Фейнберг В.З. Сплетения групп подстановок по частично упорядоченным множествам и фильтрам// Весті АН БССР, 1971, №6, с.28-38.
3. Боднарчук Ю.В. Об изоморфизме сплетений групп// УМЖ, 1994, т.46, №6, с.671-679.
4. V.Nekrashevych Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs, Vol.117, 231 pp., 2005.
5. M.Rubin On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms. Transactions of the AMS, Vol. 312, N.2. April 1989, 487-538.

Надійшла до редколегії 30.05.2007

УДК 512.544

Михайло М. Пискун

О применении некоторых теоретико-кольцевых понятий для систем подгрупп группы

Нехай G – група та S – деяка система підгруп G . Тоді S є частково впорядкованою множиною за включенням. Якщо впорядкована множина S має відхилення, то будемо говорити, що система S має вимірність Крулля. В даній роботі вивчаються групи, у яких система всіх підгруп, що не є майже нормальними, має вимірність Крулля.

Ключові слова: група, нормальна підгрупа, майже нормальна підгрупа, вимірність Крулля.

Введение

Подгруппа H группы G называется почти нормальной, если она имеет конечное множество сопряженных. Каждая такая подгруппа имеет нормализатор конечного индекса. Обозначим через $L_{an}(G)$ (соответственно $L_{non-an}(G)$) семейство всех почти нормальных подгрупп (соответственно подгрупп, которые не являются почти нормальными). В работе [1] Б. Нейман охарактеризовал группы, все подгруппы которых почти нормальны (т.е. группы, у которых $L_{non-an}(G) = \emptyset$) как группы, центр которых имеет конечный индекс. Позднее И.И. Еремин обобщил этот результат, показав, что группы, все абелевы подгруппы которых почти нормальны, также конечны над центром [2]. В другой работе [3] И.И. Еремин начал рассматривать группы, у которых все бесконечные подгруппы почти нормальны (т.е. семейство $L_{non-an}(G)$ состоит из конечных подгрупп). Описание локально почти разрешимых групп с этим свойством было завершено в работе Н.Н. Семко, С.С. Левищенко, Л.А. Курдаченко [4]. С этой работы начинается систематическое изучение групп, в которых система $L_{an}(G)$ «очень большая» или система $L_{non-an}(G)$ «очень маленькая». Мы не будем приводить здесь достаточно большой список работ, посвященных этим исследованиям, а только сошлемся на обзор [5], где эта тематика освещена достаточно подробно. Наша цель в этой статье – попытаться использовать эффективные понятия, возникающие в теории колец, для изучения влияния на строения групп важных ее естественных систем подгрупп, и в частности, систем $L_{an}(G)$ и

Mykhaylo M. Pyskun

On application of some theoretical-ring definitions for system of subgroups of groups

Let G be a group and let S be some family of subgroups of G . Then S is a partially ordered by inclusion. If a partially ordered set S has a deviation, then we will say that a family S has a Krull dimension. In this paper we study the groups, in which the family of all non almost normal subgroups has a Krull dimension.

Key Words: groups, normal subgroups, almost normal subgroups, Krull dimension.

$L_{non-an}(G)$. Теория колец была первой, где начались рассматриваться различные естественные ограничения на системы левых (соответственно правых) идеалов. Теория артиновых колец (т.е. колец с условием минимальности) и теория нетеровых колец (т.е. колец с условием максимальности) являются одними из наиболее развитых. В теории колец возникло много естественных и интересных обобщений артиновых и нетеровых колец. Одним из таких обобщений являются кольца, имеющие размерность Крулля.

Пусть A – частично упорядоченное множество. Для элементов $a, b \in A$ определим замкнутый интервал с концами a, b как подмножество

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}.$$

Определим отклонение $dev(A)$ частично упорядоченного множества A (см, например, [6, 6.1]) по следующему правилу.

Если на A задан тривиальный порядок, то полагаем $dev(A) = -\infty$.

Если порядок, заданный на A , нетривиален, но A удовлетворяет условию минимальности, то полагаем $dev(A) = 0$.

Для порядкового числа α определим $dev(A) = \alpha$ в случае, если $dev(A) \neq \beta < \alpha$ и для любой убывающей цепочки $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$ элементов множества A все, за исключением конечного множества замкнутых интервалов, $[a_n, a_{n-1}]$ имеют отклонение, строго меньшее чем α .

Будем говорить теперь, что частично упорядоченное множество A имеет отклонение, если найдется порядковое число α , для которого $dev(A) = \alpha$.

Образно говоря, отклонение частично упорядоченного множества показывает, насколько оно удалено от множеств с условием минимальности, в частности, от вполне упорядоченных множеств. Однако, частично упорядоченные множества, имеющие отклонение, можно рассматривать и как обобщение частично упорядоченных множеств с условием максимальности (см, например, [6, 6.1.8]).

Как уже отмечалось выше, понятие отклонения нашло полезные применения в теории колец и модулей, и само его возникновение связано с этой теорией. Напомним, что кольцо R имеет размерность Крулля, если упорядоченное по включению семейство всех его левых идеалов имеет отклонение. Это отклонение и называется размерностью Крулля кольца R и обозначается символом $K(R)$.

Пусть теперь G – группа и S – некоторое семейство подгрупп G . Мы можем рассматривать S как частично упорядоченное множество относительно теоретико-множественного включения. Поскольку в теории групп $[a, b]$ обозначает коммутатор элементов a, b , то для замкнутого интервала упорядоченного семейства S подгрупп с концами A, B мы будем использовать следующее обозначение: $[[A, B]]$, т.е. $[[A, B]] = \{C \mid C \in S \text{ и } A \leq C \leq B\}$.

Если частично упорядоченное семейство S имеет отклонение, то в этом случае будем говорить, что семейство S имеет размерность Крулля и будем понимать под этой размерностью отклонение частично упорядоченного семейства S и соответственно использовать для него следующее обозначение $K_S(G)$. Если v – некоторое теоретико групповое свойство и

$$S = \{H \mid H - \text{подгруппа группы } G \text{ имеющая свойство } v\},$$

то вместо $K_S(G)$ мы будем писать $K_v(G)$.

Напомним, что группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп семейства S , если для всякой убывающей последовательности

$$H_1 \geq H_2 \geq \dots \geq H_n \geq \dots$$

подгрупп семейства S найдется такой номер m , что индексы $|H_n : H_{n+1}|$ – конечны при $n \geq m$. В этом случае каждый замкнутый интервал $[[H_n, H_{n+1}]]$ конечен и, в частности, удовлетворяет условию минимальности. Таким образом, если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп семейства S , то семейство S имеет размерность Крулля, более того $K_S(G) \leq 1$. Следовательно, на этом пути мы

получаем обобщение не только обычного условия минимальности для S -подгрупп, но и слабого условия минимальности для S -подгрупп.

Теперь в качестве семейства S рассмотрим семейство $L_{\text{non-an}}(G)$ всех подгрупп группы G , которые не являются почти нормальными, и будем изучать группы, у которых это семейство имеет размерность Крулля. Соответствующую размерность будем обозначать через $K_{\text{non-an}}(G)$.

1 Некоторые предварительные результаты

Отметим сразу, что если в группе G семейство всех подгрупп, не являющихся почти нормальными, имеет размерность Крулля, то, очевидно, это же справедливо для любой подгруппы группы G и любой ее фактор-группы, а значит, и для любой ее секции. В дальнейшем мы будем пользоваться этим без всяких ссылок.

Пусть G – группа, H – ее подгруппа. Будем говорить, что H является *равномерным произведением подгрупп* H_λ , $\lambda \in \Lambda$, если выполняются следующие условия:

(U 1) $H_\lambda H_\mu = H_\mu H_\lambda$ для любой пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda$;

(U 2) $H_\lambda \cap \langle H_\mu \mid \mu \neq \lambda \rangle = \langle 1 \rangle$.

Если H – равномерное произведение подгрупп H_λ , $\lambda \in \Lambda$, то будем записывать это с помощью следующего символа $H = \text{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

Если M – подмножество Λ , то обозначим символом $H(M)$ подгруппу $\langle H_\lambda \mid \lambda \in M \rangle = \text{Un}_{\lambda \in M} H_\lambda$. Также обозначим через $\mathcal{L}_{\text{Un}}(H)$ семейство $\{H(M) \mid M \subseteq \Lambda\}$. Семейство $\mathcal{L}_{\text{Un}}(H)$ частично упорядочено по включению. Обозначим также через $[K, L]_{\text{Un}}$ замкнутый интервал упорядоченного по включению семейства $\mathcal{L}_{\text{Un}}(H)$.

1.1. Лемма. Пусть G – группа и пусть H – такая ее подгруппа, что $H = \text{Un}_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$. Если семейство $\mathcal{L}_{\text{Un}}(H)$ имеет отклонение, то множество индексов Λ – конечно.

Доказательство.

Предположим противное, пусть Λ – бесконечно. Пусть, далее, α – порядковое число, для которого $\text{dev}(\mathcal{L}_{\text{Un}}(H)) = \alpha$. Будем доказывать это утверждение, используя индукцию по числу α . Пусть сначала $\alpha = 0$. Из бесконечности множества Λ получаем существование бесконечной убывающей цепочки

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$$

бесконечных подмножеств Λ . Однако

существование такой цепочки влечет за собой существование бесконечной цепочки подгрупп

$$H \triangleleft \Lambda_1 \triangleleft H \triangleleft \Lambda_2 \triangleleft \dots \triangleleft H \triangleleft \Lambda_n \triangleleft \dots$$

С другой стороны, равенство $\text{dev}(\mathcal{L}_{U_n}(H)) = 0$ означает, что упорядоченное по включению множество $\mathcal{L}_{U_n}(H)$ удовлетворяет условию минимальности, и мы получаем противоречие, которое доказывает наше утверждение для случая $\text{dev}(\mathcal{L}_{U_n}(H)) = 0$.

Допустим теперь, что $\alpha > 0$ и наше утверждение доказано для всех порядковых чисел, строго меньших α . Используя бесконечность множества Λ , найдем в нем бесконечную убывающую цепочку

$$\Lambda_1 \supset \Lambda_2 \supset \dots \supset \Lambda_n \supset \dots$$

таких подмножеств Λ , что разности $M_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n+1}$ бесконечны при любом $n \in \mathbb{N}$. Снова приходим к бесконечной цепочке подгрупп

$$H \triangleleft \Lambda_1 \triangleleft H \triangleleft \Lambda_2 \triangleleft \dots \triangleleft H \triangleleft \Lambda_n \triangleleft \dots$$

Найдется такой номер $k \in \mathbb{N}$, что $\text{dev}([H \triangleleft \Lambda_n \triangleleft H \triangleleft \Lambda_{n+1}])_{U_n} < \alpha$ для всех $n \geq k$. Однако $H \triangleleft \Lambda_n = H \triangleleft M_n \triangleleft H \triangleleft \Lambda_{n+1}$ и $H \triangleleft M_n \cap H \triangleleft \Lambda_{n+1} = \langle 1 \rangle$. Нетрудно показать, что упорядоченные по включению множества $[H \triangleleft \Lambda_n \triangleleft H \triangleleft \Lambda_{n+1}]_{U_n}$ и $\mathcal{L}_{U_n}(H \triangleleft M_n)$ изоморфны. Отсюда вытекает, что $\mathcal{L}_{U_n}(H \triangleleft M_n)$ имеет отклонение и $\text{dev}(\mathcal{L}_{U_n}(H \triangleleft M_n)) < \alpha$. Ввиду индуктивного допущения это означает, что подмножество M_n должно быть конечным для $n \geq k$. Это последнее противоречие и доказывает результат. $\square$

1.2. Лемма. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H – подгруппы G , удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) L – нормальная подгруппа K ;
- (ii) $H \cap K \leq L$;
- (iii) $K/L = \prod_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ – H -инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$ в частности, подгруппы K, L – H -инвариантны;
- (iv) множество индексов Λ – бесконечно.

Тогда подгруппа HL – почти нормальна в G .

Доказательство.

Бесконечность множества Λ влечет существование таких бесконечных подмножеств Δ, Σ из Λ , что $\Delta \cap \Sigma = \emptyset$, $\Delta \cup \Sigma = \Lambda$. Допустим, что подгруппа $H \triangleleft K \triangleleft M$ не почти нормальна в G для всякого бесконечного подмножества $M \subseteq \Delta$. Отсюда вытекает, что упорядоченное по включению семейство подгрупп $\{H \triangleleft K \triangleleft M \mid M \subseteq \Delta\}$ имеет

отклонение. Нетрудно убедиться в том, что это упорядоченное множество изоморфно упорядоченному множеству $\mathcal{L}_{U_n}(K \triangleleft \Delta/L)$ (отметим, что $K \triangleleft \Delta/L = \prod_{\lambda \in \Delta} K_\lambda/L$, а прямое произведение является частным случаем равномерного произведения). Отсюда вытекает, что упорядоченное множество $\mathcal{L}_{U_n}(K \triangleleft \Delta/L)$ имеет отклонение. Ввиду леммы 1.1 это влечет конечность подмножества Δ , и мы получаем противоречие с его выбором. Полученное противоречие показывает, что существует бесконечное подмножество $M \subseteq \Delta$, для которого $H \triangleleft K \triangleleft M$ почти нормальна в G . Аналогичные рассуждения показывают, что Σ включает в себя бесконечное подмножество Γ , для которого $H \triangleleft K \triangleleft \Gamma$ почти нормальна в G . Из нашего выбора подмножеств Δ, Σ получаем равенство $HL = H \triangleleft K \triangleleft M \cap H \triangleleft K \triangleleft \Gamma$. Так как пересечение двух почти нормальных подгрупп является почти нормальной подгруппой, то HL – почти нормальна в G . $\square$

1.3. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H – подгруппы G , удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) L – нормальная подгруппа K ;
- (ii) $K/L = \prod_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ – H -инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$, в частности, подгруппы K, L – H -инвариантны;
- (iii) подмножество $\Lambda \setminus \text{Supp}(HL/L \cap K/L)$ – бесконечно.

Тогда подгруппа HL – почти нормальна в G .

1.4. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Предположим, что L, K, H – подгруппы G , удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) L – нормальная подгруппа K ;
- (ii) $K/L = \prod_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$, K_λ – H -инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$, в частности, подгруппы K, L – H -инвариантны;
- (iii) множество индексов Λ – бесконечно.

Тогда для любого элемента $h \in H$ подгруппа $\langle h \rangle L$ – почти нормальна в G .

Если G – группа, x – ее элемент, то через x^G обозначим класс элементов, сопряженных с x , т.е. подмножество $\{g^{-1} x g \mid g \in G\}$. Положим $\text{FC}(G) = \{x \in G \mid x^G \text{ – конечно}\}$. Нетрудно убедиться в том, что $\text{FC}(G)$ – характеристическая подгруппа группы G . Ее называют **FC-центром** группы G .

1.5. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Предположим,

что K, H – подгруппы G удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ где K_λ – неединичная H -инвариантная подгруппа для всех $\lambda \in \Lambda$;

(ii) множество индексов Λ – бесконечно.

Тогда $H \leq FC(G)$.

1.6. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если K – такая подгруппа группы G , что $K = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ где подгруппы K_λ – неединичны для всех $\lambda \in \Lambda$ и множество индексов Λ – бесконечно, то $K \leq FC(G)$.

1.7. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Предположим, что L, K – подгруппы G , удовлетворяющие следующим условиям:

(i) L – нормальная подгруппа K ;

(ii) $K/L = \times_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda/L$, где $K_\lambda \neq L$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

(iii) подмножество Λ – бесконечно.

Тогда подгруппы K, L – почти нормальны в G .

2 Абелевы секции групп, у которых семейство подгрупп, не являющихся почти нормальными, имеет размерность Крулля

2.1. Лемма. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если подгруппа H не почти нормальна в G , то фактор-группа $H/[H, H]$ – минимаксна.

Доказательство. Выберем в абелевой группе $H/[H, H]$ такую свободную абелеву подгруппу $F/[H, H]$, что фактор-группа H/F будет периодической. Из следствия 1.7 вытекает, что множество $\Pi(H/F)$ должно быть конечным. Пусть $F/[H, H] = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, где C_λ – бесконечная циклическая группа для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть теперь p – простое число, не принадлежащее множеству $\Pi(H/F)$. Имеем $D/[H, H] = (F/[H, H])^p = \times_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^p$. Если предположить теперь, что множество индексов Λ – бесконечно, то фактор-группа F/D будет бесконечной элементарной абелевой p -группой. Из выбора простого числа p получаем, что F/D – силовская p -подгруппа H/D , так что $H/D = F/D \times Q/D$, где Q/D – силовская p' -подгруппа H/D . Тогда $H/Q \cong (H/D)(Q/D) \cong F/D$ является бесконечной элементарной абелевой p -группой. Но в этом случае следствие 1.7 показывает, что подгруппа H должна быть почти нормальной. Полученное противоречие показывает, что множество индексов Λ – конечно, а значит, фактор-группа $F/[H, H]$ будет конечно порожденной.

Пусть $\tau \in \Pi(H/F)$ и R/F – силовская τ -подгруппа H/F . Поскольку R/F изоморфна

некоторой фактор-группе H , то, применяя снова следствие 1.7, получим, что фактор-группа $(R/F)/(R/F)^p$ должна быть конечной. В свою очередь, это означает, что $R/F = K/F \times C/F$, где подгруппа K/F – конечна, а C/F – делима (см. [7, лемма 3]). Отсюда вытекает, что H имеет делимую τ -фактор-группу, изоморфную C/F . Эта фактор-группа будет прямым произведением квазициклических τ -групп (см., например, [8, теорема 23.1]). Принимая во внимание следствие 1.7, получим, что число этих квазициклических множителей должно быть конечным. Это означает, что подгруппа C/F будет черниковской. Из конечности K/F получаем, что и R/F – черниковская. Поскольку это справедливо для любой силовской подгруппы H/F и, как мы видели выше, множество $\Pi(H/F)$ – конечно, то и вся фактор-группа H/F будет черниковской. Таким образом, абелева группа $H/[H, H]$ является расширением конечно порожденной подгруппы $F/[H, H]$ с помощью черниковской группы H/F . Это и значит, что $H/[H, H]$ – минимаксна. $\square$

2.2. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если абелева подгруппа H не почти нормальна в G , то H – минимаксна.

2.3. Лемма. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если H – подгруппа группы G , для которой существует H -инвариантная бесконечная элементарная абелева p -подгруппа A , то $H \leq FC(G)$.

Доказательство. Пусть h – произвольный элемент подгруппы H . Из следствия 1.7 вытекает, что всякая подгруппа A почти нормальна в G . Пусть $1 \neq a_1 \in A$. Так как $\langle a_1 \rangle$ – почти нормальна в G , то множество $\{ \langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle \}$ должно быть конечным. Это влечет за собой конечность подгруппы $A_1 = \langle \langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle \rangle$. Поскольку A – H -инвариантна, то $A_1 \leq A$. Заметим, что всякая подгруппа A дополняема в ней, так что $A = A_1 \times B_1$ для некоторой подгруппы B_1 . Как мы уже отмечали, подгруппа B_1 также почти нормальна, в частности, множество $\{ B_1^x \mid x \in \langle h \rangle \}$ будет конечным. Положим

$$\{ B_1^x \mid x \in \langle h \rangle \} = \{ C_1, C_2, \dots, C_m \}, C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m.$$

Изоморфизм $A/B_1 \cong A^x/B_1^x = A/B_1^x$ показывает, что каждая из подгрупп A/B_1^x , $x \in \langle h \rangle$, имеет в A конечный индекс. Отсюда следует, ввиду конечности множества $\{ B_1^x \mid x \in \langle h \rangle \}$, что и подгруппа C имеет в A конечный индекс. Из выбора C получаем, что она $\langle h \rangle$ -

инвариантна. Из включения $C \leq B_1$ получаем равенство $C \cap A_1 = \langle 1 \rangle$.

Пусть $1 \neq a_2 \in C$. Как и ранее, $\langle a_2 \rangle$ — почти нормальна в G , поэтому множество $\{\langle a_2 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle\}$ конечно. Это влечет за собой конечность подгруппы $A_2 = \langle \langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle \rangle$. Поскольку $a_2 \in C$, то из инвариантности C и равенства $C \cap A_1 = \langle 1 \rangle$ получаем, что $A_1 \cap A_2 = \langle 1 \rangle$. Имеем теперь $A = A_1 A_2 \times B_2$ для некоторой подгруппы B_2 . Как и выше подгруппа $E = \bigcap_{x \in \langle h \rangle} B_2^x$ имеет конечный индекс в A и является $\langle h \rangle$ -инвариантной. Из включения $E \leq B_2$ получаем равенство $E \cap A_1 A_2 = \langle 1 \rangle$.

Используя аналогичные рассуждения, построим такое бесконечное семейство $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ конечных $\langle h \rangle$ -инвариантных подгрупп, что $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \bigtimes_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Из следствия 1.5 получаем включение $h \in FC(G)$. Так как оно имеет место для любого элемента $h \in H$, то $H \leq FC(G)$. $\square$

2.4. Следствие. Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если G включает в себя бесконечную нормальную элементарную абелеву p -подгруппу, то G — FC-группа.

2.5. Лемма. Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если H — подгруппа группы G , для которой существует H -инвариантная свободная абелева подгруппа F бесконечного ранга, то $H \leq FC(G)$.

Доказательство. Имеем $F = \bigtimes_{\lambda \in \Lambda} C_{\lambda}$, где C_{λ} — бесконечная циклическая группа для любого $\lambda \in \Lambda$. Пусть h — произвольный элемент подгруппы H . Пусть $1 \neq a_1 \in F$. Из следствия 1.6 вытекает, что подгруппа $\langle a_1 \rangle$ — почти нормальна в G . Поэтому множество $\{\langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle\}$ должно быть конечным. Это влечет за собой конечную порожденность подгруппы $A_1 = \langle \langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle \rangle$. Поскольку A — H -инвариантна, то $A_1 \leq A$. Так как подгруппа A_1 конечно порождена, то подмножество $\text{Supp}(A_1)$, а значит, разность $M = \Lambda \setminus \text{Supp}(A_1)$ будет бесконечной. Положим $B_1 = \bigtimes_{\lambda \in M} C_{\lambda}$, тогда $A_1 \cap B_1 = \langle 1 \rangle$ и F/B_1 — конечно порожденная свободная абелева группа. В частности, подгруппа B_1 не может быть минимаксной, а потому почти нормальна в G ввиду следствия 2.2. В частности, множество $\{B_1^x \mid x \in \langle h \rangle\}$ будет конечным. Положим

$$\{B_1^x \mid x \in \langle h \rangle\} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}, \quad V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m.$$

Изоморфизм $A/B_1 \cong A^x/B_1^x = A/B_1^x$

показывает, что каждая из фактор-групп A/B_1^x , $x \in \langle h \rangle$, является конечно порожденной свободной абелевой. Из теоремы Рэмака получаем вложение $A/V \hookrightarrow A/V_1 \times A/V_2 \times \dots \times A/V_m$. Отсюда следует, что A/V является конечно порожденной свободной абелевой группой, а значит, подгруппа V является свободной абелевой подгруппой бесконечного ранга. Из выбора V получаем, что она $\langle h \rangle$ -инвариантна. Из включения $V \leq B_1$ получаем равенство $V \cap A_1 = \langle 1 \rangle$.

Пусть $1 \neq a_2 \in V$. Как и ранее, $\langle a_2 \rangle$ — почти нормальна в G , поэтому множество $\{\langle a_2 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle\}$ конечно. Это влечет за собой конечную порожденность подгруппы $A_2 = \langle \langle a_1 \rangle^x \mid x \in \langle h \rangle \rangle$. Поскольку $a_2 \in V$, то из $\langle h \rangle$ -инвариантности V и равенства $V \cap A_1 = \langle 1 \rangle$ получаем, что $A_1 \cap A_2 = \langle 1 \rangle$. Так как $A_1 A_2$ — конечно порождена, то повторяя дословно рассуждения, которые проводились выше, выделим в A такую $\langle h \rangle$ -инвариантную свободную абелеву подгруппу E бесконечного ранга, что $E \cap A_1 A_2 = \langle 1 \rangle$.

Используя и далее аналогичные рассуждения, построим такое бесконечное семейство $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ конечных $\langle h \rangle$ -инвариантных подгрупп, что $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \bigtimes_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Из следствия 1.5 получаем включение $h \in FC(G)$. Так как оно имеет место для любого элемента $h \in H$, то $H \leq FC(G)$. $\square$

2.6. Следствие. Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если G включает в себя нормальную свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга, то G — FC-группа.

3 Строение групп, у которых семейство подгрупп, не являющихся почти нормальными, имеет размерность Крулля

3.1. Лемма. Пусть G — группа, для которой $K_{\text{non-abelian}}(G)$ существует. Если G — FC-группа, то G — конечна над центром.

Доказательство. Пусть A — произвольная абелева подгруппа G . Если A не является минимаксной, то из следствия 2.2 вытекает, что A почти нормальна в G . Допустим теперь, что A — минимаксная подгруппа. Положим $B = A \cap \zeta(G)$. Ввиду теоремы Р. Бэра (см., например, [9, теорема 1.4]), фактор-группа $G/\zeta(G)$ будет периодической. Это означает, что A/B — черниковская группа. Очевидно $N_{G/B}(A/B) = N_G(A)/B$, поэтому достаточно показать, что A/B — почти нормальная подгруппа G/B . Обозначим через D/B максимальную делимую подгруппу A/B . Так как G — FC-группа, то ее центр

включает в себя всякую делимую подгруппу (см., например, [9, теорема 1.9]), так что $D/B \leq \zeta(G/B)$. Подгруппа D/B имеет в A/B конечный индекс, поэтому существует конечная подгруппа K/B , для которой $A/B = (D/B)(K/B)$. Включение $D/B \leq \zeta(G/B)$ показывает, что $N_{G/B}(K/B) \leq N_{G/B}(A/B)$. Остается заметить, что поскольку G – FC-группа, то всякая ее конечно порожденная подгруппа почти нормальна, так что индекс $|G/B : N_{G/B}(K/B)|$ конечен, а значит, и подгруппа $N_{G/B}(A/B)$ имеет в G/B конечный индекс. Таким образом, мы видим, что всякая абелева подгруппа почти нормальна в G . По теореме И.И. Еремина [2] группа G имеет центр конечного индекса. $\square$

3.2. Лемма. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-ep}}(G)$ существует. Если G включает в себя бесконечную элементарную абелеву p -подгруппу для некоторого простого числа p , то G – конечна над центром.

Доказательство. Пусть A – бесконечная элементарная абелева p -подгруппа G . Из следствия 2.2 вытекает, что A почти нормальна в G . Пусть $K = N_G(A)$. Из следствия 2.4 получаем, что K – FC-группа, а лемма 3.1 показывает, что K – конечна над центром. Поскольку индекс $|G : K|$ – конечен, то G – почти абелева группа. Пусть L – нормальная в G абелева подгруппа конечного индекса и обозначим через P ее силовскую p -подгруппу. Конечность G/L влечет конечность $A/(A \cap L)$, а это означает, что пересечение $A \cap L$ – бесконечно. Поскольку последняя подгруппа входит в нижний слой S подгруппы P , то и S – бесконечна. Очевидно, S – нормальна в G . Применяя снова следствие 2.4 и лемму 3.1, получаем, что G – конечна над центром. $\square$

3.3. Следствие. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-ep}}(G)$ существует. Если G включает в себя периодическую абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то G – конечна над центром.

3.4. Лемма. Пусть G – группа, для которой $K_{\text{non-ep}}(G)$ существует. Если G включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга, то G – конечна над центром.

Доказательство. Пусть F – свободная абелева подгруппа бесконечного ранга. Из следствия 2.2 вытекает, что F почти нормальна в G . Пусть $K = N_G(F)$. Из следствия 2.6 получаем, что K – FC-группа, а лемма 3.1 показывает, что K – конечна над центром. Поскольку индекс $|G : K|$ – конечен, то G – почти абелева группа. Пусть L – нормальная в G

абелева подгруппа конечного индекса и обозначим через T ее максимальную периодическую подгруппу. Если T не является черниковской, то G – конечна над центром ввиду следствия 3.3. Поэтому рассмотрим случай, когда T – черниковская подгруппа. Конечность G/L влечет конечность $F/(F \cap L)$, а это означает, что пересечение $F \cap L$ является свободной абелевой подгруппой бесконечного ранга. Таким образом, $r_0(L)$ – бесконечен. Пусть U – такая свободная абелева подгруппа L , для которой L/U – периодическая. Ввиду бесконечности $r_0(L)$, $r_0(U)$ также бесконечен. В частности, U – не минимаксна, а значит, почти нормальна в G ввиду следствия 2.2. В частности, множество $\{U^x \mid x \in G\}$ будет конечным. Положим

$$\{U^x \mid x \in G\} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}, V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m.$$

Изоморфизм $L/U \cong L^x/U^x = L/U^x$ показывает, что каждая из фактор-групп L/U^x , $x \in G$, является периодической группой. Из теоремы Рэмака получаем вложение $L/V \hookrightarrow L/V_1 \times L/V_2 \times \dots \times L/V_m$. Отсюда следует, что A/V также является периодической группой, а значит, подгруппа V является свободной абелевой подгруппой бесконечного ранга. Из выбора V получаем, что она нормальна в G . Применяя теперь следствие 2.6 и лемму 3.1, получаем, что G – конечна над центром. $\square$

Группу G назовем *обобщенно радикальной*, если она обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп, факторы которого либо локально нильпотентны, либо локально конечны.

3.5. Теорема. Пусть G – обобщенно радикальная группа. Если система ее подгрупп, не являющихся почти нормальными, имеет размерность Крулля, то либо центр группы G имеет конечный индекс, либо G – почти разрешимая A_3 -группа.

Доказательство. Предположим, что центр группы G имеет бесконечный индекс. Пусть A – произвольная абелева подгруппа G и T – максимальная периодическая подгруппа A . Если T не является черниковской, то из следствия 3.3 получаем, что G – конечна над центром. Полученное противоречие показывает, что T – черниковская подгруппа. Допустим, что $r_0(A)$ – бесконечен. В этом случае A включает в себя свободную абелеву подгруппу бесконечного ранга. Из леммы 3.4 снова вытекает, что G – конечна над центром, и снова получаем противоречие. Это противоречие показывает, что $r_0(A)$ – конечен. Но это означает, что A – абелева A_3 -группа.

Пусть R – максимальная нормальная радикальная подгруппа G . Из основного результата работы В.С. Чарина [10] получаем, что R – разрешимая A_3 -группа. Пусть L/R – максимальная нормальная локально конечная подгруппа G/R . Если L/R включает в себя абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то из следствия 3.3 получаем, что G/R – конечна над центром. Ввиду выбора подгрупп L , R , G/R – конечна, и все доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда все абелевы подгруппы L/R будут черниковскими. В этом случае L/R также является черниковской [11, теорема 5.8]. Опять ввиду выбора подгрупп L , R , L/R – конечна. Предположим, что G/R – бесконечна и обозначим через U/L локально нильпотентный радикал G/L . Это означает, что U/L – локально нильпотентная подгруппа без кручения. Конечность L/R влечет конечность индекса $(G/R)/C_{G/R}(L/R)$. Отсюда вытекает, что $(U/R) \cap C_{G/R}(L/R) = V/R \neq \langle 1 \rangle$. Так как G/R не включает в себя нормальных локально нильпотентных подгрупп, то $(L/R) \cap C_{G/R}(L/R) = \langle 1 \rangle$. Однако в этом случае $V/R \cong (V/R)/(V/R \cap L/R) \cong (V/R)(L/R)/(L/R) \cong VL/L \leq U/L$. Это показывает, что V/R – неединичная нормальная локально нильпотентная подгруппа G/R , что противоречит выбору подгруппы R . Полученное противоречие доказывает конечность G/R , а с этим и всю теорему. $\square$

Случай почти разрешимая A_3 -группа требует отдельного рассмотрения. Такого рода ситуации возникают довольно часто и при рассмотрении других вопросов, связанных с рассмотрением системы почти нормальных подгрупп.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н.Н. Семко за постановку задачи, постоянное внимание и помощь при ее решении.

Список использованной литературы

1. Neumann B.H. *Groups with finite classes of conjugate subgroups* // Math. Z. – 1955. – 63, № 1. – P. 76 – 96.
2. Еремин И.И. *Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп* // Мат. сб. – 1959. – 47, № 1. – С. 45 – 54.
3. Еремин И.И. *Группы с конечными классами сопряженных бесконечных подгрупп* // Уч. зап. Пермского ун-та. – 1960. – 17, № 2. – С. 13 – 14.
4. Семко Н.Н., Левищенко С.С., Курдаченко Л.А. *О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 10. – С. 57 – 63.
5. Артемович О.Д., Курдаченко Л.А. *Групи багаті на X -підгрупи* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – 61. – С. 218 – 237.
6. McConnell J.C., Robson J.C. *Noncommutative noetherian rings*. – New York: Wiley, 1987. – 597 p.
7. Курдаченко Л.А. *Непериодические FC-группы и связанные с ними классы локально нормальных групп и абелевых групп без кручения* // Сиб. мат. журн. – 1986. – 27, № 2. – С. 104 – 116.
8. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы: в 2 т.* – М.: Мир, 1974. – Т.1. – 336 с.
9. Tomkinson M.J. *FC-groups*. – Boston: Pitman, 1984. – 171 p.
10. Чарин В.С. *О разрешимых группах типа A_3* // Мат. сб. – 1961. – 54, № 3. – С. 489 – 499.
11. Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F. *Locally finite groups*. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.

Надійшла до редколегії 28.03.2007

також відповідні послідовності $\bar{u}(x) = \{u^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($x \in X$). При цьому регулярна матриця $A = ((a_{nk}))$ є абсолютно транслятивною, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0$ [2].

Лема 2. Якщо $A = ((a_{nk}))$ – додатна регулярна абсолютно транслятивна матриця і для деякої послідовності $\bar{u}(x)$ ядро $K(A(\bar{u}(x))) \neq \emptyset$, то ядро $K(\bar{u}(x))$ містить нерухому точку оператора u .

Тому що для будь-якої преднорми p простору X

$$p(u(y_n) - y_n) = p\left(\sum_{i=m_n}^{p_n} \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{n,k} - a_{n,k+1}) u^{k+1}(x)\right) - a_{n,1} u(x)\right) \leq \sum_{i=m_n}^{p_n} \lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| p(u^{k+1}(x)) + a_{n,1} p(u(x)),$$

то в силу обмеженості послідовності $\{p(u^n(x))\}_{n=1}^{\infty}$, регулярності і абсолютної транслятивності матриці A , з останньої нерівності випливає $p(u(y_n) - y_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Звідси, одержуємо, що x_0 – нерухома точка оператора. Оскільки A – додатна матриця, то, використовуючи лему 1, одержимо $x_0 \in K(\bar{u}(x))$, що й було потрібно довести.

3 Ергодичні теореми

Позначимо через X_0 , X_1 , $\bar{X}_1$ відповідно ядро, образ і замикання образу оператора $I - u$, а через $\lim A(\bar{u}(x))$ – наступну границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(x).$$

Теорема 1. Якщо $A = ((a_{nk}))$ – додатна регулярна абсолютно транслятивна матриця й для будь-якого $x \in X$ ядро $K(A(\bar{u}(x))) \neq \emptyset$, то X є топологічною прямою сумою підпросторів X_0 і $\bar{X}_1$, а для проектування π простору X на X_0 паралельно $\bar{X}_1$ виконується рівність $\pi(x) = \lim A(\bar{u}(x))$ ($x \in X$).

Доведення. Нехай виконані умови теореми. Тоді відповідно до леми 2 у ядрі $K(\bar{u}(x))$ існує

нерухома точка x_0 оператора u . Якщо тепер послідовність опуклих лінійних комбінацій $z_n = \sum_{k=s_n}^{t_n} \alpha_k u^k(x)$ ($s_{n+1} > t_n$, $n \in N$) збігається до x_0 , то різниця

$$x - z_n = \sum_{k=s_n}^{t_n} \alpha_k (x - u^k(x)) = \sum_{k=s_n}^{t_n} \alpha_k (I - u) \sum_{i=0}^{k-1} u^i(x),$$

яка очевидно належить підпростору X_1 , збігається до $x - x_0 \in \bar{X}_1$.

Для будь-якої преднорми p простору X й кожного $y = z - u(z) \in X_1$ ($z \in X$) з нерівності

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(y)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| p(u^{k+1}(z)) + a_{n,1} p(u(z)),$$

регулярності й абсолютної транслятивності матриці A випливає, що $A(\bar{u}(y))$ – збіжна до нуля послідовність. Використовуючи рівностепенну неперервність сімейства $\{u^n / n \in N\}$, для будь-якої преднорми p й $\varepsilon > 0$ виберемо преднорму p_1 й $\delta > 0$ такі, що з нерівності $p_1(x) < \delta$ випливає $p(u^n(x)) < \varepsilon$ ($x \in X$, $n \in N$). Тоді для будь-якого $y' \in \bar{X}_1$, вибравши $y \in X_1$ так, що б $p_1(y - y') < \delta$, одержимо

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(y')\right) \leq p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(y)\right) + p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(y' - y)\right) \leq p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^k(y)\right) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}.$$

З останньої нерівності, регулярності матриці A й збіжності до нуля послідовності $A(\bar{u}(y))$ випливає збіжність до нуля послідовності $A(\bar{u}(y'))$.

З іншого боку, якщо $z \in X_0$, $z \neq 0$, то з регулярності матриці A випливає збіжність послідовності $A(\bar{u}(z))$ до точки z . Таким чином, $X_0 \cap \bar{X}_1 = \{0\}$ і з рівності $x = (x - x_0) + x_0$ одержимо, що X є алгебраїчною прямою сумою підпросторів X_0 і $\bar{X}_1$, а послідовність $A(\bar{u}(x))$ збіжна до $x_0 = \pi(x)$. Тепер з рівностепенної не-

неперервності сімейства $\{u^n / n \in N\}$ впливає неперервність оператора проектування $\pi: X \rightarrow X_0$ й топологічність прямої суми $X = X_0 + \bar{X}_1$. Теорема доведена.

Зауваження 1. Аналогічна теорема справедлива, якщо замінити вимогу рівностепенної неперервності сімейства $\{u^n / n \in N\}$ на рівностепенну неперервність сімейства $\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u^n / n \in N \right\}$

й виконання умови $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_{nk+1}) u^k(x) = 0$

($x \in X$).

Зауваження 2. У [3] наведена ергодична теорема з матрицею A середніх арифметичних із заміною умови $K(A(\bar{u}(x))) \neq \emptyset$ на більш сильне (слабка компактність послідовності $A(\bar{u}(x))$).

Нехай тепер на лінійному просторі обмежених послідовностей $\bar{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$, топологія визначається сімейством преднорм $\bar{p}(\bar{x}) = \sup_n p(x_n)$, де p – преднорма простору X . Припустимо також, що на цьому просторі заданий лінійний регулярний оператор A (тобто перетворюючий будь-яку збіжну послідовність $\bar{x}$ у збіжну послідовність $A(\bar{x}) = \{A_n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ зі збереженням границі послідовності $\bar{x}$) і оператор зрушення S , визначений рівністю $S(\bar{x}) = \{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Тоді оператор A назовемо (за аналогією з матрицею) абсолютно транслятивним, якщо $A(\bar{x} - S(\bar{x}))$ є збіжною до нуля послідовністю для кожної $\bar{x}$. Має місце наступне твердження.

Теорема 2. Якщо A – неперервний регулярний абсолютно транслятивний оператор і для будь-якого $x \in X$ ядро $K(\bar{u}(x))$ слабо бікомпактно, то справедливі твердження теореми 1.

Доведення. Нехай $K(\bar{u}(x))$ слабо бікомпактно й y – довільна точка цього ядра. Тоді для послідовності точок

$$z_n = \sum_{k=m_n}^{p_n} \alpha_k u^k(x)$$

$\left(\sum_{k=m_n}^{p_n} \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, n \in N \right)$, збіжної до y , в силу

неперервності оператора u сума $\sum_{k=m_n}^{p_n} \alpha_k u^{k+1}(x)$

збігається до $u(y) \in K(\bar{u}(x))$. Таким чином, ядро $K(\bar{u}(x))$ інваріантне відносно оператора u і згідно теореми Шаудера [3] в ядрі існує нерухома точка x_0 оператора u .

Як і при доведенні теореми 1 встановлюємо, що $x - x_0 \in \bar{X}_1$. Оскільки для будь-якого $y = z - u(z)$ маємо $A(\bar{u}(y)) = A(\bar{u}(z) - S(\bar{u}(z)))$ й A – абсолютно транслятивний оператор, то послідовність $A(\bar{u}(y))$ збігається до 0. Якщо $y' \in \bar{X}_1$, то, використовуючи неперервність операторів A і u , для будь-яких $\varepsilon > 0$ і p знайдемо p_1 й δ так, що б з нерівності $p_1(x < \delta)$ випливало $\bar{p}(A(\bar{u}(x))) < \varepsilon$ ($x \in X$). Тоді вибравши $y \in X_1$ так, щоб $p_1(y - y') < \delta$, для кожного $n \in N$ одержимо $p(A_n(\bar{u}(y'))) \leq p(A_n(\bar{u}(y))) + \varepsilon$.

З останньої нерівності й збіжності до нуля послідовності $A(\bar{u}(y))$ випливає збіжність до 0 послідовності $A(\bar{u}(y'))$. Після цього доведення завершується як і в теоремі 1.

Зауваження. Умови теореми виконуються зокрема для слабо компактного оператора u , що діє в банаховому просторі X . Отже, у цьому випадку ергодична теорема має місце навіть для регулярної абсолютно транслятивної матриці A , яка не є додатною.

Література

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц. "Линейные операторы. Общая теория" // Иностранная литература, М. – 1962 – 895с.
2. Р. Кук. "Бесконечные матрицы и пространства последовательностей" // физ-мат. лит. М. – 1960 – 471с.
3. Р. Эдвардс. "Функциональный анализ. Теория и приложения" // Мир, М. – 1969 – 1071с.

Надійшла до редколегії 15.12.2006

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Додатковий зміст:

Розв'язання задач диференціальних
рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

де $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x, y)$ — векторна функція, що
визначена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ і задовольняє умови
Ліпшиця. За теоремою Пікара-Лемані
існує розв'язок при $x \in [x_0, x_0 + \delta]$.

Важко відзначити, що розв'язок
існує на всій області $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, якщо
функція $f(x, y)$ задовольняє умови
Ліпшиця на всій області.

УДК 517

Фарход А. Асроров, к.ф.-м.н.,
Тошмухаммад Ж.Аззамов, старший викладач,
Володимир Я.Данілов, к.ф.-м.н., доцент.

Експоненційна стійкість інтегральної множини

Досліджується експоненційна стійкість інтегральної множини нелінійної системи диференціальних рівнянь.

Ключові слова: інтегральна множина, експоненційна стійкість, нелінійна система.

*E-mail: farhod@univ.kiev.ua

(Представлено Перестюком М.О.)

Вступ

Основним об'єктом математичної теорії багаточастотних коливань є інваріантний тороїдальний багатовид. У монографії [1] досліджується ряд важливих питань, пов'язаних з існуванням інваріантних тороїдальних багатовидів лінійних систем, збуренням таких багатовидів для нелінійних систем, існування гладкості та їх стійкості. Роботи [2-5] присвячені питанням існування інтегральних множин нелінійних неавтономних систем та необхідним умовам існування інтегральної множини лінійної системи з довільною неоднорідністю. У даній статті вивчається експоненційна стійкість інтегральної множини нелінійної системи диференціальних рівнянь.

Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi, x), \quad \frac{dx}{dt} = F(t, \varphi, x), \quad (1)$$

у якій $t \in R, x \in R^n, a(t, \varphi, x), F(t, \varphi, x)$ – неперервні по t і задовольняють умові Ліпшица по φ , відповідно векторні і матрична функції, 2π -періодичні по $\varphi_v, v = \overline{1, m}$, обмежені при $t \in R, \varphi \in \mathfrak{T}_m$.

Нехай система (1) має інтегральну множину

$$x = u(t, \varphi), t \in R, \varphi \in \mathfrak{T}_m, u \in C(R \times \mathfrak{T}_m), \quad (2)$$

яка належить області

F. A. Asrorov, C.Sci(Phys-Math.),
T. G. Azzamov, senior teacher,
V. Ja. Danilov, C.Sci(Phys-Math.), Ass.Prof.

Exponential stability of integral set

The exponential stability of integral set for nonlinear system of differential equations is investigated.

Key words: exponential stability, integral set, nonlinear system.

$$\|x\| \leq d, \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathfrak{T}_m, \quad (3)$$

разом з деяким її оточенням. Позначимо через φ_1, x_1 розв'язок системи (1), що набуває при $t = 0$ відповідно значень φ_0, x_0 .

Покладемо

$$d_1 = \min_{\varphi \in \mathfrak{T}_m} \left[\|\varphi_1 - \varphi\|_{\mathfrak{T}_m}^2 + \|x_1 - u(t, \varphi)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

де через $\|\psi\|_{\mathfrak{T}_m}$ позначено евклідову довжину вектора ψ на торі $\mathfrak{T}_m: \|\psi\|_{\mathfrak{T}_m} = \min \|\psi \bmod 2\pi\|$.

У прямому добутку m -мірного тора $\mathfrak{T}_m$ на n -мірний евклідів простір E^n (n -число компонент вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$), функція d_1 задає відстань від точки (φ_1, x_1) до множини (2). За допомогою цієї відстані звичайним чином визначається стійкість, асимптотична стійкість і нестійкість множини (2) як інтегральної множини системи (1).

Інтегральну множину (2) системи рівнянь (1) будемо називати експоненційно стійкою, якщо вона стійка й існує $\delta_0 > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку φ_1, x_1 , що задовольняє умові $d_0 < \delta_0$, виконується нерівність

$$d_1 \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} d_\tau, \quad t \geq \tau, \quad (5)$$

де K и γ -додатні сталі, що не залежать від τ і d_0 . τ -довільне число півосі $R^+ = [0, +\infty)$. З означення ясно, що експоненційна стійкість множини (2) спричиняє його асимптотичну

стійкість.

Позначимо через $\rho_t = \rho_t(t, \varphi_0, x_0)$ вираз $\rho_t = \|x_t - u(t, \varphi_t)\|$. Очевидно, що $d_t \leq \rho_t$ і $d_t = \rho_t$ кожний раз, коли $u(t, \varphi) = \text{const}$.

Має місце наступна лема.

Лема 1. Якщо $u \in C_{Lip}(R \times \mathfrak{Z}_m)$, то

$$\rho_t \leq \sqrt{2}(1+K)d_t, \quad (6)$$

де K – постійна Літшицева функції $u(t, \varphi)$.

Доведення. Дійсно, оскільки $\mathfrak{Z}_m$ – компакт, тоді

$$d_t = \left[\|\varphi_t - \varphi_t^*\|_{\mathfrak{Z}_m}^2 + \|x_t - u(t, \varphi_t^*)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

для деякого значення $\varphi_t^* \in \mathfrak{Z}_m$. Але тоді

$$\begin{aligned} \rho_t &\leq \|x_t - u(t, \varphi_t^*)\| + \|u(t, \varphi_t^*) - u(t, \varphi_t)\| \leq \\ &\leq (1+K) \left[\|x_t - u(t, \varphi_t^*)\| + \|\varphi_t^* - \varphi_t\|_{\mathfrak{Z}_m} \right] \leq \\ &\leq \sqrt{2}(1+K) \left[\|x_t - u(t, \varphi_t^*)\|^2 + \|\varphi_t^* - \varphi_t\|_{\mathfrak{Z}_m}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{2}(1+K)d_t, \end{aligned}$$

що доводить оцінку (6).

Число γ , що входить у нерівність (5), будемо називати показником експоненційного притягання траєкторій до множини (2).

Лема 2. Нехай $u \in C_{Lip}(R \times \mathfrak{Z}_m)$ і нехай для деякого $\delta_0 > 0$ будь-який розв'язок φ_t, x_t системи (1), у якого $\rho_0 < \delta_0$, задовольняє нерівності

$$\rho_t \leq K e^{-\gamma t} \rho_0, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

з постійними $K_1 > 0$ і $\gamma > 0$, що не залежать від ρ_0 .

Тоді інтегральна множина (2) системи рівнянь (1) є експоненційно стійкою з показником експоненційного притягання траєкторій до множини (2), рівним γ .

Доведення. Для доведення леми розглянемо розв'язки системи (1), у яких $\rho_0 < \delta_0/K$. Для таких розв'язків $\rho_t \leq K_1 e^{-\gamma t} \rho_0 < \delta_0$ при будь-якому $t \in R^+$. Тому розв'язок $\varphi_{t+\tau}, x_{t+\tau}$ системи рівнянь (1), приймає при $t=0$ значення φ_τ, x_τ , задовольняє умовам леми 2 при будь-якому $\tau \in R^+$, а отже, для нього справедлива оцінка (7):

$$\rho_t(t, \varphi_\tau, x_\tau) \leq K_1 e^{-\gamma t} \rho_\tau, \quad t \geq 0, \tau \in R^+. \quad (8)$$

Оскільки

$$\rho_t(t, \varphi_\tau, x_\tau) = \|x_{t+\tau} - u(t+\tau, \varphi_{t+\tau})\| = \rho_{t+\tau},$$

то нерівність (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho_{t+\tau} &\leq K_1 e^{-\gamma(t+\tau)} \rho_\tau, \quad t+\tau \geq \tau, \tau \in R^+, \\ \text{і замінивши в ньому } t+\tau \text{ на } t, \text{ одержимо} \\ \rho_t &\leq K_1 e^{-\gamma(t-\tau)} \rho_\tau, \quad t \geq \tau, \tau \in R^+. \end{aligned} \quad (9)$$

Нерівності (6), (9) дозволяють записати оцінку

$$\begin{aligned} d_t &\leq \rho_t \leq K_1 e^{-\gamma(t-\tau)} \rho_\tau \leq \\ &\leq \sqrt{2} K_1 (1+K) e^{-\gamma(t-\tau)} d_\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

справедливу для всіх $t \geq \tau$, любого $\tau \in R^+$ і тих розв'язків φ_t, x_t системи (1), у яких $\rho_0 < \delta_0/K_1$.

З леми 1, при $t=0$, слідує, що всі значення φ_0, x_0 , для яких $d_0 < \delta_0/(\sqrt{2} K_1 (1+K))$, задовольняють умові $\rho_0 < \delta_0/K_1$. Тому нерівність (10) має місце для всіх розв'язків φ_t, x_t системи рівнянь (1) таких, що $d_0 < \delta_0/(\sqrt{2} K_1 (1+K))$.

(11)

Лема 2 доведена.

Лема 2 спрощує перевірку експоненційної стійкості інтегральної множини (2) системи (1), зводячи її до встановлення нерівності (7).

Введемо поняття грубості функції Гріна-Самойленко.

Означення. Функцію Гріна-Самойленко $G(t, s, \varphi)$ системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x, \quad (12)$$

назвемо грубою, якщо існує постійна $\delta > 0$ така, що система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + a_1(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x, \quad (13)$$

усякий раз, коли $a_1(\varphi) \in C^1(\mathfrak{Z}_m)$, $|a_1(\varphi)|_1 \leq \delta$,

має функцію Гріна-Самойленко $\bar{G}(t, s, \varphi)$, для якої

$$\|\bar{G}(t, s, \varphi) f(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\|_1 \leq K e^{-\gamma|t-s|} \|f\|_1 \quad (14)$$

де $\varphi_t(\tau, \varphi)$ – розв'язок першого з рівнянь (13),

f – довільна функція з $C^1(R \times \mathfrak{Z}_m)$, K і γ – додатні сталі, що не залежать від t, φ, δ і f .

Існування інваріантної множини для грубої функції Гріна-Самойленко обґрунтовує наступна лема.

Лема 3. Нехай система рівнянь (12) має грубу функцію Гріна-Самойленко

$G(t, s, \varphi)$. Тоді можна вказати таке $\rho = \rho(\delta) > 0$, $\rho(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, що для будь-яких $a_1 \in C^1(\mathfrak{I}_m)$, $P_1 \in C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$, які задовольняє умову

$$|a_1|_1 + |P_1|_1 \leq \rho, \quad (15)$$

і довільної функції $f \in C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$, система рівнянь (13) має інваріантну множину (2), що задовольняє умові

$$|u|_1 \leq K_1 |f|_1, \quad (16)$$

де K_1 - додатна стала, що не залежить від ρ і f .

Доведення даної лема проводиться аналогічно [1].

Далі, розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi, x, \varepsilon), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi, x, \varepsilon)x + f(t, \varphi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (17)$$

у якій $t \in R$, $x \in R^n$, $a(t, \varphi, x, \varepsilon)$, $f(t, \varphi, \varepsilon)$, $P(t, \varphi, x, \varepsilon)$ неперервні по t і задовольняють умові Ліпшица по φ , відповідно векторні і матрична функції, 2π -періодичні по φ_v , $v = \overline{1, m}$, обмежені при $t \in R$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$.

Розглянемо випадок, коли множина (2) є експоненційно стійкою. Відповідно до результатів [1] цей випадок має місце, коли виконується умова

$$\inf_{t \in R} \min_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \beta(t, \varphi) = \beta_0 > 0, \quad (18)$$

де функція $\beta(t, \varphi)$ визначається нерівністю

$$\inf_{S \in \mathfrak{H}_0} \max_{|x|=1} \frac{\langle [S(\varphi)P(t, \varphi) + (\frac{1}{2})\dot{S}(\varphi)]x, x \rangle}{\langle S(\varphi)x, x \rangle} \leq -\beta(t, \varphi), \quad (19)$$

$\mathfrak{H}_0$ -множина $n \times n$ -мірних додатно визначених симетричних матриць, що належать простору $C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$.

Визначимо значення $\alpha(t, \varphi)$, поклавши

$$\inf_{S_1 \in \mathfrak{H}_1} \min_{|\psi|=1} \frac{\langle [S_1(\varphi)\frac{\partial a(t, \varphi)}{\partial \varphi} + (\frac{1}{2})\dot{S}_1(\varphi)]\psi, \psi \rangle}{\langle S_1(\varphi)\psi, \psi \rangle} \geq \alpha(t, \varphi) \quad (20)$$

де $\mathfrak{H}_1$ -множина $m \times m$ -мірних додатно визначених симетричних матриць, що належать простору $C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$.

Розглянемо $\beta(t, \varphi)$ і $\alpha(t, \varphi)$ з тими змінами, що $\alpha(t, \varphi) = \alpha_0(t, \varphi)$, $P(t, \varphi) = P_0(t, \varphi)$ а $\inf$ і $\sup$ беруться по підмножинах $\mathfrak{H}_0$ і $\mathfrak{H}_1$, що складаються з матриць простору $C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай в системі (17) функції a, P і f мають неперервні по φ, x, ε частинні похідні в області

$$\|x\| \leq d, \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \quad (21)$$

Припустимо також, що виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \inf_{t \in R} \min_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} \beta(t, \varphi) &= \beta_0 > 0, \\ \inf_{t \in R} \min_{\varphi \in \mathfrak{I}_m} [\beta(t, \varphi) + \alpha(t, \varphi)] &> 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Тоді можна вказати досить мале $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ система рівнянь (17) має експоненційно стійку інтегральну множину (2).

Доведення. Оскільки величини $\beta(t, \varphi)$ і $\alpha(t, \varphi)$ визначаються згідно (19), (20) по матрицях $P_0, \partial a_0 / \partial \varphi$ і S, S_1 з простору $C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$, тоді аналогічні величини $\beta_\delta(t, \varphi)$ і $\alpha_\delta(t, \varphi)$, (визначені по матрицях P_0 і $\partial a_0 / \partial \varphi + \partial a_1 / \partial \varphi$ для довільного $a_1 \in C^1(R \times \mathfrak{I}_m)$, яке задовольняє нерівність $|a_1|_1 \leq \delta$), зв'язані з величинами $\beta(t, \varphi)$ і $\alpha(t, \varphi)$ нерівністю

$$|\beta(t, \varphi) - \beta_\delta(t, \varphi)| + |\alpha(t, \varphi) - \alpha_\delta(t, \varphi)| < K\delta, \quad (23)$$

де K - деяка додатна стала, що не залежить від δ . При досить малому $\delta > 0$ нерівності (22) і (23) ведуть до аналогічних (22) нерівностей для $\beta_\delta(t, \varphi)$ і $\alpha_\delta(t, \varphi)$. Цього досить, для того щоб кожна із систем рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi) + a_1(t, \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi)x \end{aligned} \quad (24)$$

з $a = a_0$, $P = P_0$ була експоненційно стійкою і щоб її функція Гріна-Самойленко $\bar{G}_0(t, s, \varphi)$ задовольняла нерівність

$$|\bar{G}_0(t, s, \varphi)f(t, \varphi, (\tau, \varphi))| \leq Ke^{-\tau||} |f|.$$

Останнє еквівалентно грубості функції Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a_0(t, \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P_0(t, \varphi)x \end{aligned} \quad (25)$$

Це означає, що умови даної теореми забезпечують виконання всіх припущень, а разом з ними забезпечують існування інтегральної множини

$$x = u(t, \varphi, \varepsilon), \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathfrak{I}_m, \quad (26)$$

системи (17) для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, належність функції u що задає цю множину простору $C_{lip}^0(R \times \mathfrak{I}_m)$ і виконання нерівності

$$|u|_{0, lip} \leq K|f|_1.$$

Доведемо тепер експоненційну стійкість інтегральної множини (26). Оскільки дана множина у загальному випадку лише ліпшицева, то для неї не можна записати рівняння у варіаціях і зробити висновок про його експоненційну стійкість. Це змушує нас використовувати для доведення властивості множини (26) ітераційний процес.

Згідно цього процесу

$$u(t, \varphi, \varepsilon) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(t, \varphi, \varepsilon)$$

рівномірно по $t \in R, \varphi \in \mathfrak{I}_m, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, де

$$u_i \in C^1(R \times \mathfrak{I}_m), \quad |u_i|_1 \leq K|f|_1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(t, \varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} a(t, \varphi, u_{i-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) = \\ = P(t, \varphi, u_{i-1}(t, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) u_i(t, \varphi, \varepsilon) + f(t, \varphi, \varepsilon). \end{aligned}$$

Скористаємося властивостями функцій $u_i(t, \varphi, \varepsilon)$ для оцінки величини $\rho_i = \|x_i - u(t, \varphi_i, \varepsilon)\|$, в якій φ_i, x_i - розв'язок системи рівнянь (17), що приймає при $t = 0$ значення (φ_0, x_0) з області $\rho_0 < \delta_0$.

Виберемо $\varepsilon_0 > 0$ і $\delta_0 > 0$ настільки малими, щоб при усіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ виконувалась нерівність

$$\delta_0 + K|f|_0 \leq d/2,$$

де d визначає область (21), а K - стала з нерівності (27). При такому виборі точка (φ_0, x_0) належить області (21) разом з деяким своїм околom і розв'язок φ_i, x_i визначений для $t > 0$ аж до того моменту часу, коли (φ_i, x_i) не вийде на границю області (21).

Зафіксуємо довільне $\delta, \delta_0 < \delta < d$, і визначимо $T > 0$ як найбільше зі значень, при яких $\rho_i < \delta, i \in [0, T)$.

Розглянемо функцію $z_i = x_i - u(t, \varphi_i, \varepsilon)$ для $t \in [0, T)$. Оскільки $u \in C_{lip}(R \times \mathfrak{I}_m)$, тоді z_i задовольняє умові Ліпшица по змінній t , а отже, має майже для всіх $t \in [0, T)$ похідну по t . Тоді майже для всіх $t \in [0, T)$

$$\begin{aligned} \frac{du(t, \varphi_i, \varepsilon)}{dt} &= \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{u_i(t + \Delta, \varphi_{i+\Delta}, \varepsilon) - u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial \varphi} \times \right. \\ &\quad \times a(t, \varphi_i, u_i(t, \varphi_i, \varepsilon) + z_0, \varepsilon) \Big] \\ &\text{де } \theta = t + \tau \Delta, \quad \tau \in [0, 1]. \text{ Покладемо} \\ &\Phi_i(\theta, \varphi_\theta, z_0, \varepsilon) = \\ &= \frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial \varphi} \times \\ &\quad \times [a(\theta, \varphi_\theta, u(\theta, \varphi_\theta, \varepsilon) + z_0, \varepsilon) - \\ &\quad - a(\theta, \varphi_\theta, u_{i-1}(\theta, \varphi_\theta, \varepsilon))]. \end{aligned}$$

У силу рівності (27)

$$\begin{aligned} \frac{du(t, \varphi_i, \varepsilon)}{dt} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_i(t, \varphi_i, \varepsilon)}{\partial \varphi} \times a(t, \varphi_i, u_{i-1}(t, \varphi_i, \varepsilon), \varepsilon) \right] = \\ &= P(t, \varphi_i, u(t, \varphi_i, \varepsilon), \varepsilon) u(t, \varphi_i, \varepsilon) + \\ &\quad + f(t, \varphi_i, \varepsilon) + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(\theta, \varphi_\theta, z_0, \varepsilon) \\ &\text{майже для всіх } t \in [0, T). \end{aligned} \quad (28)$$

Далі маємо,

$$\|\Phi_i(\theta, \varphi_\theta, z_0, \varepsilon)\| \leq K_1 |f|_1 (|u - u_{i-1}|_0 + \|z_0\|)$$

з очевидним значенням постійної K_1 . Звідси слідує, що

$$\left\| \lim_{\Delta \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(\theta, \varphi_\theta, z_0, \varepsilon) \right\| \leq K_1 |f|_1 \|z_i\| \quad (29)$$

майже для усіх $t \in [0, T)$. Співвідношення (28) дозволяє записати для dz_i/dt вираз виду

$$\frac{dz_i}{dt} = P_0(t, \varphi_i) z_i + R(t, \varphi_i, u(t, \varphi_i, \varepsilon), z_i, \varepsilon), \quad (30)$$

де позначено

$$\begin{aligned} R(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon), z, \varepsilon) = \\ = [P(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon) + z, \varepsilon) - \\ - P(t, \varphi, 0, 0)] z + \\ + [P(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon) + z, \varepsilon) - \\ - P(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon) \varepsilon)] u(t, \varphi, \varepsilon) - \\ - \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \Phi(\theta, \varphi_\theta, z_\theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Нерівності (27), (29) дозволяють одержати для функції $R = R(t, \varphi, u(t, \varphi, \varepsilon), z, \varepsilon)$ оцінку

$$\|R\| \leq K_2(\|f\| + \|z\| + \varepsilon_0)\|z\| \leq \mu(\delta, \varepsilon_0)\|z\|, \quad (31)$$

де $\mu(\delta, \varepsilon_0) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0$, монотонно спадаючи.

Нерівність (29) дозволяє оцінити $\|z\| = \rho$ з використанням умови $\beta_0 > 0$ і в результаті одержати для ρ оцінку

$$\rho \leq K e^{-(\beta_0 - 3\mu(\delta, \varepsilon_0))t} \rho_0, \quad (32)$$

де β_0 - довільне фіксоване число з інтервалу $(0, \beta_0)$. При досить малих δ і ε_0 нерівність (32) веде до оцінки (7) з

$$\gamma = \beta_0 - 3\mu(\delta, \varepsilon_0) > 0. \quad (33)$$

Але тоді виконуються умови леми 2 і інтегральна множина (26) системи (17) є експоненційно стійкою.

Слід зазначити, що показник експоненційного притягання траєкторій до множини (26), як видно з формули (33), залежить від відстані точки (φ_0, x_0) до множини (26), збільшуючись при зменшенні цієї відстані.

Відмітимо також, що нерівності (26), (32) разом з нерівністю (11) гарантує можливість по досить малому $\delta_0 > 0$ вибрати $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta_0) > 0$ так, щоб для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ виконувалась нерівність

$$\|u(t, \varphi, \varepsilon)\| < \delta_0/2, t \in R, \varphi \in \mathcal{Z}_m,$$

і щоб будь-який розв'язок φ_t, x_t системи (17), в якого

$$\|x_0\| < \delta_0,$$

притягувався до множини (2) при $t \rightarrow +\infty$ по експоненційному закону (5).

Список використаних джерел

1. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний.-М.: Наука, 1987.-304с.
2. Асроров Ф.А. Про необхідну умову існування інтегральних множин диференціальних рівнянь.-Вісник Київ.ун-ту, 2001, № 2, стор.
3. Асроров Ф.А., Перестюк Н.А. Функция Грина-Самойленка и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных уравнений // Укр. Мат. Журн.-1994.-46, № 8.-С. 1067-1071.
4. Асроров Ф.А., Данилов В.Я., Могильова В.В. Про інваріантні тори нелінійних неавтономних систем //Наукові вісті НТУУ "КПІ".-2003.-№ 2.-С.136-141.
5. Асроров Ф.А., Аззамов Т.Д., Данилов В.Я., Могильова В.В. Необходимые условия существования интегральной множности линейной системы с довільною неоднорідністю //Наукові вісті НТУУ "КПІ".-2006.-№ 5.-С.125-128.

Надійшла до редколегії 08.11.2007

УДК 539.376

О.В. Бойчук, аспірант.

Поле залишкової непружної деформації в диску, викликане тепловим імпульсом

У рамках динамічної постановки зв'язаної задачі термомеханіки чисельно досліджено залишкові непружні деформації в зоні опромінення. Встановлено, що радіальні компоненти непружної деформації є стискаючими, а осьові компоненти є розтягуючими, розподіл має екстремальні значення в центрі плями опромінення. Розподіл залишкових непружних деформацій визначається формою та величиною теплового імпульсу.

Ключові слова: залишкові непружні деформації, опромінення, тепловий імпульс, нелінійна поведінка матеріалу

E-mail: term@inmech.kiev.ua

Представив професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Обробка поверхні деталей лазерним імпульсом або електронним променем є сучасним методом підвищення міцності, довговічності та витривалості деталей машин. Зокрема, технологія блокування поширення втомної тріщини полягає в створенні поля стискаючих залишкових напружень і пластичних деформацій за допомогою імпульсного вибухового впливу з фокусуванням енергії в області вершини тріщини [7]. Крім того, в процесі експлуатації елементи конструкцій можуть зазнавати дії теплових імпульсів, які спричиняють появу непружних залишкових деформацій. Механічні властивості елементів конструкції при цьому можуть суттєво змінитися в зоні опромінення.

В даній статті досліджується непружне деформування сталевго диска під дією опромінення і наступного поступового охолодження в рамках динамічної постановки задачі із залученням узагальненої погодженої з термодинамікою незворотних процесів моделі фізично нелінійної поведінки матеріалів в широкому діапазоні температур [3,14].

2. Постановка задачі

В циліндричній системі координат $O r z \varphi$ розглядається диск радіусу $|r| \leq R$ і товщини $0 \leq |z| \leq h$. Центр поверхні $z = 0$ опромінюється тепловим імпульсом, що моделюється тепловим

O.V. Boychuk, PhD student.

The field of residual inelastic strains of nonelastik disk caused by thermal pulse

The residual inelastic strains in irradiation zone are investigated within the framework of posing the dynamic statement coupled thermomechanics problem. It established that radial component's of inelastic strains are compressive and axial component's are stretch, distribution has extramal value in the center irradiation spot. The field of residual inelastic strains determine by form and parametr of thermal pulse.

Key Words: residual inelastic strains, thermal pulse irradiation, inelastic material behavior.

потокм q_z через границю диску, який змінюється за законом

$$q_z = \begin{cases} q_0 \cos \frac{\pi r}{2r_p} \sin \frac{\pi t}{t_p}; & r \leq r_p, t \leq t_p; \\ 0; & r > r_p, t > t_p, \end{cases}$$

де t_p і r_p – тривалість та радіус дії імпульсу.

Вся інша поверхня диску вважається теплоізованою. Після припинення дії імпульсу опромінена частина поверхні теж вважається теплоізованою.

В постановку динамічної осесиметричної зв'язаної задачі входять співвідношення Коші

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),$$

рівняння руху

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

рівняння балансу енергії

$$c_v \dot{\theta} + 3\alpha \theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha \dot{\theta}) - D' - k \Delta \theta = r_z,$$

механічні граничні умови

$$\sigma_{ij} n_j = 0 \text{ на } S,$$

теплові граничні умови

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = q, \text{ на } S_p, 0 \leq t \leq t_p;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ на } S - S_p,$$

початкові умови

$$u_r = u_z = \dot{u}_r = \dot{u}_z = 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0,$$

де u_r, u_z – переміщення вздовж відповідних осей; $\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ і ε_φ – компоненти тензора деформації; $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{rz}$ і σ_φ – компоненти тензора напружень; θ – температура; α, c_v і k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; K_v – об'ємний модуль матеріалу; r_s – потужність заданих внутрішніх джерел тепла; D' – швидкість дисипації механічної енергії, θ_0 – початкова температура; n_j – компонента вектора одиничної нормалі до відповідної граничної поверхні; S_p – частина поверхні ($r \leq r_p, z = 0$), яка знаходиться під дією теплового імпульсу; $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\varphi$;

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Фізично нелінійна поведінки матеріалу диска описується за допомогою розвиненої на основі моделі Боднера–Партома [5,9] узагальненої термодинамічно узгодженої теорії. Ця теорія використовує:

– представлення повної деформації у вигляді суми пружної, непружної і теплової складових

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta, \quad ij = r, z, rz, \varphi,$$

$$\text{де } \varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta') d\theta';$$

– закон Гука

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^p), \quad \sigma_{kk} = 3K_v(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^\theta),$$

де s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напруження і деформації відповідно; G – модуль зсуву; по індексах, що повторюються, проводиться додавання;

– закон течії з умовою пластичної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda s_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0;$$

– кінетичне рівняння

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left[- \left(\frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right],$$

$$\text{де } Z = K + D, \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p,$$

$$\lambda^2 = D_2^p / J_2;$$

– рівняння еволюції для внутрішніх змінних ізотропного K та направленого β_{ij} зміщень

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}_p, \quad K(0) = K_0,$$

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2(D_1 u_{ij} - \beta_{ij})\dot{W}_p, \quad \beta_{ij}(0) = 0,$$

$$\text{де } D = \beta_{ij} u_{ij}, \quad u_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_{ij} \sigma_{ij})^{1/2}, \quad \dot{W}_p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p.$$

В рівняннях еволюції на відміну від робіт [5,9] знехтувані доданки, що визначають тепловий зворот, оскільки розглядувані процеси достатньо швидкі.

Величини $D_0, D_1, K_0, K_1, m_1, m_2$ і n є константами моделі [5,9]. Експериментальні і теоретичні дослідження [6] показали, що для більшості металів параметри D_0, D_1, m_2 слабко залежать від температури і можуть вважатись сталими в широкому інтервалі температур. Параметри K_0, K_1, m_1 і n – функції температури.

Вираз для швидкості дисипації механічної енергії D' , отриманий із залученням термодинаміки незворотних процесів із внутрішніми змінними, має вигляд [5]

$$D' = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - K\dot{\delta} - \beta_{ij} \dot{\alpha}_{ij} = \dot{W}_p - \dot{W}_{\delta K} - \dot{W}_{\alpha \beta},$$

де δ і α_{ij} – внутрішні змінні, спряжені до термодинамічних сил K і β_{ij} . Останні два доданки описують частину непружної потужності, що не переходить у тепло, а накопичується у матеріалі.

3. Метод розв'язання

Як матеріал диску використовується сталь 35ХМА. Її фізико-механічні властивості взяті з роботи [4], а значення параметрів моделі Боднера–Партома отримані обробкою діаграм розтягу з книг [6,12]. Враховуються температурні залежності властивостей матеріалу і деяких параметрів моделі Боднера–Партома.

Постановка задачі є суттєво нелінійною і розв'язується чисельно з використанням підходу, розвиненого в статтях [3,5] для розв'язання динамічних плоских і осесиметричних задач термов'язкопластичності.

Чисельна реалізація задачі проводиться у рамках подвійного ітераційного процесу. Перший – внутрішній – пов'язаний з інтегруванням системи нелінійних рівнянь моделі поведінки матеріалу з використанням неявної схеми, другий – зовнішній – з

розв'язанням рівнянь руху і теплопровідності. В рамках зовнішнього ітераційного процесу враховується температурна залежність констант матеріалу і параметрів моделі Боднера-Партома. Наявність областей швидкої зміни розв'язку при переході від пружного деформування до пластичного вимагає застосування схем із змінним кроком інтегрування в часі. Рівняння еволюції інтегруються неявним методом Ейлера з використанням правила «середньої точки». Система нелінійних трансцендентних рівнянь, яка виникає на кожному кроці за часом, розв'язується методом простої ітерації. Для прискорення збіжності використовується процедура Стефенса-Ейткена.

Задача розв'язується за допомогою методики скінчених елементів розвиненої для моделювання зв'язаної термомеханічної поведінки фізично нелінійних матеріалів.

4. Результати розрахунків

Розрахунки проводились для диска радіусом $R = 5 \cdot 10^{-3}$ м і товщиною $h = 10^{-4}$ м. Радіус зони опромінення $r_p = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, тривалість дії імпульсу t_p змінювалась від 10^{-8} с до 10^{-7} с, параметр теплового потоку q_0 також відповідно змінювався в інтервалі від $6 \cdot 10^7$ кВт/м² до $2 \cdot 10^8$ кВт/м². Початкова температура диску θ_0 приймалась рівною 20°C .

При дії теплового імпульсу на матеріал в зоні опромінення на поверхні і в приповерхневій зоні утворюється область великих градієнтів температури, внаслідок чого виникають великі теплові напруження [10-13]. На відміну від випадку опромінення стержня [1,2] за даних умов в диску спостерігаються значні непружні деформації. Після припинення дії теплового імпульсу відбувається поступове вирівнювання температури по об'єму диска. Охолодження супроводжується зміною напружено-деформованого стану, який стабілізується після певного проміжку часу, формуючи зони розтягу та стиску. Непружні деформації стають помітними вже при $t = 0,3 \cdot 10^{-8}$ с. Радіальні компоненти непружної деформації в зоні дії теплового імпульсу є стискаючими, а осьові компоненти – розтягуючі. Максимальних по модулю значень ($\varepsilon_r^p = -0,012$, $\varepsilon_z^p = 0,024$) непружна деформація в центрі зони опромінення досягає в момент припинення дії імпульсу. Після цього протягом приблизно 10^{-8} с непружні

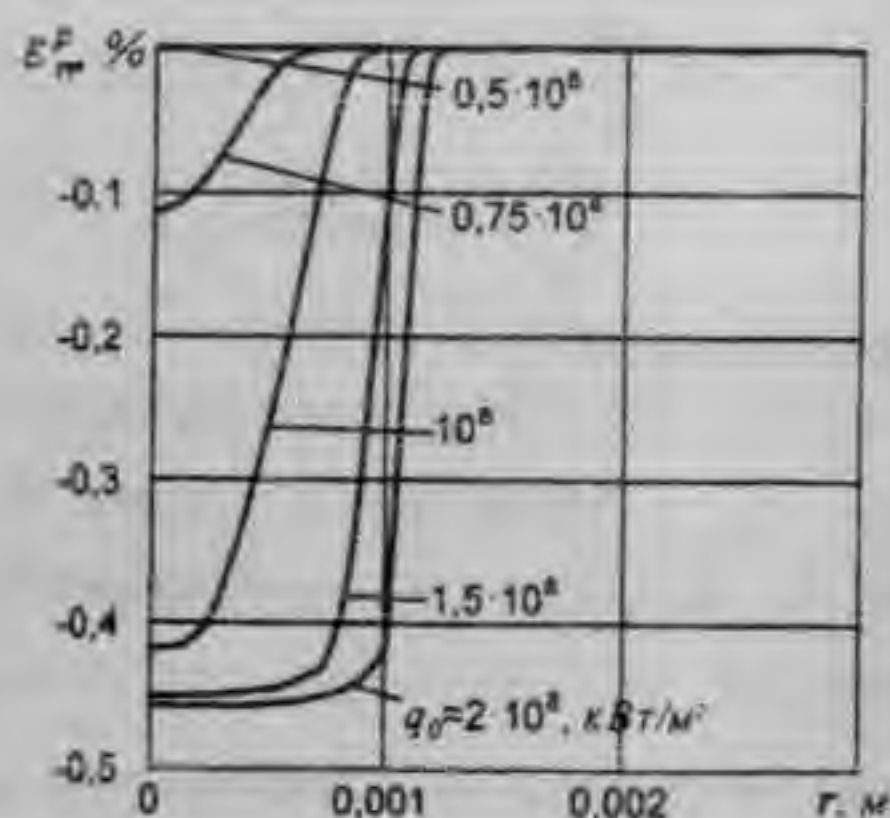


Рис. 1

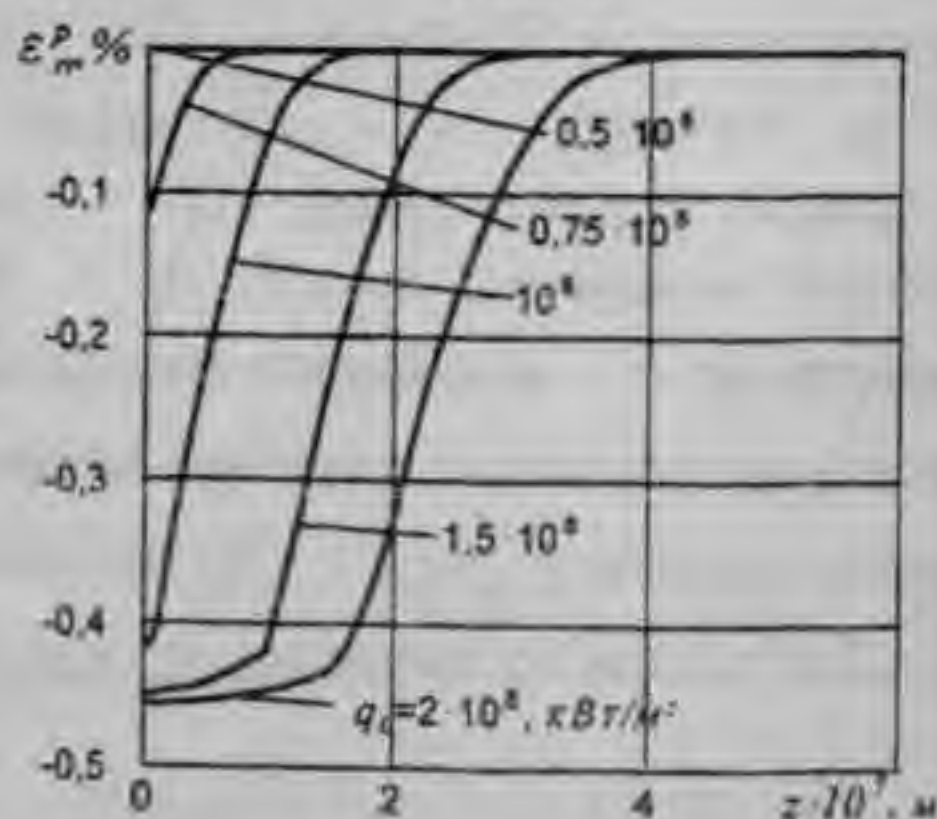


Рис. 2

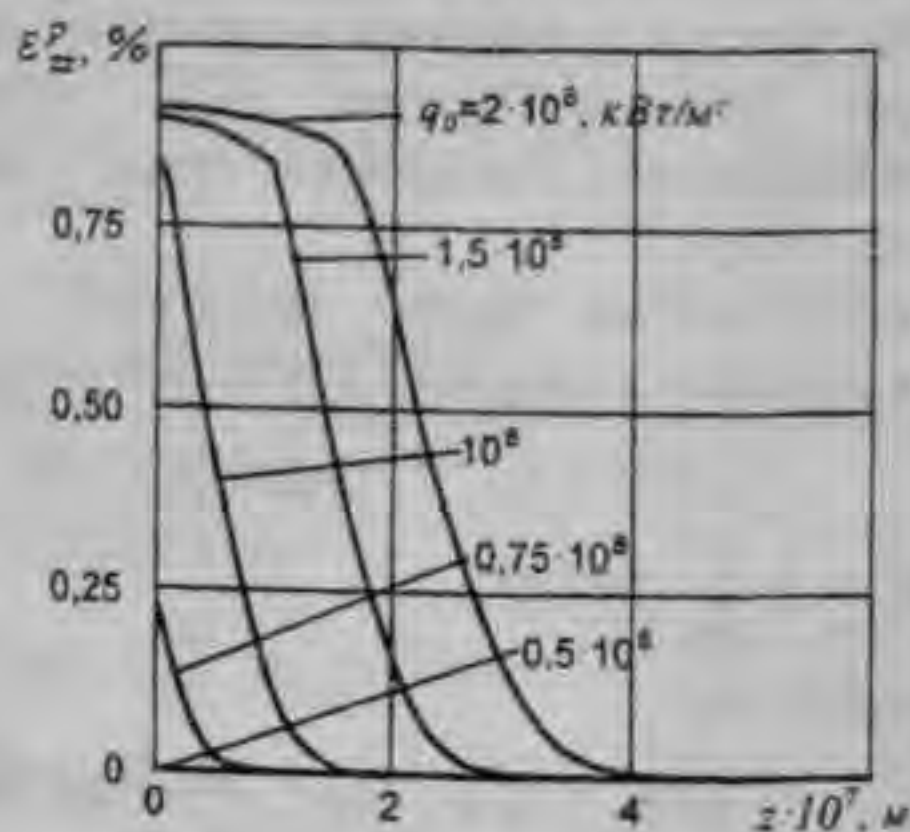


Рис. 3

деформації залишаються постійними. При цьому відбувається процес термопружного розвантаження. При охолодженні виникають вторинні непружні деформації, що призводять до повільного і поступового зменшення по модулю рівня непружних деформацій. Остаточні, залишкові непружні деформації в центрі зони опромінення в момент часу $t = 0,4 \cdot 10^{-4}$ с складають $\varepsilon_r^p = -0,0046$, $\varepsilon_z^p = 0,0092$.

Для оцінки зміцнення матеріалу досліджують саме залишкові поля непружної деформації. Розподіли компонент залишкової непружної

деформації ε_r^p вздовж радіуса при $z=0$ і вздовж осі диска при $r=0$, а також ε_z^p вздовж осі диска при $r=0$ для різних значень параметра теплового потоку q_0 представлені на рис. 1, 2, 3 відповідно.

З графіків видно, що збільшення теплового потоку призводить до розширення області впливу імпульсу температури. Вздовж радіуса відбувається спочатку швидке зростання розміру області теплового впливу, потім, при наближенні до розміру радіуса плями зростання суттєво сповільнюється і відбувається її насичення. Така поведінка пояснюється формою імпульсу вздовж координати r . По осі диска відбувається насичення значень компонент непружної деформації, в той час як розмір самої області продовжує зростати практично за лінійним законом. Це обумовлено, перед усім, вузькістю області впливу імпульсу по осі Oz .

Область впливу теплового імпульсу за критерієм непружного деформування являє собою круг радіуса 1,1 мм. Це обумовлено просторовою формою імпульсу опромінення. Поле залишкових непружних деформацій не поширюється глибше 0,4 мкм при вибраних умовах опромінення.

Список використаних джерел

1. Жук Я.А., Сенченков И.К., Бойчук Е.В. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые термическим импульсом на торце // Акустичний вісник. – 2006. – 9, № 3. – С. 7-16.
2. Жук Я.О., Сенченков И.К., Бойчук О.В. Динамічні процеси в тонкому циліндрі при тепловому опроміненні торця // Доповіді НАН України. – 2007. – № 2. – С. 45-51.
3. Жук Я.А., Сенченков И.К., Козлов В.И., Табиева Г.А. Осесимметричная динамическая связанная задача термовязкопластичности // Прикл. механика – 2001. – 37, №10. – С.83–89.
4. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Гольденблат И.И., ред. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
5. Сенченков И.К., Жук Я.А. Термомеханический анализ одной модели термовязкопластического деформирования материалов //

Прикл. механика. – 1997. – 33, № 2. – С. 41–48.

6. Сенченков И.К., Табиева Г.А. Определение параметров модели Боднера–Партома термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 2. – С. 64–72.
7. Совершенствование сварных металлических конструкций / Жербин М.М., ред. – Киев: Наук. думка, 1992. – 272 с.
8. Чжань К., Линдхольм У. Неупругая деформация при неизотермическом нагружении // Соврем. машиностроение. Сер. Б. – 1990. – № 6. – С. 11–21.
9. Bodner S., Partom Y. Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – 42. – P. 385–389.
10. Chen H., Kysar J., Yao Y.L. Characterization of plastic deformation induced by microscale laser shock peening // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – 71. – P. 713–723.
11. Nikitin B., Scholtes B., Maier H.J., Altenberger I. High temperature fatigue behavior and residual stress stability of laser shock peened and deep rolled austenitic steel AISI 304 // Scripta Mater. – 2004. – 50. – P. 1345–1350.
12. Ocana J.L., Morales M., Molpeceres C., Torres J. Numerical simulation of surface deformation and residual stresses fields in laser shock processing experiments // Applied Surface Science. – 2004. – 238. – P. 242–248.
13. Qin Y., Zou J., Dong C. Temperature–stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. Meth. Phys. Research. Part B. – 2004. – 225. – P. 544–554.
14. Senchenkov I.K., Andrushko N.F. Thermo-mechanical coupling effects in materially nonlinear disk under impulsive radial loading // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42. – P. 951–959.
15. Valette S., Audouard E., Le Harzic R., Huot N., Laporte P., Fortunier R. Heat affected zone in aluminum single crystals submitted to femtosecond laser irradiations // Appl. Surf. Science. – 2005. – 239. – P. 381–386.

Надійшла до редколегії 18.05.2007

УДК 517.98

Гнатюк П. В., студент
Касьянов П. О., канд. фіз.-мат. наук

Операторні рівняння в нескінченновимірних банахових просторах з відображеннями монотонного типу

Показано розв'язність операторного рівняння $\Lambda u + Au = f$, де Λ – нелінійний радіально неперервний, максимально монотонний оператор, визначений на лінійній області визначення $D(\Lambda) \subset X$, A – нелінійний радіально неперервний з напівобмеженою варіацією коерцитивний оператор.

Ключові слова: операторні рівняння, оператори з напівобмеженою варіацією, максимально монотонні оператори, коерцитивні оператори.

(Представлено Перестюком М.О., проф., докт. фіз.-м. н.)

Стаття присвячена дослідженню операторних рівнянь в нескінченновимірних банахових просторах з нелінійними відображеннями монотонного типу. Досліджується розв'язність операторного рівняння, в лівій частині якого сума двох радіально неперервних операторів – максимально монотонного, та коерцитивного з напівобмеженою варіацією оператора. У правій частині – лінійний неперервний функціонал.

Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний рефлексивний сепарабельний банахів простір, $(X^*, \|\cdot\|_*)$ – спряжений до нього простір. $A: X \rightarrow X^*$ – деякий нелінійний оператор, визначений на X , а $\Lambda: D(\Lambda) \rightarrow X^*$ – нелінійний оператор з лінійною областю визначення $D(\Lambda) \subset X$.

Розглядається рівняння:

$$\Lambda u + Au = f.$$

Для $f \in X^*$, $x \in X$ введемо позначення:

$$\langle f, x \rangle := f(x).$$

Для $\{x_n\} \subset X$ та $x \in X$ запис $x_n \rightarrow x$ означає наступне:

$$\forall f \in X^* \quad f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Означення 1. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ нази-

Gnatyuk P. V., student
Kasyanov P. O., Dr. Ph.

Operational equations in infinitely dimensional banach spaces with the transformations of a monotonous type

The possibility of solving the operational equation $\Lambda u + Au = f$ is shown, where Λ – is the nonlinear, radially continuous, maximum monotonous operator specified in the linear definition field $D(\Lambda) \subset X$ and A – is the nonlinear, radially continuous coercive operator with semi-bounded variation.

Keywords: operational equations, operators with semi-bounded variation, maximum monotonous operators, coercive operators.

вається:

- радіально неперервним, якщо $\forall u, v \in X$ дійсна функція $s \rightarrow \langle A(u + sv), v \rangle$ неперервна на $[0, 1]$;
- демінеперервним, якщо з $u_n \rightarrow u$ в $X \Rightarrow Au_n \rightarrow Au$ в X^* ;

Означення 2. Оператор $\Lambda: D(\Lambda) \rightarrow X^*$ називається:

- монотонним, якщо для довільних $u, v \in D(\Lambda)$

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0;$$

- максимально монотонним, якщо він монотонний, та з того що

$$\langle \Lambda u - f, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(\Lambda)$$

для деяких фіксованих $f \in X^*$, $v \in X$, випливає, що $v \in D(\Lambda)$ і $\Lambda v = f$.

Означення 3. $A: X \rightarrow X^*$ називається оператором з напівобмеженою варіацією, якщо існує відображення $C(R, t)$:

$R_+^2 \ni (R, t) \rightarrow C(R, t) = C_R(t) \in R$, що для довільних u і v таких, що $\|u\|, \|v\| \leq R$ виконується нерівність:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq -C_R(\|u - v\|'),$$

де $\|\cdot\|'$ – компактна напівнорма в просторі X , а відображення $C(R, t)$ задовольняє умови:

1) $C(R, t)$ неперервна за змінною t ;

2) $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{C(R, t)}{t} = 0$;

Означення 4. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається коерцитивним, якщо існує дійсна функція $\gamma: [0, \infty) \rightarrow R$ з $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma(s) = +\infty$,

така, що $\langle Au, u \rangle \geq \gamma(\|u\|) \|u\|$.

Означення 5. Оператор $A: X \rightarrow X^*$ називається:

– обмеженим, якщо образ кожної обмеженої підмножини з X обмежений в X^* ;

– локально обмеженим, якщо

$$\forall u \in X \exists \varepsilon > 0 \exists M > 0:$$

$$\|u - v\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|Av\|_* \leq M.$$

Лема 1. Оператор з напівобмеженою варіацією $A: X \rightarrow X^*$ локально обмежений.

Наслідок. Нехай оператор $A: X \rightarrow X^*$ з напівобмеженою варіацією і $K \subset X$ – така множина, що $\|u\| \leq M_1$ і $\langle Au, u \rangle \leq M_2 \forall u \in K$. Тоді існує $M > 0$, що $\|Au\|_* \leq M \forall u \in K$.

Лема 2. Нехай $A: X \rightarrow X^*$ – оператор з напівобмеженою варіацією.

Тоді такі твердження еквівалентні:

а) оператор A радіально неперервний;

б)

$$\langle f - Av, u - v \rangle \geq -C_R(\|u - v\|') \forall v \in X \Rightarrow$$

$$\langle f - Av, u - v \rangle \geq -C_R(\|u - v\|') \forall v \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Au = f$$

с) якщо $u_n \rightharpoonup u$ в X , $Au_n \rightharpoonup f$ в X^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle f, u \rangle, \text{ то } Au = f$$

д) оператор A демінеперервний;

е) якщо K – скрізь щільна підмножина в X , то з

$$\langle f - Av, u - v \rangle \geq -C_R(\|u - v\|') \forall v \in K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Au = f$$

Лема 3. Нехай $B: R^n \rightarrow R^n$ – неперервне відображення, що для деякого $R > 0$ задовольняє умову

$$(Ba, a) \geq 0 \text{ для } |a| = R.$$

Тоді існує таке $a \in R^n$, що $|a| \leq R$ і $Ba = 0$. [2, Гл. 3, Лема 2.1].

Лема 1–3 можна довести аналогічно відповідним лемам для монотонних операторів у [2].

Теорема 1. Нехай $\Lambda: D(\Lambda) \rightarrow X^*$ – радіально неперервний максимально монотонний оператор з лінійною областю визначення $D(\Lambda) \subset X$ і $A: X \rightarrow X^*$ – радіально неперервний з напівобмеженою варіацією коерцитивний оператор. Тоді для будь-якого $f \in X^*$ рівняння

$$\Lambda u + Au = f \tag{1}$$

має розв'язок.

Лема 4. В умовах теореми, нехай F – довільний скінченновимірний підпростір в $D(\Lambda)$. Тоді рівняння

$$\langle \Lambda u_F + Au_F - f, h \rangle = 0 \quad \forall h \in F \tag{2}$$

має розв'язок $u_F \in F$, причому $\|u_F\| \leq M$ і $\|Au_F\|_* \leq M$ з незалежною від F константою M .

Доведення. Нехай $I_F: F \rightarrow X$ – оператор вкладення F в X і $I_F^*: X^* \rightarrow F^*$ – спряжений до I_F оператор. Оператор

$I_F^*(\Lambda + A)I_F: F \rightarrow F^*$ є радіально неперервним відображенням з напівобмеженою варіацією, і враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \langle I_F^*(\Lambda + A)I_F x, x \rangle &= \langle \Lambda x + Ax, x \rangle = \\ &= \langle \Lambda x - \Lambda 0, x \rangle + \langle Ax, x \rangle + \langle \Lambda 0, x \rangle \geq \\ &\geq \langle Ax, x \rangle - \|\Lambda 0\|_* \|x\| \geq \|x\|(\gamma(\|x\|) - \|\Lambda 0\|_*) \end{aligned}$$

коерцитивним.

Розв'язки рівняння

$$I_F^*(\Lambda + A)I_F u_F = I_F^* f \tag{3}$$

задовольняють рівняння (2). Тому покажемо, що рівняння (3) має розв'язок.

Введемо позначення:

$$\Upsilon := I_F^*(\Lambda + A)I_F;$$

Рівняння (3) запишеться у вигляді:

$$\Upsilon u_F = I_F^* f$$

Нехай F – простір розмірності n , $\{h_1, \dots, h_n\}$ – його базис. Розглянемо відображення $C: R^n \rightarrow F$, що діє за правилом:

$$\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i h_i = u_F$$

Це відображення – неперервна бієкція між R^n та F . Очевидно, що

$|a|_1 := \|Ca\| \quad \forall a \in R^n$ – норма в R^n . Оскільки у скінченновимірному просторі всі норми еквівалентні, то існує $c > 0$, таке, що:

$$|a| \leq c |a|_1 = c \|Ca\|.$$

Визначимо оператор $B: R^n \rightarrow R^n$ за правилом:

$$Ba = \{b_1, \dots, b_n\}, \quad b_i = \langle A Ca - I_F^* f, h_i \rangle.$$

Оскільки Y – радіально неперервний і з напівобмеженою варіацією, то він (за лемою 2) демінеперервний, отже оператор B – неперервний. Із коерцитивності Y випливає, що для достатньо великих $R_1 > 0$ виконується:

$$\left(\frac{\langle Yu_F, u_F \rangle}{\|u_F\|} - \|I_F^* f\|_* \right) \|u_F\| \geq 0, \text{ де } \|u_F\| \geq R_1.$$

Тому для $|a| = R := R_1 c$

$$\begin{aligned} (Ba, a) &= \sum_{i=1}^n b_i a_i = \langle Yu_F, u_F \rangle - \langle I_F^* f, u_F \rangle \geq \\ &\geq \left(\frac{\langle Yu_F, u_F \rangle}{\|u_F\|} - \|I_F^* f\|_* \right) \|u_F\| \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, за лемою 3, існує $a_F \in R^n$, що $Ba_F = 0$.

Значить, для $u_F = Ca_F$

$$\langle Yu_F, h_i \rangle = \langle I_F^* f, h_i \rangle, i = 1, \dots, n$$

З того що $\{h_1, \dots, h_n\}$ – базис в F та того, що $Yu_F, I_F^* f \in F^*$ випливає, що справджується рівність:

$$\langle Yu_n, v \rangle = \langle I_F^* f, v \rangle \quad \forall v \in F.$$

Отже, u_F є розв'язком рівняння (3).

$$\begin{aligned} \|u_F\|(\gamma(\|u_F\|) - \|\Lambda 0\|_*) &\leq \langle Au_F + \Lambda u_F, u_F \rangle = \\ &= \langle f, u_F \rangle \leq \|f\|_* \|u_F\|. \end{aligned}$$

Звідси:

$$\gamma(\|u_F\|) \leq \|f\|_* + \|\Lambda 0\|_*.$$

$$\begin{aligned} \langle Au_F, u_F \rangle - \|\Lambda 0\|_* \|u_F\| &\leq \langle \Lambda u_F + Au_F, u_F \rangle = \\ &= \langle f, u_F \rangle \leq \|f\|_* \|u_F\| \end{aligned}$$

Звідси:

$$\langle Au_F, u_F \rangle \leq \|u_F\|(\|\Lambda 0\|_* + \|f\|_*).$$

За наслідком з леми 1, існує $M > 0$ таке, що $\|u_F\| \leq M$, $\|Au_F\| \leq M$, де M – незалежна від F константа.

Доведення теореми 1. Позначимо через Φ множину всіх скінченновимірних підпросторів F в $D(\Lambda)$ і для кожного $F_0 \in \Phi$ покладемо

$$U_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \{ \{u_F, Au_F\} \in F \times X^* \mid u_F \text{ задовольняє рівняння (2)} \}.$$

За тільки що доведеною лемою множина U_{F_0} не пуста і $U_{F_0} \in K$ для деякої, незалежної від вибору U_{F_0} кулі $K \subset X \times X^*$. Якщо $F_1, \dots, F_n \in \Phi$ – довільні скінченновимірні підпростори в $D(\Lambda)$, то для кожного підпростору

$F \in \Phi$, такого, що $F \supset \bigcup_{i=1}^n F_i$, виконується включення

$$\bigcap_{i=1}^n U_{F_i} \supset U_F \neq \emptyset$$

За наслідком з [2, Гл. 1, Теорема 5.10], існує точка $\{u, \omega\} \in X \times X^*$, яка для довільного $F \in \Phi$ належить слабкому замиканню множини U_F . Покажемо, що u є розв'язком рівняння (1). Нехай $y \in D(\Lambda)$ і $x \in X$ – довільні елементи. Виберемо $F \in \Phi$ так, щоб $y \in F$. Тоді для $\{u_F, Au_F\} \in U_F$ маємо

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Lambda u_F + Au_F - f, y - u_F \rangle = \\ &= \langle \Lambda y + Au_F - f, y - u_F \rangle + \\ &+ \langle \Lambda u_F - \Lambda y, y - u_F \rangle \leq \\ &\leq \langle \Lambda y + Au_F - f, y - u_F \rangle \leq \\ &\leq \langle \Lambda y + Au_F - f, y - u_F \rangle + \\ &+ \langle Ax - Au_F, x - u_F \rangle + C_R(\|x - u_F\|''). \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} -C_R(\|x - u_F\|'') &\leq \langle \Lambda y + Au_F - f, y - u_F \rangle + \\ &+ \langle Ax - Au_F, x - u_F \rangle. \end{aligned}$$

Оскільки $\{u, \omega\}$ лежать у слабкому замиканні множини U_F , то ми можемо вибрати послідовність $\{u_i, Au_i\} \in U_F$ так, щоб $u_i \rightarrow u$ в X

і $Au_i \rightarrow w$ в X^* . Замінюючи в останній нерівності $\{u_f, Au_f\}$ на $\{u_i, Au_i\}$ отримуємо, що для довільних $x \in X$ та $y \in D(\Lambda)$.

$$\begin{aligned} -C_R(\|x-u\|') &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} (\langle \Lambda y + Au_i - f, y - u_i \rangle + \\ &+ \langle Ax - Au_i, x - u_i \rangle) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\langle \Lambda y - f, y - u_i \rangle + \\ &+ \langle Ax, x - u_i \rangle + \langle Au_i, y - x \rangle) = \langle \Lambda y - f, y - u \rangle + \\ &+ \langle Ax, x - u \rangle + \langle w, y - x \rangle = \langle \Lambda y - f + w, y - u \rangle + \\ &+ \langle Ax - w, x - u \rangle. \end{aligned}$$

Поклавши в цій нерівності $x = u$, отримуємо, що

$$0 \leq \langle \Lambda y - f + w, y - u \rangle \quad \forall y \in D(\Lambda).$$

Звідси, з максимальної монотонності оператора Λ випливає, що $u \in D(\Lambda)$ і $\Lambda u = f - w$. При $y = u$, з нерівності отримуємо, що

$$-C_R(\|x-u\|') \leq \langle Ax - w, x - u \rangle \quad \forall x \in X.$$

Тому, за лемою 2, $Au = w$. Отже, $\Lambda u + Au = f$.

Отже, в роботі розглянуто клас операторів з напівобмеженою варіацією, доведено теорему про розв'язність класу операторних рівнянь, в яких ліва частина є сумою двох радіально неперервних операторів – максимально монотонного, та коерцитивного з напівобмеженою варіацією.

Список використаних джерел

1. Березанський У. М., Усс Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. – К.: Выща школа, 1990. – 600 с.
2. Гаевский Х., Греггер К., Захариае К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 337.
3. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959.
5. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 257 с.
6. Рудин У. Функциональный анализ. – Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 442 с.
7. Слюсарчук В. Ю. Дифференціальні рівняння в банахових просторах. – Рівне: Вид-во Національного університету водного господарства та природокористування, 2006. – 314 с.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.

Надійшла до редколегії 25.10.07

УДК 531.39, 517.977

Олександр Л. Зуєв, к.ф.-м.н., докторант

Стабілізація просторових коливань моделі пружної системи

Розглянуто системи звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних, які описують просторові коливання балки Ейлера-Бернуллі з масою на кінці. Розглянута лінійна система містить пару незалежних керуючих моментів та розпадається на два диференціальних рівняння у гільбертовому просторі. Запропоновано керування зі зворотним зв'язком, що забезпечує сильну стійкість стану рівноваги за Ляпуновим. Доведення основного результату ґрунтується на теорії сильно неперервних напівгруп.

Ключові слова: пружна балка, керування зі зворотним зв'язком, функціонал Ляпунова, сильно неперервна напівгрупа.

E-mail: al_zv@mail.ru

Представив професор В.В. Мелешко

1. Вступ

Дослідженню моделей гнучких роботів-маніпуляторів присвячено низку робіт у галузі математичної теорії керування системами з розподіленими параметрами [5, 8-10, 12, 14]. Одним з найбільш ефективних методів аналізу стійкості цих систем та синтезу керувань зі зворотним зв'язком є прямий метод Ляпунова, який дозволяє також дослідити більш загальні властивості сімейства розв'язків, зокрема, стійкість по відношенню до частини змінних та властивості граничних множин [6, 15]. В роботах [7, 12, 15] методом функціоналів Ляпунова отримано керування зі зворотним зв'язком у явному вигляді для нелінійних систем диференціальних рівнянь, що моделюють обертальний рух балки Ейлера-Бернуллі.

Слід відзначити, що у відомих попередніх публікаціях з проблем керування нескінченновимірними гібридними системами з пружними балками було розглянуто тільки моделі балки з вільним кінцем або точковою масою на кінці [12, 15].

У статті [1] запропоновано математичну модель маніпулятора з гнучкими ланцюгами у вигляді балок Ейлера-Бернуллі з вантажем у полі сили тяжіння. Ця модель враховує розподіл мас твердих тіл і телескопічні зсуви ланцюгів. Дана робота продовжує дослідження моделі [1] для

A.L. Zuyev, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Habilitant

Stabilization of the spatial oscillations of an elastic system model

A system of ordinary and partial differential equations describing the spatial oscillations of an Euler-Bernoulli beam with a tip mass is considered. The linear system considered is actuated by two independent controls and separated onto a pair of differential equations in a Hilbert space. A feedback control ensuring strong stability of the equilibrium in the sense of Lyapunov is proposed. The proof of main result is based on the theory of strongly continuous semigroups.

Key Words: flexible beam, feedback control, Lyapunov functional, strongly continuous semigroup.

випадку маніпулятора з одним ланцюгом. Буде запропоновано перетворення, що зв'язує моменти сил з керуючими параметрами. Такий підхід дозволить використати зручні позначення при дослідженні рівнянь руху та описати керуючі моменти за допомогою перетворення зі зворотним зв'язком. Далі буде доведено стійкість стану рівноваги системи зі зворотним зв'язком при досить загальних припущеннях, коли щільність балки та моменти інерції перетину залежать від просторової координати.

2. Рівняння руху

В роботі [1] отримано рівняння руху механічної системи у вигляді маніпулятора, що складається з n балок Ейлера-Бернуллі та трьох твердих тіл (платформи, маточини, вантажу). Розглянемо далі окремий випадок такої системи з $n=1$ і позначимо за l довжину балки. Таким чином, у момент часу t компоненти відносного зсуву точки центральної лінії балки з просторовою координатою $x \in [0, l]$ визначаються функціями $y(x, t)$ та $z(x, t)$ у відповідній рухомій декартовій системі координат. Зазначена система координат відповідає послідовним обертанням фіксованої системи координат на кут $\varphi_T(t)$ у горизонтальній площині та $\varphi_R(t)$ у вертикальній

площині. Система перетворює такі обертання під дією керуючих моментів M_T та M_R , що прикладені до маточини в нижній точці балки. Будемо припускати, що тверде тіло (вантаж) жорстко приєднано до верхньої частини балки у власному центрі мас (тобто $\varphi_J = 0$, $c = 0$ у позначеннях статті [1]).

Для кожного значення φ_R^0 існує керуючий момент $M_R = M_R^0$, що реалізує стан рівноваги $\varphi_T(t) = 0$, $\varphi_R(t) = \varphi_R^0$, $y(x, t) = 0$, $z(x, t) = z_0(x)$ розглянутої механічної системи. Система лінеаризованих рівнянь руху в околі такого стану рівноваги має вигляд [1]:

$$\ddot{y}(x, t) + \frac{1}{\rho}(c_z y''(x, t))'' = \psi_T(x) \ddot{\varphi}_T, \quad x \in (0, l), \quad (1)$$

$$\ddot{z}(x, t) + \frac{1}{\rho}(c_y \ddot{z}''(x, t))'' = g \ddot{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - x \ddot{\varphi}_R, \quad (2)$$

$$y|_{x=0} = \ddot{z}|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = \ddot{z}'|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{m}(c_z y'')' - \ddot{y} + \psi_T(x) \ddot{\varphi}_T \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$-c_z y'' - J_3 \ddot{y}' + J_3 \psi_T(x) \ddot{\varphi}_T \Big|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{m}(c_y \ddot{z}')' + g \ddot{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - \ddot{z} - l \ddot{\varphi}_R \Big|_{x=l} = 0, \quad (6)$$

$$c_y \ddot{z}'' + J_2(\ddot{\varphi}_R + \ddot{z}') \Big|_{x=l} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \{I_0 + (I_1 + J_1) \sin^2 \varphi_R^0 + (I_3 + J_3) \cos^2 \varphi_R^0 + \\ & + m_0(R - d \cos \varphi_R^0)^2 + m(R - l \cos \varphi_R^0)^2 + \\ & + \int_0^l (R - x \cos \varphi_R^0)^2 \rho dx\} \ddot{\varphi}_T + \\ & + \int_0^l (R - x \cos \varphi_R^0) \ddot{y} \rho dx + \\ & + \{mR \ddot{y} - (m \ddot{y} + J_3 \ddot{y}') \cos \varphi_R^0\} \Big|_{x=l} = M_T, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{I_2 + J_2 + m_0 d^2 + m l^2 + \int_0^l x^2 \rho dx\} \ddot{\varphi}_R + \\ & + \int_0^l \ddot{z} x \rho dx + \{m l \ddot{z} + J_2 \ddot{z}'\} \Big|_{x=l} - \\ & - g \left\{ \int_0^l \ddot{z} \rho dx + m \ddot{z} \Big|_{x=l} + \right. \\ & + \left. (m_0 d + m l + \int_0^l x \rho dx) \ddot{\varphi}_R \right\} \sin \varphi_R^0 - \\ & - g \left\{ \int_0^l z_0 \rho dx + m z_0(l) \right\} \ddot{\varphi}_R \cos \varphi_R^0 = \tilde{M}_R, \quad (9) \end{aligned}$$

де

$$\tilde{z}(x, t) = z(x, t) - z_0(x), \quad \tilde{\varphi}_R(t) = \varphi_R(t) - \varphi_R^0,$$

$$\tilde{M}_R = M_R - M_R^0,$$

$$\psi_T(x) = x \cos \varphi_R^0 - z_0(x) \sin \varphi_R^0 - R,$$

точка позначає похідну за часом t , а штрих – похідну за просторовою координатою x . У роботі [1] наведено процедуру для обчислення форми рівноваги $z_0(x)$ та моменту M_R^0 .

Параметри системи (1)–(9) мають таку фізичну інтерпретацію: $\rho(x)$ – маса на одиницю довжини балки; $c_z(x) = E(x)I_z(x)$, $c_y(x) = E(x)I_y(x)$; $E(x)$ – модуль Юнга; $I_z(x)$ та $I_y(x)$ – моменти інерції поперечного перетину балки відносно відповідних осей z та y ; m – маса твердого тіла (вантажу); J_1 , J_2 , J_3 – головні центральні моменти інерції твердого тіла (вантажу); m_0 – маса маточини; I_1 , I_2 , I_3 – моменти інерції маточини; R – радіус платформи, відносно якої обертається маточина; I_0 – момент інерції платформи; d – відстань між початком рухомої системи координат та центром мас маточини.

Для спрощення запису цих рівнянь, підставимо вирази (1), (2), (4)–(7) для $\ddot{y}(x, t)$, $\ddot{z}(x, t)$, $\ddot{y}$, $\ddot{y}'$, $\ddot{z}$, $\ddot{z}'$ у співвідношення (8), (9) та здійснимо інтегрування за частинами, враховуючи граничні умови (3). В результаті рівняння (8) та (9) приймуть такий вигляд:

$$\ddot{\varphi}_T = u_T, \quad \ddot{\varphi}_R = u_R, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} u_T = & \{I_0 + (I_1 + J_1) \sin^2 \varphi_R^0 + m_0(R - d \cos \varphi_R^0)^2 + \\ & + (I_3 \cos \varphi_R^0 + J_3 z_0(l) \sin \varphi_R^0) \cos \varphi_R^0 + \\ & + (m(l \cos \varphi_R^0 - R) z_0(l) + \\ & + \int_0^l (x \cos \varphi_R^0 - R) z_0 \rho dx) \sin \varphi_R^0\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ M_T - \left(R(c_z y'')' + c_z y'' \cos \varphi_R^0 \right) \Big|_{x=0} \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_R = & \{I_2 + m_0 d^2\}^{-1} \times \{ \tilde{M}_R + c_y \ddot{z}'' \Big|_{x=0} + \\ & + g \left(\int_0^l \ddot{z} \rho dx + m \ddot{z} \Big|_{x=l} + m_0 d \right) \sin \varphi_R^0 + \\ & + g \left(\int_0^l z_0 \rho dx + m z_0(l) \right) \ddot{\varphi}_R \cos \varphi_R^0 \}. \quad (12) \end{aligned}$$

Для кожних функцій $\tilde{\varphi}_R(t)$, $y(\cdot, t)$, $\tilde{z}(\cdot, t)$, формули (11), (12) визначають взаємно однозначну відповідність між моментами

$(M_T, \tilde{M}_R)$ та кутовими прискореннями (u_T, u_R) .
Тому будемо далі розглядати $(u_T, u_R) \in R^2$ як
керування для лінійної системи (1)-(7), (10).

3. Основні результати

Розглянемо лінійний простір

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} : \begin{array}{l} \eta \in H^2(0, l), \zeta \in L_2(0, l), \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0, \\ \phi, \omega, p, q \in R \end{array} \right\},$$

де $H^k(0, l)$ - простір Соболева функцій з $L_2(0, l)$,
що мають все узагальнені похідних порядку до k
включно з $L_2(0, l)$. Для елементів

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \phi_1 \\ \omega_1 \\ p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \in X, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \zeta_2 \\ \phi_2 \\ \omega_2 \\ p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} \in X,$$

скалярний добуток визначимо формулою

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^l (\eta_1''(x)\eta_2''(x) + \zeta_1(x)\zeta_2(x))dx + \\ + \phi_1\phi_2 + \omega_1\omega_2 + p_1p_2 + q_1q_2.$$

Легко встановити, що норма $\|\xi\|_X = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_X}$
еквівалентна стандартній нормі в просторі
 $H^2(0, l) \times L_2(0, l) \times R^4$ (див. напр. [4, гл. 3]); отже,
 $(X, \|\cdot\|_X)$ - гільбертів простір.

Для запису системи рівнянь (1)-(7), (10) в
компактній формі, введемо лінійний оператор
 $A: D(A) \rightarrow X$ та елемент $B \in X$ наступним
чином:

$$A: \xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\frac{1}{\rho}(c\eta'')'' + \gamma\phi \\ \omega \\ 0 \\ \gamma\phi + \frac{1}{m}(c\eta'')'|_{x=l} \\ -\frac{c}{J}\eta''|_{x=l} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ 1 \\ \psi(l) \\ \psi'(l) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де областю визначення оператора A є множина

$$D(A) = \left\{ \xi \in X : \begin{array}{l} \eta \in H^4(0, l), \zeta \in H^2(0, l), \\ \zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \\ p = \zeta(l), q = \zeta'(l) \end{array} \right\}. \quad (14)$$

Передбачається, що $c(x) > 0$ та $\psi(x)$ - функції
класу $C^2[0, l]$; $J > 0$ та γ - константи.

Нехай $(y(x, t), \tilde{z}(x, t), \varphi_T(t), \tilde{\varphi}_R(t))$ є класичним
розв'язком задачі (1)-(7), (10) з керуванням
 $(u_T(t), u_R(t))$ для $0 \leq t < \tau$, $\tau \leq +\infty$. Позначимо

$$\xi_T(t) = \begin{pmatrix} y(\cdot, t) \\ \dot{y}(\cdot, t) \\ \varphi_T(t) \\ \dot{\varphi}_T(t) \\ \dot{y}(l, t) \\ \dot{y}'(l, t) \end{pmatrix}, \quad \xi_R(t) = \begin{pmatrix} \tilde{z}(\cdot, t) \\ \dot{\tilde{z}}(\cdot, t) \\ \tilde{\varphi}_R(t) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_R(t) \\ \dot{\tilde{z}}(l, t) \\ \dot{\tilde{z}}'(l, t) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тоді $\xi_T(t) \in D(A)$ та $\xi_R(t) \in D(A)$ для всіх
 $t \in [0, \tau)$. Розглянемо пару (A_T, B_T) , яка
відповідає позначенням для (A, B) з
 $\psi(x) = \psi_T(x)$, $c(x) = c_z(x)$, $J = J_3$, $\gamma = 0$ в
формулі (13). Аналогічно, нехай (A_R, B_R) - пара,
що відповідає випадку $\psi(x) = -x$, $c(x) = c_y(x)$,
 $J = J_2$, $\gamma = g \sin \varphi_R^0$ у визначенні (A, B) . Таким
чином, граничну задачу (1)-(7), (10) зведено до
такої системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{\xi}_T = A_T \xi_T + B_T u_T, \quad (16)$$

$$\dot{\xi}_R = A_R \xi_R + B_R u_R, \quad (17)$$

де (ξ_T, ξ_R) - фазовий вектор, (u_T, u_R) - вектор
керування. Надалі будемо вважати цю систему
абстрактним формулюванням задачі (1)-(7), (10) з
 $\xi_T, \xi_R \in X$ та $u_T, u_R \in R$. Оскільки система (16),
(17) розпадається на дві незалежні підсистеми, то
проблему стабілізації можна розв'язувати окремо
по відношенню до компонент ξ_T та ξ_R .
Сформулюємо основний результат у цьому
напрямку.

Теорема 1. Розглянемо задачу Коші при $t \geq 0$:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu, \quad (18)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \in X, \quad (19)$$

де A, B визначаються формулами (13),
 $u = h(\xi)$,

$$h(\xi) = -\frac{1}{\beta} \left\{ k\omega + \left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho \psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi + \right. \\ \left. + \int_0^l c\eta'' \psi'' dx + (c\eta'' \psi' - (c\eta'')' \psi) \Big|_{x=0} - \right. \\ \left. - \gamma \left(\int_0^l \rho \eta dx + m\eta(l) \right) \right\}, \quad (20)$$

$k > 0$ - довільна константа, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ - достатньо великі константи.

Тоді узагальнена задача Коші (18), (19) з керуванням $u = h(\xi)$ коректна при $t \geq 0$, та її розв'язок $\xi = 0$ є стійким за Ляпуновим, а саме, для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що будь-який розв'язок $\xi(t)$ задачі (18), (19) з $u = h(\xi)$ задовольняє умові

$$\|\xi_0\|_X < \delta \Rightarrow \|\xi(t)\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо квадратичний функціонал в просторі X :

$$2V(\xi) = \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l \left\{ (\zeta - \psi\omega)^2 \rho + \eta''^2 c \right\} dx + \\ + m \{ p - \psi(l)\omega \}^2 + J \{ q - \psi'(l)\omega \}^2 - \\ - 2\gamma\phi \left\{ \int_0^l \eta\rho dx + m\eta(l) \right\}. \quad (21)$$

Обчислимо похідну функціонала V в силу рівняння (18) при $\xi \in D(A)$:

$$\dot{V}(\xi) = \langle \nabla V(\xi), A\xi + Bu \rangle = \\ = \int_0^l (c\zeta''\eta'' - \zeta \cdot (c\eta'')'') dx + (p(c\eta'')' - qc\eta'') \Big|_l + \\ + \{ \alpha\phi + \beta\omega + \int_0^l (\psi \cdot (c\eta'')'' - \rho\gamma(\phi\psi + \eta)) dx + \\ + (c\psi'\eta'' - \psi \cdot (c\eta'')' - m\gamma(\phi\psi + \eta)) \Big|_{x=l} \} \omega. \quad (22)$$

Користуючись формулою інтегрування за частинами та граничними умовами (14), отримуємо:

$$\int_0^l \zeta \cdot (c\eta'')' dx = \zeta \cdot (c\eta'')' \Big|_{x=0} - \int_0^l \zeta' \cdot (c\eta'')' dx = \\ = (\zeta \cdot (c\eta'')' - \zeta' c\eta'') \Big|_{x=l} + \int_0^l \zeta'' c\eta'' dx, \\ \int_0^l \psi \cdot (c\eta'')'' dx = \psi \cdot (c\eta'')'' \Big|_{x=0} - \int_0^l \psi' (c\eta'')' dx =$$

$$= (\psi \cdot (c\eta'')' - \psi' c\eta'') \Big|_{x=0} + \int_0^l \psi'' c\eta'' dx.$$

Підставимо ці формули до (22) та виразимо $p = \zeta(l)$, $q = \zeta'(l)$ з (14). В результаті вираз для $\dot{V}$ прийме такий вигляд:

$$\dot{V}(\xi) = \left\{ \alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho \psi dx + m\psi(l) \right) \right\} \phi + \beta\omega + \\ + \int_0^l c\psi''\eta'' dx + (c\psi'\eta'' - \psi \cdot (c\eta'')') \Big|_{x=0} - \\ - \gamma \left(\int_0^l \rho \eta dx + m\eta(l) \right) \omega. \quad (23)$$

Якщо визначити керування зі зворотним зв'язком $u = h(\xi)$ за формулою (20) то з формули (23) випливає

$$\dot{V}(\xi) = -k\omega^2 \leq 0, \quad (k = \text{const} > 0). \quad (24)$$

На наступному кроці доведемо, що функціонал $V(\xi)$ задовольняє оцінкам

$$M_1 \|\xi\|_X^2 \leq 2V(\xi) \leq M_2 \|\xi\|_X^2 \quad (25)$$

з деякими константами $0 < M_1 \leq M_2 < +\infty$. З одного боку, використовуючи нерівності $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ та $2ab \leq a^2 + b^2$ в (21), отримуємо оцінку

$$2V(\xi) \leq \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l (c\eta''^2 + 2(\zeta^2 + \psi^2\omega^2)\rho) dx + \\ + 2m(p^2 + \psi^2(l)\omega^2) + 2J(q^2 + \psi'^2(l)\omega^2) + \\ + \gamma^2\phi^2 + 2 \left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 + 2(m\eta(l))^2. \quad (26)$$

З нерівності Коші-Буняковського випливає, що

$$\left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 \leq \int_0^l \eta^2 dx \int_0^l \rho^2 dx, \quad (27)$$

$$\eta^2(l) = \left(\int_0^l \eta' dx \right)^2 \leq \int_0^l dx \int_0^l \eta'^2 dx. \quad (28)$$

Функції $\eta(x)$ та $\eta'(x)$ при граничних умовах $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ задовольняють нерівності Фрідрікса (Віртінгера) наступного виду ([9, с. 440]):

$$\int_0^l \eta^2 dx \leq \frac{l^2}{2} \int_0^l \eta'^2 dx \leq \frac{l^4}{4} \int_0^l \eta''^2 dx. \quad (29)$$

Наслідком нерівностей (27)-(29) є оцінка

$$\left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 + m^2\eta^2(l) \leq \int_0^l \eta^2 dx \int_0^l \rho^2 dx + \\ + lm^2 \int_0^l \eta'^2 dx \leq \frac{l^3}{2} \left(m^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) \int_0^l \eta''^2 dx. \quad (30)$$

Користуючись цією нерівністю в (26), отримуємо оцінку $2V(\xi) \leq M_2 \|\xi_T\|_X^2$,

$$M_2 = \max\{\alpha + \gamma^2, 2m, 2J, 2 \max_{x \in [0, l]} \rho(x),$$

$$\beta + 2 \int_0^l \psi^2 \rho dx + 2J\psi'^2(l) + 2m\psi^2(l),$$

$$l^3 \left(m^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) + \max_{x \in [0, l]} c(x)\}.$$

З іншого боку, з нерівності $a^2 = (a - b + b)^2 \leq 2(a - b)^2 + 2b^2$ випливає, що $(a - b)^2 \geq a^2/2 - b^2$. Ця формула разом з нерівностями (30) та $-2ab \geq -\chi^2 a^2 - b^2/\chi^2$ при $\chi \neq 0$ дозволяє отримати таку оцінку в формулі (21):

$$2V(\xi) \geq \alpha \phi^2 + \beta \omega^2 + \int_0^l (c\eta''^2 + \frac{\rho}{2} \xi^2 - \rho \psi^2 \omega^2) dx +$$

$$+ m(\frac{\rho^2}{2} - \psi^2(l)\omega^2) + J(\frac{q^2}{2} - \psi'^2(l)\omega^2) -$$

$$- \chi^2 \gamma^2 \phi^2 - \frac{1}{\chi^2} \left(\int_0^l \eta \rho dx + m\eta(l) \right)^2 \geq$$

$$\geq (\alpha - \chi^2 \gamma^2) \phi^2 + \frac{m}{2} \rho^2 + \frac{J}{2} q^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \xi^2 \rho dx +$$

$$+ (\beta - \int_0^l \rho \psi^2 dx - m\psi^2(l) - J\psi'^2(l)) \omega^2 +$$

$$+ \left\{ \min_{[0, l]} c - \frac{l^3}{\chi^2} \left(m^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) \right\} \int_0^l \eta''^2 dx. \quad (31)$$

З формули (31) випливає оцінка $2V(\xi) \geq M_1 \|\xi\|_X^2$, якщо

$$M_1 = \min\{\alpha - \chi^2 \gamma^2, \frac{m}{2}, \frac{J}{2}, \frac{1}{2} \min_{x \in [0, l]} \rho(x),$$

$$\beta - \int_0^l \rho \psi^2 dx - m\psi^2(l) - J\psi'^2(l),$$

$$\min_{x \in [0, l]} c(x) - \frac{l^3}{\chi^2} \left(m^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right)\} > 0,$$

якщо

$$\chi^2 > \frac{l^3}{\min_{x \in [0, l]} c(x)} \left(m^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right),$$

$$\alpha > \chi^2 \gamma^2, \beta > \int_0^l \rho \psi^2 dx + m\psi^2(l) + J\psi'^2(l).$$

Будемо далі вважати, що константи α, β, χ задовольняють цим нерівностям.

Оцінка (25) показує, що норми $\|\xi\|_X$ та

$\|\xi\|_V = \sqrt{V(\xi)}$ є еквівалентними в X . Запишемо замкнуту систему (18) з керуванням $u = h(\xi)$ у вигляді зворотного зв'язку (20) таким чином:

$$\dot{\xi} = \tilde{A}\xi, \quad \tilde{A} = A + Bh,$$

де $D(\tilde{A}) = D(A)$ щільно в X . Використовуючи нерівність (24), можна показати, що $\tilde{A}$ - m -дисипативний оператор у просторі X з нормою $\|\cdot\|_V$. Тоді оператор $\tilde{A}$ є інфінітезимальним генератором стискаючої C_0 напівгрупи операторів $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ в X (відносно норми $\|\cdot\|_V$) за теоремою Люмера-Філіпса [13, гл. 1.4]. Це значить, що для кожного $\xi_0 \in X$ задача Коші (18), (19) з $u = h(\xi)$ має єдиний узагальнений (mild) розв'язок $\xi(t) = e^{t\tilde{A}}\xi_0$, $t \geq 0$, і такий розв'язок є класичним при $\xi_0 \in D(A)$. Оскільки $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ - стискаюча напівгрупа, то

$$\|\xi(t)\|_V \leq \|\xi_0\|_V, \quad \forall t \geq 0.$$

Звідси випливає (з урахуванням оцінки (25)), що

$$\|\xi(t)\|_X^2 \leq \frac{2V(\xi(t))}{M_1} \leq \frac{2V(\xi_0)}{M_1} \leq \frac{M_2}{M_1} \|\xi_0\|_X^2.$$

Отримана нерівність доводить сильну стійкість стану рівноваги $\xi = 0$ за Ляпуновим (при цьому можна задати $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{M_1/M_2}$ у визначенні стійкості).

4. Висновки

Запропоноване керування зі зворотним зв'язком $u = h(\xi)$ забезпечує стійкість тривіального розв'язку диференціального рівняння (18) в гільбертовому просторі. Хоча основний результат даної роботи стосується лише неасимптотичної стійкості, одним з можливих напрямків подальшої роботи є дослідження граничної множини для розв'язків $\xi(t)$ замкненої системи при $t \rightarrow +\infty$ за допомогою принципу інваріантності [2, 3, 6, 11] із застосуванням функціоналу Ляпунова (21) та його похідної (24).

Використовуючи формулу (20) для кожного рівняння системи (16), (17) та враховуючи зображення (15), запишемо вирази стабілізуючих керувань зі зворотним зв'язком для горизонтальної та вертикальної компонент руху окремо:

$$u_T = -\frac{1}{\beta} \{ \alpha \phi_T + k \dot{\phi}_T + \int_0^l c_z y'' \psi'' dx + \\ + (c_z y'' \psi' - (c_z y'')' \psi) \big|_{x=0} \},$$

$$u_R = -\frac{1}{\beta} \{ \alpha \tilde{\varphi}_R + k \tilde{\dot{\varphi}}_R - c_y \tilde{z}'' \big|_{x=0} + \\ + g \left(\int_0^l (x \tilde{\varphi}_R - \tilde{z}) \rho dx + m(l \tilde{\varphi}_R - \tilde{z} \big|_{x=l}) \right) \sin \varphi_R^0 \}.$$

Для практичного застосування цієї схеми стабілізації треба обчислити u_T та u_R , в залежності від φ_T , $\tilde{\varphi}_R$, $\dot{\varphi}_T$, $\tilde{\dot{\varphi}}_R$, y , $\tilde{z}$ для кожного $t \geq 0$, та реалізувати відповідні керуючі моменти M_T , M_R за формулами (11), (12). Підкреслимо, що використання цього підходу не потребує інформації про похідні за часом від функцій $y(x, t)$ та $\tilde{z}(x, t)$.

Робота підтримана за рахунок бюджетних коштів МОН України, наданих як грант Президента України.

Список використаних джерел

1. Зуев А.Л. Моделирование пространственного упругого манипулятора с телескопическим движением звеньев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – 10. – С. 51-58.
2. Зуев А.Л. Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журнал. – 2006. – 58. – С. 629-637.
3. Зуев А.Л. Об относительной компактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Доповіді НАН України. – 2007. – № 2. – С. 7-12.
4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
5. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. – М.: Наука, 1989. – 368 с.
6. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
7. Coron J.-M., d'Andrea Novel B. Stabilization of a rotating body beam without damping // IEEE Trans. Autom. Control. – 1998. – 44. – P. 608-618.
8. Fattorini H.O. Infinite dimensional optimization and control theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 798 p.
9. Krabs W., Sklyar G.M. On the controllability of a slowly rotating Timoshenko beam // J. Analysis Applications. – 1999. – 18. – P. 437-448.
10. Lagnese J.E., Leugering G. Controllability of thin elastic beams and plates // The Control Handbook / Levine W.S. ed. – Boca Raton: CRC Press - IEEE Press, 1996. – P. 1139-1156.
11. LaSalle J.P. Stability theory and invariance principles // Dynamical systems. Vol. 1. Int. Symposium on Dynamical Systems. Providence 1974 / Cesari L., Hale J.K., LaSalle J.P. Eds. – New York: Academic, 1976. – P. 211-222.
12. Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O. Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. – New York: Springer, 1999. – 403 p.
13. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
14. Talebi H.A., Patel R.V., Khorasani K. Control of flexible-link manipulators using neural networks. – New York: Springer, 2001. – 370 p.
15. Zuyev A.L. Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – 41, No. 1. – P. 1-10.

Надійшла до редколегії 02.07.2007

УДК 539.3

Сергій В. Кикоть, асистент

Вимушені коливання реологічного трубопроводу з потоком рідини

У статті розглядаються вимушені коливання реологічного трубопроводу з потоком рідини при кінематичному та силовому збудженні. Дослідження двохвильових коливань проведено асимптотичним методом нелінійної механіки М. М. Крилова – М. М. Боголюбова – Ю. О. Митропольського. Розглянуто стаціонарний режим в коливних системах. Встановлено зменшення резонансних амплітуд із збільшенням швидкості руху рідини в трубопроводі при наближенні її до критичного значення.

Ключові слова: кінематичне та силове збудження, трубопровід із синтетичного матеріалу, двохвильовий коливний процес, резонанс, критична швидкість.

Представлено професором Мелешком В.В.

Вступ. У будівельній механіці та машинобудуванні об'єм використання конструкційних силових синтетичних матеріалів зростає і наближається до об'єму використання металів. Заміна металевих трубопроводів трубами із синтетичних матеріалів у всіх галузях народного господарства набуває масового характеру. Прикладні задачі динаміки трубопроводів в машинобудуванні та транспортуванні газорідних продуктів зумовлюють необхідність у вивченні механічної поведінки елементів конструкцій та інженерних споруд, які зазнають дії розподіленого рухомого інерційного навантаження.

Вихідні передумови. В роботах [1,4] встановлено двохвильовий характер динамічних процесів в конструкціях з рухомим інерційним навантаженням. Поперечні коливання яких на кожній частоті представляються у вигляді суми:

$$u_n(x, t) = \varphi_n(x) \cos \omega_n t + \psi_n(x) \sin \omega_n t$$

двох груп стоячих хвиль власних і супровідних коливань, які мають різні форми і зсунуті за фазою на прямий кут.

Особливості динамічних процесів в спадкових системах розглянуті в працях [6,9,10,11].

Sergiy V. Kykot', teaching assistant

Forced oscillations of a rheological conduit, with fluid flow.

The paper studies forced oscillations of a rheological conduit with fluid flow under kinematical and force perturbation. An investigation of double wave oscillations is conducted in the frame of N.N. Krylov – N.N. Bogolubov – Y.O. Mytropolskyi asymptotic approach of non-linear mechanics. Steady-state condition is considered in vibration systems. Decreasing of resonance amplitude is established when velocity of fluid flow in the tube increases nearing the critical value.

Key words: kinematics and forced perturbation, synthetic conduit, double wave oscillation process, resonance, critical velocity.

Метою нашої роботи є теоретичне вивчення впливу параметрів рухомого навантаження (потoku рідини) на вимушені коливання трубопроводу з реологічного спадкового матеріалу.

Постановка і розв'язання задачі. У праці представлені результати дослідження двохвильового характеру коливання трубопроводу (балки), виготовленого з реологічного (синтетичного) матеріалу, під дією рухомого інерційного навантаження (потoku рідини). Механічні властивості труби, із урахуванням передісторії навантаження, описуються формулою:

$$Q = EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} d\tau \right).$$

Тут Q – перерізувача сила, $R(t-\tau)$ – ядро релаксації напружень в матеріалі труби, яке має вигляд слабкосингулярної функції [10]

$$R(t-\tau) = be^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{-\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

Реологічні властивості трубопроводу супроводжуються дисипацією енергії коливань та певним впливом на амплітудно-фазові характеристики системи.

У рівняння руху трубопроводу входять три складові сили інерції, прикладених до несучої конструкції з боку потоку рідини, які визначаються тангенціальним, радіальним та коріолісовим прискореннями.

Вимушені коливання реологічного трубопроводу з потоком рідини при кінематичному збудженні

Прикладом кінематичного збудження вимушених коливань трубопроводу є вібрація однієї з його опор. Інтегро-диференціальне рівняння коливань механічної системи має вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 u(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right) = 0, \quad (1)$$

де $u = u(x, t)$ – поперечний прогин труби, ρ – погонна маса труби з рідиною, ρ_2 – погонна маса потоку рідини, v – швидкість руху рідини.

До рівняння (1) додаються граничні умови, що враховують вібрацію одного із кінців трубопроводу.

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 & \quad u(l, t) = h e^{ip t} \\ u^*(0, t) = 0 & \quad u^*(l, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де h – амплітуда кінематичного збудження, p – частота збудження.

У рівнянні (1) перейдемо до нової функції $w(x, t)$ згідно з формулою

$$u(x, t) = w(x, t) + \frac{h}{l} x e^{ip t}. \quad (3)$$

Тоді рівняння (1) відносно функції (3) стане неоднорідним, тобто

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right) = \\ = \left(\rho p^2 x - 2i\rho_2 v p \right) \frac{h}{l} e^{ip t}, \end{aligned} \quad (4)$$

з нульовими граничними умовами

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0 & \quad w(l, t) = 0 \\ w^*(0, t) = 0 & \quad w^*(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При переході до безрозмірних змінних

$x = x/l$, $t = \Omega t$, $\tau = \Omega \tau$, $u_1 = u/l$ інтегральний член набуває малого параметру $\varepsilon = \frac{b}{\Omega^{(1-\alpha)}}$, де l – довжина труби, $\Omega = \sqrt{EJ/\rho l^4}$ і рівняння коливань (4) зводиться до вигляду, зручного для дослідження асимптотичним методом. При побудові розв'язків в кінцевих формулах переходять до розмірних величин, тому подальше дослідження будемо проводити в розмірних змінних.

Застосування асимптотичного методу (КБМ) до дослідження вимушених коливань системи з рухомим інерційним навантаженням

Для дослідження вимушених коливань виявився зручним у використанні асимптотичний метод нелінійної механіки М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського (КБМ) [8], при використанні якого в області близькій до резонансної на розв'язок рівняння впливає розлад системи $\vartheta(\tau)$, який визначається як різниця фаз власних і вимушених коливань $\vartheta(\tau) = \psi(t) - pt$ [2].

Коливання, що описуються рівнянням (1), мають двохвиловий характер [5,7], розв'язок якого будемо шукати в просторі комплекснозначних функцій, подаючи його у вигляді асимптотичного ряду:

$$w(x, t) = a(t) X(\lambda x) e^{ip t} e^{i(\vartheta + p t)} + \varepsilon u_1(a, \psi, pt, \tau) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, pt, \tau) + \dots \quad (6)$$

в якому $u_1(a, \psi, pt, \tau)$, $u_2(a, \psi, pt, \tau)$, ... є періодичними функціями по ψ з періодом 2π , $X(\lambda x)$ – координатна функція, близька до відповідної форми власного коливання системи при нульовій швидкості руху навантаження, а повільно-змінні амплітуда $a(t)$ та фаза $\psi(t)$ коливань визначаються рівняннями першого наближення:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \vartheta, \tau), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - p(\tau) + \varepsilon B_1(a, \vartheta, \tau) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) + \varepsilon B_1(a, \vartheta, \tau). \end{aligned} \quad (7)$$

де повільно-змінна частота $\omega(\tau)$ в нульовому наближенні відповідно до алгоритму асимптотичного методу приймається рівною

частоті основного тону коливань при нульовій швидкості руху рідини і визначається за формулою

$$\omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho}} = \pi^2 \Omega.$$

У монографії [1] показано, що жорсткі конструкції під дією рухомого навантаження втрачають стійкість за формою коливань основного тону.

Будуючи наближений розв'язок рівняння (4), першу координатну функцію у випадку

шарнірного закріплення труби представимо у формі основного тону коливань $X(\lambda x) = \sin \frac{\pi x}{l}$,

$$\text{де } \lambda = \frac{\pi}{l}.$$

Диференціюючи праву частину виразу (6) та враховуючи рівняння (7), рівняння коливань (4) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho \left[-a\omega^2 + \varepsilon \left((\omega - p) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 + i \left(a(\omega - p) \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A + a \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) \right) \right] X(\lambda x) + \right. \\ & + 2\rho v \left[-a\omega (\gamma X(\lambda x) - iX^{(1)}(\lambda x)) + \varepsilon (AX(\lambda x) - \gamma aBX(\lambda x) + i(\gamma AX(\lambda x) + aBX(\lambda x))) \right] + \\ & + \rho_2 v^2 (X^{(2)}(\lambda x) - \gamma^2 X(\lambda x) + 2i\gamma X^{(1)}(\lambda x)) a + \\ & + EJ \left(X^{(4)}(\lambda x) - 6\gamma^2 X^{(2)}(\lambda x) + \gamma^4 X(\lambda x) + 4i\gamma (X^{(3)}(\lambda x) - \gamma^2 X^{(1)}(\lambda x)) \right) a \Big\} e^{i(\gamma x + \psi(t))} + \\ & + \varepsilon \left\{ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\} + \varepsilon^2 \dots = \varepsilon C \left\{ \left(\rho p^2 x - 2i\rho_2 v p \right) \frac{h}{l} e^{i p \tau} + \right. \\ & \left. + EJ \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \left(X^{(4)}(\lambda x) - 6\gamma^2 X^{(2)}(\lambda x) + \gamma^4 X(\lambda x) + 4i\gamma (X^{(3)}(\lambda x) - \gamma^2 X^{(1)}(\lambda x)) \right) a(\tau) e^{i(\gamma x + \psi(\tau))} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

де верхніми індексами в дужках вказані асимптотичних методів, прирівнюємо відповідні похідні.

У відповідності з процедурою При ε в нульовому степені:

$$\begin{aligned} L(x) = & -\rho\omega^2 X(\lambda x) - 2\rho_2 v\omega (\gamma X(\lambda x) - iX^{(1)}(\lambda x)) + \rho_2 v^2 (X^{(2)}(\lambda x) - \gamma^2 X(\lambda x) + 2i\gamma X^{(1)}(\lambda x)) + \\ & + EJ (X^{(4)}(\lambda x) - 6\gamma^2 X^{(2)}(\lambda x) + \gamma^4 X(\lambda x) + 4i\gamma (X^{(3)}(\lambda x) - \gamma^2 X^{(1)}(\lambda x))) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

та при ε в першому степені:

$$\begin{aligned} S(x) = & \left\{ \left[\rho(\omega - p) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2(\omega\rho + \rho_2 v\gamma) aB_1 + \right] X(\lambda x) + 2\rho_2 vA_1 X^{(1)}(\lambda x) + \right. \\ & + i \left\{ \left[\rho(\omega - p) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2(\omega\rho + \rho_2 v\gamma) A_1 + a\rho \frac{d\omega}{d\tau} \right] X(\lambda x) + 2\rho_2 v aB_1 X^{(1)}(\lambda x) \right\} e^{i\psi(t)} + \\ & + \left\{ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \right\} - \\ & - C \frac{h}{l} [(\rho p x \cos \gamma x - 2\rho v p \sin \gamma x) \cos \vartheta - (\rho p x \sin \gamma x + 2\rho v p \cos \gamma x) \sin \vartheta - \\ & - i((\rho p^2 x \cos \gamma x - 2\rho_2 v p \sin \gamma x) \sin \vartheta + (\rho p^2 x \sin \gamma x + 2\rho_2 v p \cos \gamma x) \cos \vartheta)] e^{i\psi(t)} - \\ & - CEJ \int_{-\infty}^t R(t-\tau) (X^{(4)}(\lambda x) - 6\gamma^2 X^{(2)}(\lambda x) + \gamma^4 X(\lambda x) + 4i\gamma (X^{(3)}(\lambda x) - \gamma^2 X^{(1)}(\lambda x))) a(\tau) e^{i\psi(\tau)} d\tau = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де залежність між фазами і розладом системи визначається співвідношенням $p t = \psi(t) - \vartheta(\tau)$.

Відокремлюючи в рівнянні (9) дійсну та уявну частини, отримаємо два диференціальних рівняння з постійними коефіцієнтами відносно

$$\begin{aligned} L_1(x) &= EJX^{(4)}(\lambda x) + (\rho_2 v^2 - 6EJ\gamma^2)X^{(2)}(\lambda x) + [EJ\gamma^4 - \rho\omega^2 - \rho_2 v\gamma(2\omega + v\gamma)]X(\lambda x) = 0 \\ L_2(x) &= 2EJ\gamma X^{(3)}(\lambda x) + [\rho_2 v(\omega + v\gamma) - 2EJ\gamma^3]X^{(1)}(\lambda x) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (9) при точному розв'язанні визначають комплексні вигляди форм $X(\lambda x)e^{i\gamma x}$, частоту $\omega(v)$ та ексцес форми $\gamma(v)$ власного коливання. При побудові наближених розв'язків рівнянь (11) осереднення доцільно проводити у формі: $\int_0^1 L_1(x)X(\lambda x)dx = 0$, $\int_0^1 L_2(x)X'(\lambda x)dx = 0$, запропонованій у науковій праці [3].

Такий підхід дає можливість визначити частоту $\omega(v)$ та ексцес $\gamma(v)$ власного коливання як функції швидкості руху рідини, параметри двохвильового процесу із системи алгебраїчних рівнянь, яку – для зручності – запишемо через безрозмірні параметри:

$$\begin{aligned} 4\theta^6 + (4(2 - v_0^2) + 3(kv_0)^2)\theta^4 + \\ + ((2 - v_0^2)^2 - (2 + v_0^2)(kv_0)^2)\theta^2 = (1 - v_0^2)(kv_0)^2 \quad (12) \\ \omega_0^2 + 2kv_0\theta\omega_0 - (\theta^4 + (6 - v_0^2)\theta^2 - v_0^2 + 1) = 0, \end{aligned}$$

де

$$\theta = \gamma \frac{l}{\pi}, \quad v_0^2 = \frac{\rho_2 v^2 l^2}{EJ\pi^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\rho\omega^2 l^4}{EJ\pi^4}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho}}.$$

З рівнянь (12) випливає, що ексцес і частота коливань залежать від швидкості руху рідини, тому при певних швидкостях рідини можливий резонанс вимушених коливань типу $\omega \approx \rho$.

З системи рівнянь (12) можна встановити, що при безрозмірному значенні швидкості $v_0^2 = 1$ труба з рухомою рідиною втрачає стійкість, тобто значення $v_0^2 = 1$ є критичним. У розмірних параметрах критична швидкість визначається формулою:

$$v_{kp} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\rho_2}}.$$

Розв'язки системи рівнянь (12) визначаються чисельно при заданих значеннях безрозмірної швидкості v_0 і коефіцієнта k .

При виборі відповідних параметрів системи,

наприклад: $\rho = 40.01132 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_2 = 31.41593 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

$k = 0.8861$, $l = 5 \text{ м}$, $R = 10 \text{ см}$ $E = 2 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

$EJ = 18.01764 \cdot 10 \text{ Нм}$, отримані значення розв'язків наведені в таблиці 1.

Зміну частоти та ексцесу при зміні швидкості руху рідини в трубопроводі до її критичного значення показано на рис.1.

Аналізуючи вигляд першого наближення розв'язку рівняння (4), побудуємо форми двох типів коливань, поява яких зумовлена силами інерції Коріоліса для рухомого навантаження / рис.2: 1 – $v_0 = 0$; 2 – $v_0 = 0.2$; 3 – $v_0 = 0.5$; 4 – $v_0 = 0.9$ /.

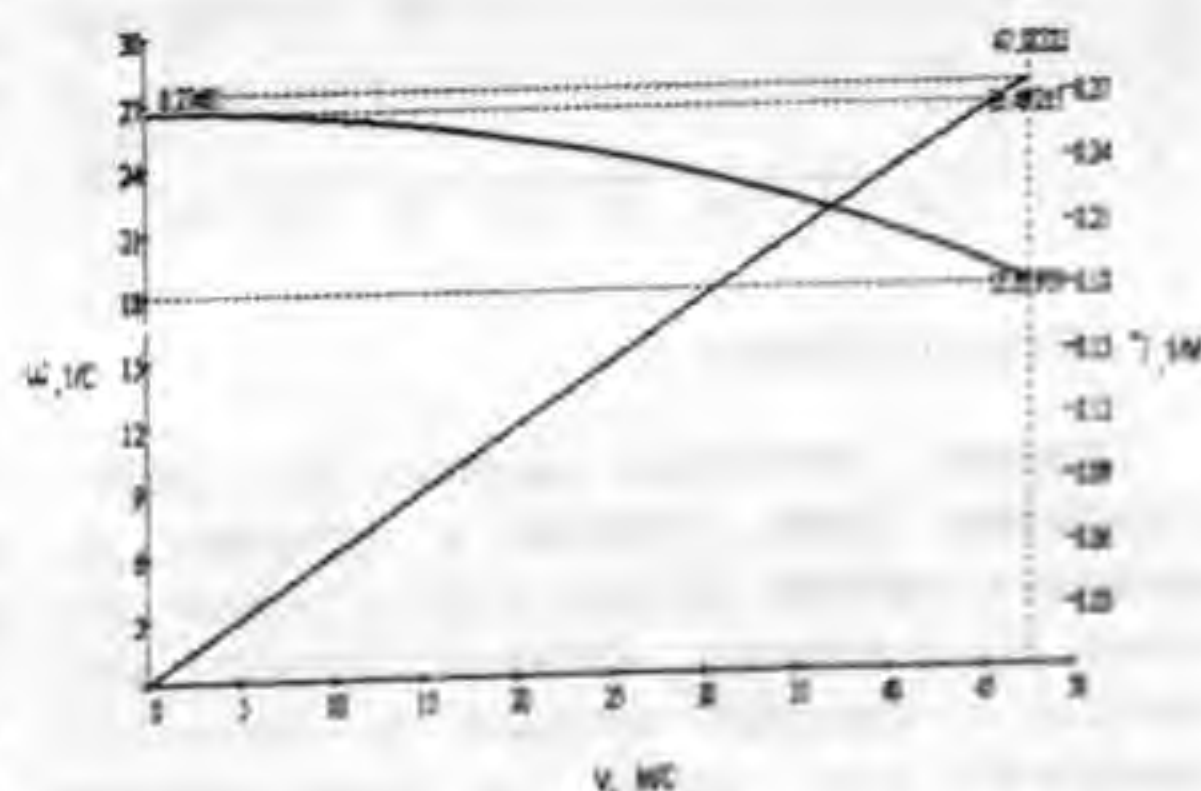


Рис.1 Графічна ілюстрація розв'язків системи (12)

Таблиця 1

Значення розв'язків системи рівнянь (12)

Безрозмірні параметри v_0, θ, ω_0											
v_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
θ	0	0.0443	0.0886	0.1329	0.1772	0.2214	0.2656	0.3095	0.3531	0.3958	0
ω_0	1	0.997	0.9878	0.9726	0.9512	0.9236	0.8897	0.8491	0.8016	0.746	0
Розмірні параметри v, γ, ω											
$v, \text{м/с}$	0	4.758	9.517	14.275	19.033	23.792	28.55	33.308	38.067	42.825	47.583
$\gamma, 1/\text{м}$	0	0.0278	0.0557	0.0835	0.1113	0.1391	0.1669	0.1945	0.2218	0.2487	0
$\omega, 1/\text{с}$	26.492	26.411	26.17	25.767	25.2	24.469	23.57	22.495	21.235	19.763	0

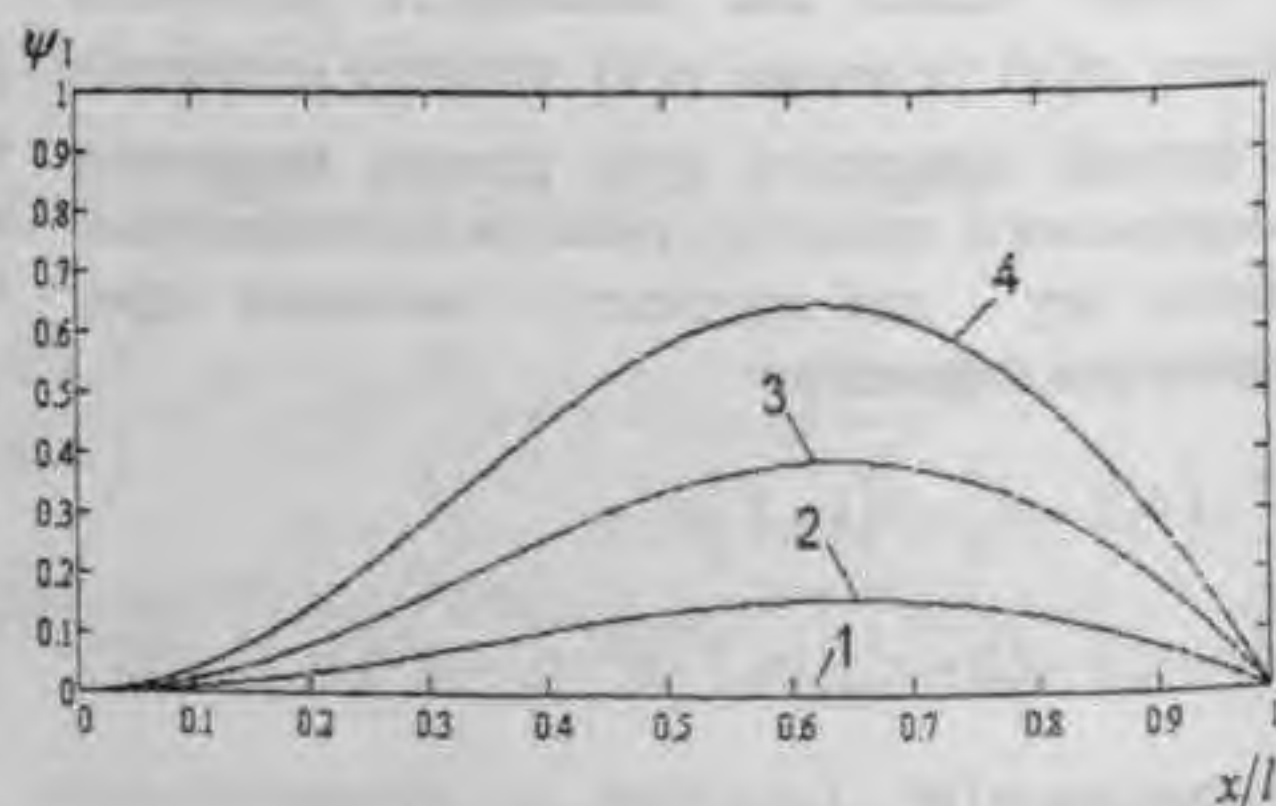
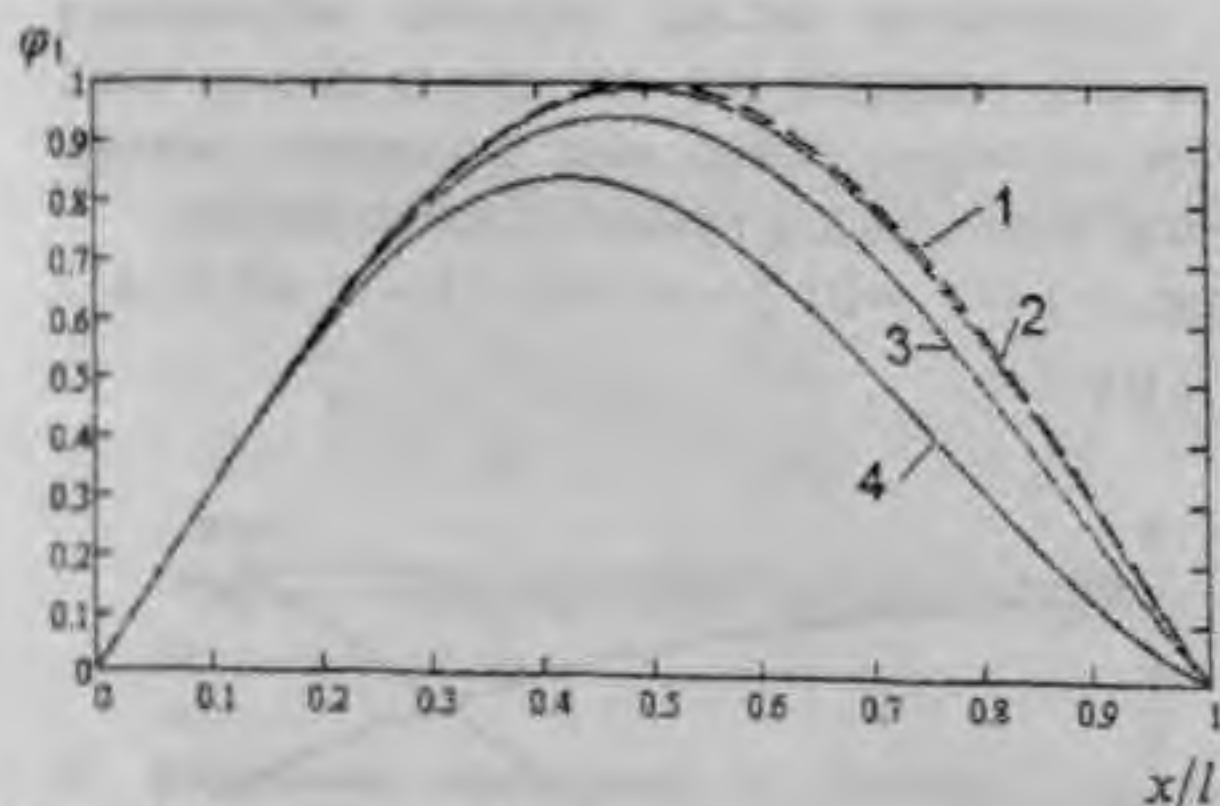


Рис. 2 Форми коливань

Отримані результати свідчать про слабку деформацію форм коливань в інтервалі до критичних значень швидкості руху рідини. Як відомо [4], у випадку коливань гнучкої труби (шланга) в першому інтервалі до критичних швидкостей руху рідини має місце суттєве деформування форм коливань, що зумовлене значно більшим значенням ексцесу γ .

Осереднення рівняння (10) необхідно проводити по геометричній та часовій координатах за законом

$$\int_0^{\psi+2\pi} \int_0^1 S(x) X(\lambda x) e^{-i\psi(t)} dx d\psi = 0. \quad (13)$$

За умовою однозначності асимптотичного розв'язку [8] необхідно, щоб виконувалася рівність

$$\int_0^{2\pi} u_1(a, \psi, pt, \tau) e^{-i\psi} d\psi = 0.$$

Після виконання умов однозначності асимптотичного розв'язку та процедури осереднення у формі (13) рівняння (10) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho(\omega - p) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2(\omega \rho + \rho_2 v \gamma) a B_1 + i \left[\rho(\omega - p) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2(\omega \rho + \rho_2 v \gamma) A_1 + a \rho \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right] = \\ = \frac{2C}{l} \frac{h}{l} \left[(\rho p^2 J_1 - 2\rho_2 v p J_2) \cos \vartheta - (\rho p^2 J_3 + 2\rho_2 v p J_4) \sin \vartheta - \right. \\ \left. - i \left[(\rho p^2 J_1 - 2\rho_2 v p J_2) \sin \vartheta + (\rho p^2 J_3 + 2\rho_2 v p J_4) \cos \vartheta \right] \right] + \\ + \frac{C}{2\pi} E J (\lambda^4 + 6(\gamma \lambda)^2 + \gamma^4) \int_0^{\psi+2\pi} \int_0^1 R(t - \tau) a(\tau) e^{i(\psi(\tau) - \psi(t))} d\tau d\psi, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$J_1 = \pi l^2 \frac{2\gamma l \sin \gamma l - [(\gamma l)^2 - \pi^2] \cos \gamma l}{[(\gamma l)^2 - \pi^2]^2},$$

$$J_3 = -\pi l^2 \frac{2\gamma l (1 + \cos \gamma l) + [(\gamma l)^2 - \pi^2] \sin \gamma l}{[(\gamma l)^2 - \pi^2]^2},$$

$$J_2 = \frac{\pi l \sin \gamma l}{\pi^2 - (\gamma l)^2}, \quad J_4 = \frac{\pi l (1 + \cos \gamma l)}{\pi^2 - (\gamma l)^2}. \quad (15)$$

Відокремлюючи в рівнянні (14) дійсну і уявну частини, одержимо систему рівнянь для визначення поправок до амплітуди і фази вимушених коливань як функцій повільного часу.

$$\rho(\omega - p) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a(\rho\omega + \rho_2 v \gamma) B_1 =$$

$$= \frac{2C}{l} \frac{h}{l} \left[(\rho p^2 J_1 - 2\rho_2 v p J_2) \cos \vartheta - (\rho p^2 J_3 + 2\rho_2 v p J_4) \sin \vartheta \right] + CEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) a \int_0^\infty R(s) \cos \omega s ds, \quad (16)$$

$$\rho(\omega - p) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma) A_1 + \rho a \frac{d\omega}{d\tau} =$$

$$= -\frac{2C}{l} \frac{h}{l} \left[(\rho p^2 J_1 - 2\rho_2 v p J_2) \sin \vartheta + (\rho p^2 J_3 + 2\rho_2 v p J_4) \cos \vartheta \right] - CEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) a \int_0^\infty R(s) \sin \omega s ds,$$

де $s = t - \tau$ – нова змінна. При осередненні по t , в інтервалі $[\psi, \psi + 2\pi]$, відслідковується еволюція ядра релаксації, внаслідок чого повільно змінна функція $a(t-s)$ може бути представлена функцією $a(t)$, а значення функції $\psi(t-s)$ – різницею: $\psi(t-s) = \omega(t-s) = \omega t - \omega s$.

З системи рівнянь (16) визначаємо поправки $A_1(a, \vartheta, \tau)$ $B_1(a, \vartheta, \tau)$, які входять до

асимптотичних рівнянь (7). Для того щоб ряд (6) формально задовольняв рівняння (4) у відповідності з асимптотичним методом A_1 та B_1 , визначаються як часткові розв'язки системи (16).

$$A_1 = -\frac{2C}{l} \frac{h}{l} \frac{m \sin \vartheta + n \cos \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)} - \frac{a}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \left(\rho \frac{d\omega}{d\tau} + CEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) \frac{b\Gamma(1-\alpha) \sin(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}} \right),$$

$$B_1 = -\frac{2C}{l} \frac{h}{l} \frac{m \cos \vartheta - n \sin \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma) a} - \frac{CEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \frac{b\Gamma(1-\alpha) \cos(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}} \quad (17)$$

$$\text{де } \varphi = \arctg \frac{\omega}{\beta},$$

$$m = \rho p^2 J_1 - 2\rho_2 v p J_2, \quad n = \rho p^2 J_3 + 2\rho_2 v p J_4.$$

Тоді рівняння для визначення амплітуди і розладу нелінійних коливань в першому наближенні запишуться у вигляді

$$\frac{da}{dt} = \frac{2h}{l^2} \frac{m \sin \vartheta + n \cos \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)} - \frac{a}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \left(\varepsilon \rho \frac{d\omega}{d\tau} + EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) \frac{b\Gamma(1-\alpha) \sin(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}} \right),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega(\tau) - p(\tau) - \frac{2h}{l^2} \frac{m \cos \vartheta - n \sin \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma) a} - \frac{EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \frac{b\Gamma(1-\alpha) \cos(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}}. \quad (18)$$

Для реальних спадкових тіл [10] при сталих конструктивних параметрах та швидкості руху рідини, відношення $\frac{\omega}{\beta} \gg 1$, функція φ близька до

$$\frac{\pi}{2}, \quad \beta^2 \approx 0 \quad \text{і} \quad \sin(1-\alpha)\varphi \rightarrow 1, \quad \cos(1-\alpha)\varphi \rightarrow 0, \\ \frac{d\omega}{d\tau} = 0. \quad \text{Тоді}$$

$$A_1^{real} = -\frac{2Ch}{l^2} \frac{m \sin \vartheta + n \cos \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)} - \\ \frac{aCEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)b\Gamma(1-\alpha)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)\omega^{1-\alpha}}, \\ B_1^{real} = -\frac{2Ch}{l^2} \frac{m \cos \vartheta - n \sin \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)a}. \quad (19)$$

Рівняння першого наближення (18) запишуться у вигляді

$$\frac{da}{dt} = \frac{2h}{l^2} \frac{m \sin \vartheta + n \cos \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)} - \\ \frac{aEJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)b\Gamma(1-\alpha)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)\omega^{1-\alpha}}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega(\tau) - p(\tau) - \frac{2h}{l^2} \frac{m \cos \vartheta - n \sin \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)a}. \quad (20)$$

Перше рівняння (20) інтегрується в квадратурах, і амплітуда коливань з точністю до

$$a = \frac{2h\rho p \sqrt{(pJ_1 - 2k^2 v J_2)^2 + (pJ_3 + 2k^2 v J_4)^2}}{l^2 [\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma] \sqrt{(\omega - p)^2 + \left(\frac{EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)b\Gamma(1-\alpha)}{2(\omega\rho + \rho_2 v \gamma)(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{1-\alpha}} \right)^2}}. \quad (22)$$

Отримане співвідношення дає можливість побудувати стаціонарні резонансні криві, що характеризують залежність a від p . У зв'язку з тим, що частота ω та ексцес форми γ залежать

$$a_r = 2 \frac{h\rho p (\sqrt{\beta^2 + p^2})^{1-\alpha} \sqrt{(pJ_1 - 2k^2 v J_2)^2 + (pJ_3 + 2k^2 v J_4)^2}}{EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)}. \quad (23)$$

Побудову резонансних кривих, що відповідають стаціонарному режиму коливань, виконаємо при наступних числових значеннях параметрів системи: $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.02 \text{ c}^{-1}$,

констант визначається за формулою $a(t) = a_0 e^{-\delta t}$, де a_0 – початкове значення амплітуди, δ – декремент, наближене значення якого представляється у вигляді:

$$\delta = \frac{(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)EJb\Gamma(1-\alpha)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)\omega^{1-\alpha}}. \quad (21)$$

Таким чином, для реальних спадкових тіл вимушені коливання реологічної труби є затухаючими коливаннями з декрементом δ .

Стаціонарний режим в коливній системі

Розглянемо стаціонарний режим в коливній системі, рух якої описується рівнянням (4). Як відомо [8], для цього необхідно прирівняти до нуля праві частини рівнянь (20), що визначають амплітуду і розлад системи, так як стаціонарний режим характеризується тим, що амплітуда і фаза залишаються постійними, тобто $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$.

Виключаючи з рівнянь першого наближення розлад системи – ϑ , стаціонарне значення амплітуди, в залежності від заданих значень частоти вимушених коливань та інших фізичних параметрів системи, визначається співвідношенням

від v , то поява резонансу в системі також буде залежати від швидкості потоку рідини v . У резонансному випадку $\omega \approx p$ значення резонансної амплітуди визначається так:

$$b = 0.0067 \text{ c}^{\alpha-1}, \quad h = 0.1 \text{ см.}$$

За малого значення параметра α , значення Ейлерової гама-функції можна вважати близьким

до одиниці, $\Gamma(1-\alpha) \rightarrow 1$.

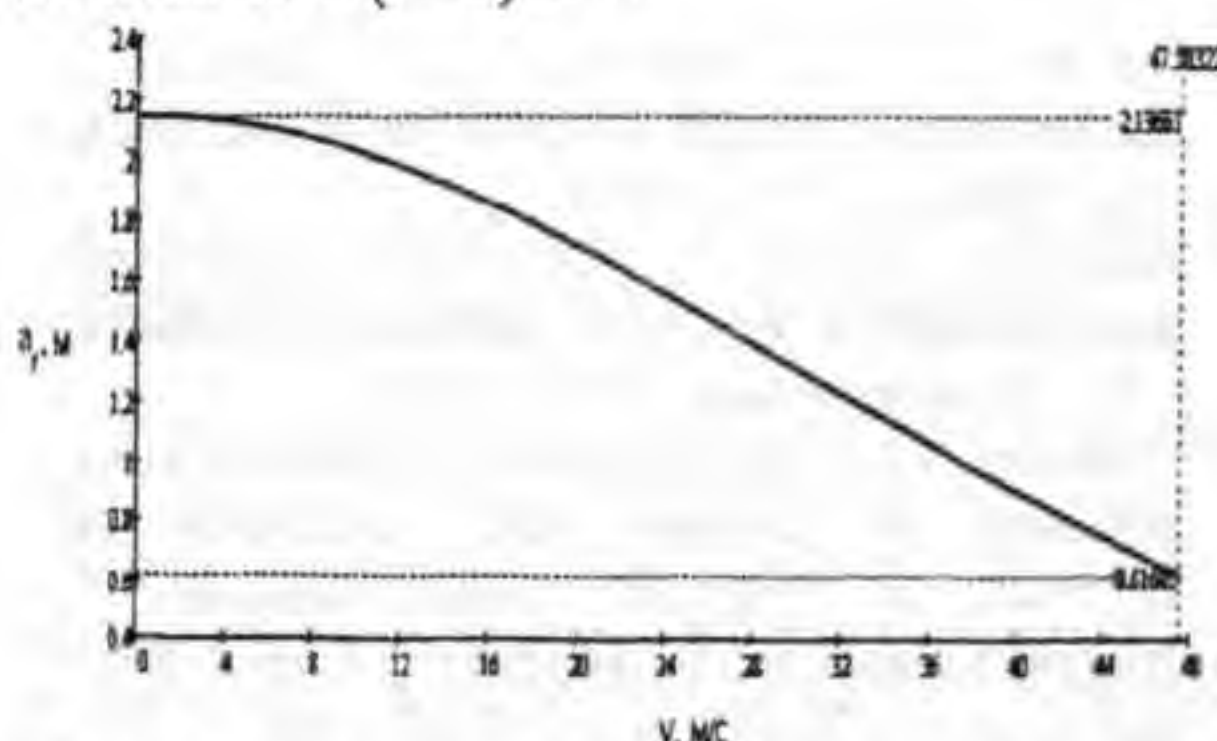


Рис. 3 Обвідна піків резонансних кривих при кінематичному збудженні

Вимушені коливання реологічного трубопроводу з

потокм рідини при силовому збудженні

Силовое збудження може бути викликане зовнішніми періодичними силами, наприклад: вихрами Кармана в поперечних повітряних або водяних потоках; а також зосередженими силами, наприклад, обумовленою вібрацією механізму закріпленого на трубопроводі, яка представляється у формі $F(x, t) = F_0 \delta(x - x_0) \cos pt$, де координата x_0 визначає положення сили збудження.

Дослідження динаміки одновимірного

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2F_0}{l} \frac{J_4 \sin \vartheta + J_2 \cos \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)} - \frac{a}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \left(\varepsilon p \frac{d\omega}{d\tau} + EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) \frac{b\Gamma(1-\alpha)\sin(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}} \right), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega(\tau) - p(\tau) - \frac{2F_0}{l} \frac{J_4 \cos \vartheta - J_2 \sin \vartheta}{(\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma)a} - \frac{EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma)} \frac{b\Gamma(1-\alpha)\cos(1-\alpha)\varphi}{(\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}}, \end{aligned} \quad (27)$$

яку можна проінтегрувати до кінця.

У випадку стаціонарного режиму в коливній системі, яка описується рівнянням (24), значення

реологічного тіла з рівномірно розподіленим рухомим інерційним навантаженням при врахуванні зовнішнього силового навантаження з шарнірним закріпленням на краях зводиться до розв'язання рівняння

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho_2 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho_2 v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EJ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 u(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right) = F_0 e^{ipt}, \quad (24)$$

де F_0 – амплітуда розподіленої зовнішньої сили збудження, p – частота зовнішнього збудження, з граничними умовами

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 & u(l, t) &= 0 \\ u''(0, t) &= 0 & u''(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Відповідно до асимптотичного методу нелінійної механіки [8] розв'язок рівняння (24) шукаємо у першому наближенні

$$u(x, t) = a(t) X(\lambda x) e^{i\gamma x} e^{i(\vartheta + pt)}, \quad (26)$$

де a і ϑ визначаються із системи рівнянь першого наближення

амплітуди, в залежності від частоти зовнішньої сили та інших фізичних параметрів, визначається так:

$$a = \frac{4F_0 \pi \cos \frac{\gamma l}{2}}{\left[\rho(\omega + p) + 2\rho_2 v \gamma \right] \left(\pi^2 - (\gamma l)^2 \right) \sqrt{(\omega - p)^2 + \left(\frac{EJ(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4) b \Gamma(1-\alpha)}{2(\rho\omega + \rho_2 v \gamma) (\sqrt{\beta^2 + \omega^2})^{(1-\alpha)}} \right)^2}}. \quad (28)$$

Резонансне значення амплітуди має вигляд

$$a_r = 4F_0 \pi \frac{\left(\sqrt{\beta^2 + \omega^2} \right)^{1-\alpha} \cos \frac{\gamma l}{2}}{EJb \left(\lambda^4 + 6(\lambda\gamma)^2 + \gamma^4 \right) \left(\pi^2 - (\gamma l)^2 \right)}. \quad (29)$$

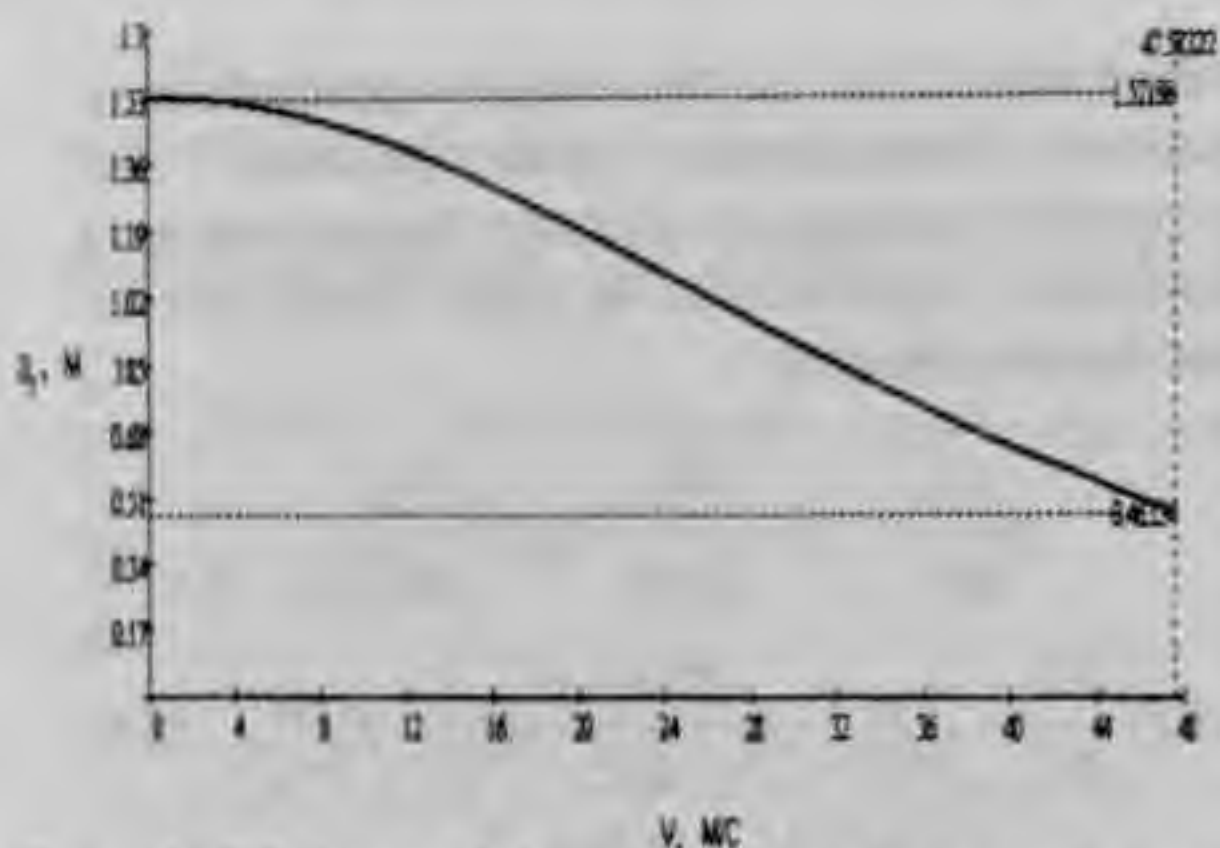


Рис. 4 Обвідна піків резонансних кривих при силовому збудженні

Висновки. Проведені дослідження дають можливість сформулювати такі висновки резонансних коливань реологічного трубопроводу з рухомою рідиною:

- Встановлено наявність критичного значення швидкості руху рідини в трубопроводі, при якій втрачається стійкість прямолінійної форми пружної лінії внаслідок центробіжних сил, обумовлених рухом рідини.
- Внаслідок залежності власної частоти коливань труби від швидкості руху рідини резонансний стан також залежить від швидкості протікання рідини: з ростом швидкості значення резонансних амплітуд зменшується практично в три рази при підході до критичного значення швидкості, як при кінематичному так і при силовому збудженні.
- Частоти коливань при зростанні швидкості руху рідини також зменшуються і при критичному значенні швидкості набувають нульового значення
- З'ясовано зростання ексцесу (деформування) форм вимушених коливань в межах до критичних значень швидкості руху рідини за законом близьким до лінійного. При критичному значенні швидкості ексцес набуває нульового значення, а форма втрати стійкості співпадає з формою вимушених коливань.
- Інтенсивність кінематичного збудження зростає зі зменшенням довжини трубопроводу.
- З порівняння рівнянь вимушених коливань, які збуджуються кінематично (4) або періодичною розподіленою силою (24), видно, що при кінематичному збудженні амплітуда пропорційна квадрату частоти збудження, при силовому збудженні амплітуда не залежить від частоти.

Отримані результати можуть бути використані для аналізу резонансних коливань трубопроводів, виготовлених із синтетичних (зі спадковими властивостями) матеріалів.

Список використаних джерел

1. Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П. Двохвильові процеси в механічних системах. – К.: Либідь, 1991. – 188 с.
2. Горошко О.А., Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета. – К.: Наукова думка, 1965. – 167 с.
3. Горошко О.О. Дослідження одночастотних режимів в двохвильових системах (в системах з рухомим навантаженням) // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2002. – №2. – С. 93 – 98.
4. Горошко О.А., Савин Г.Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. – К.: Наукова думка, 1971. – 224 с.
5. Горошко О.А., Титова Л.Д. О вынужденных колебаниях шланга с протекающей жидкостью. // Сб. Гидромеханика. – Киев. – 1971. – №19.
6. Горошко О.А., Хедрих (Стевановић) К. Аналитичка динамика (механика) дискретних систем. – Ниш: Издавачка јединица Универзитета, 2000. – 429 стр.
7. Кикоть С.В. Коливання реологічної труби під впливом потоку рідини // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2004. – №4. – С. 89 – 96.
8. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Асимптотические методы. – К.: Изд-во НАН Украины, 1995. – 396 с.
9. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
10. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 252 с.
11. Савин Г.М., Руцицкий Я.Я. Элементы механики спадкових середовищ. – К.: Вища школа, 1976. – 250 с.

Надійшла до редколегії 05.12.2007

УДК 539.376

Ольга В. Кравченко, асистент

Кручення пружного круглого валу з неконцентричною круглою порожниною

Розв'язана задача про кручення круглого валу, що послаблений круглою порожниною. Вивчено властивості жорсткості матеріалу та сколюючого напруження для круглого валу, послабленого круглою порожниною. Знайдено точні значення функції напруження для різних випадків розташування порожнини. Показано залежність деформації матеріалу від розташування круглої порожнини.

Ключові слова: кручення, кругла порожнина, неконцентричне розташування.

E-mail: kravchenko_ov@ukr.net

Представлено професором В.В. Мелешко

1. Вступ

В процесі виготовлення круглих валів з внутрішнім отвором отримуємо порожнину, що часто розташована неконцентрично з зовнішнім круговим контуром, внаслідок деформації свердла. Питання про вплив цієї неконцентричності на величину напружень, що виникають у валу, має велике прикладне значення [1].

Задача про кручення валів, переріз яких обмежений двома неконцентричними колами [5], допускає точний розв'язок в біполярних координатах. Такий розв'язок був вперше побудований Макдональдом [6]. Подальші дослідження проводилися Вейнелем [7], який побудував графіки залежності механічних характеристик матеріалу від геометричних розмірів об'єкту. Робота Патковича [3] узагальнює аналітичний підхід знаходження розв'язків задачі кручення пружного круглого валу з неконцентричною круглою порожниною.

Апробація алгоритму чисельного дослідження для задачі кручення проводилася в роботі [2].

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу теорії пружності про кручення пружного круглого стержня з неконцентричною круглою порожниною (рис. 1), що описується рівнянням

$$\nabla^2 \varphi = -2G\tau, \quad (1)$$

O.V. Kravchenko, Assistant Professor

Twisting of an elastic circular shaft with an eccentric circular hole

An exact solution of the problem of twisting an elastic circular shaft with a round cavity is constructed. Properties of a twisting toughness and splitting tension for the circular bilow, eased by a round cavity have been studied. An exact decision is found. Dependences between the concentric and unconcentric location of the cavity have been illustrated.

Keywords: twisting, circular shaft, unconcentric cavity.

де невідомою є функція напруження φ , G є модуль зсуву матеріалу, τ – сталий кут закручування.



Рис. 1. Переріз кругового валу, що послаблений круглою порожниною.

Для зручності відшукування розв'язку рівняння (1) представимо невідому функцію φ співвідношенням

$$\varphi = -G\tau \left(\frac{x^2 + y^2}{2} - \psi \right). \quad (2)$$

Тоді будемо шукати спряжену гармонічну функцію ψ до φ , що має задовольняти по всій області, зайнятій матеріалом стержня, рівнянню

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (3)$$

та умові

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \psi = \text{const} \quad (4)$$

на кожному окремому контурі, що обмежують переріз стержня.

3. Методи розв'язку задачі

Аналітичний розв'язок поставленої задачі будемо шукати в біполярній системі координат λ та θ згідно роботи [3].

При цьому рівняння (3) прийматиме вигляд

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad (5)$$

а спряжена до функції напруження φ функція ψ задовольнятиме крайовим умовам (4) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{a^2}{2(1 + \lambda_0^2 - 2\lambda \cos \theta)} + c_0 \text{ при } \lambda = \lambda_0 \\ \psi &= \frac{a^2}{2(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda \cos \theta)} \text{ при } \lambda = \lambda_1 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

де

$$a = \frac{1}{e} \sqrt{[(r_1 - r_0)^2 - e^2][(r_1 + r_0)^2 - e^2]}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2r_0 e} [r_1^2 - r_0^2 - e^2 - ea] \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2r_1 e} [r_1^2 - r_0^2 + e^2 - ea] \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

радіуси зовнішнього та внутрішнього кіл (рис. 1) $r = r_0$ і $r = r_1$, e – ексцентриситет кіл, $x = 0$ та $x = a$ – координати полюсів; c_0 – сталий коефіцієнт.

Функцію ψ , яка є періодичною та парною функцією від θ , будемо шукати у вигляді розкладу в ряд Фур'є [5]

$$\psi = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \lambda^n + B_n \lambda^{-n}) \cos n\theta. \quad (9)$$

Використовуючи правила відшукування коефіцієнтів розкладу ряду Фур'є [3], матимемо

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \frac{a^2}{1 - \lambda_1^2}, \\ A_n &= a^2 \frac{1}{\lambda_1^{2n} - \lambda_0^{2n}} \left[\frac{\lambda_1^{2n}}{1 - \lambda_1^2} - \frac{\lambda_0^{2n}}{1 - \lambda_0^2} \right], \\ B_n &= a^2 \frac{(\lambda_1 \lambda_0)^{2n}}{\lambda_1^{2n} - \lambda_0^{2n}} \left[\frac{\lambda_1^{2n}}{1 - \lambda_1^2} - \frac{\lambda_0^{2n}}{1 - \lambda_0^2} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Тоді, підставивши їх в (9) знайдемо функцію ψ . Нарешті, значення функції φ знаходимо за (2).

Проведемо чисельне дослідження поведінки функції напружень (2) в залежності від розмірів радіусів кіл та відстані між їх центрами [1].

Для отримання точних значень функції напруження області поперечного перерізу пружного круглого валу з неконцентричною круглою порожниною опишемо алгоритм знаходження поверхні функції напруження φ .

Спочатку будемо область дослідження класичної задачі теорії пружності за допомогою додатку *PDETool* [4]. Розбиваємо дану область сіткою тріангуляції, що будується на принципі Делоне (див. рис.2).



Рис. 2. Генерація сітки тріангуляції з використанням методу Делоне в додатку *PDETool*.

Виконання граничних умов (6) забезпечуємо функцією *Boundary Condition* при значенні $\varphi = 0$ на межі області пластинки, зайнятій матеріалом вала. За допомогою функції *Plot* знаходимо розв'язок рівняння (1).

4. Результати чисельних обчислень

З даних рис. 3а видно, що значення функції напруження не перевищує 0,45 та рівномірно розподілене по серединній області кільця матеріалу вала. Отже, деформація поверхні матеріалу вала відбулася рівномірно відносно внутрішньої та зовнішньої границі.

Дослідимо вплив розташування круглої порожнини на значення функції напруження, враховуючи зміни радіусів кіл та відстані між центрами неконцентричних кіл.

Тоді, виконуючи кроки алгоритму, при значенні радіусів $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.3$ та відстані $e = 0.3$, матимемо палітру значень функції напруження, яка наведена на рис. 3б.

Значення функції напруження збільшується на підобласті матеріалу вала, що має більшу площу (рис.3б) та досягає максимального значення 0.86. Тому можемо говорити про найбільшу деформацію області площини матеріалу вала з неконцентричною порожниною.

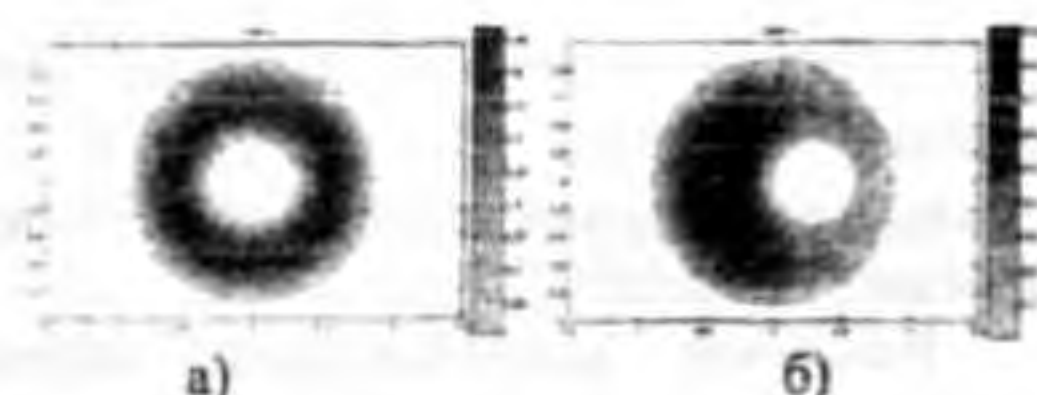


Рис. 3. Поверхня рівнів функції ϕ при: а) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.3$; б) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.3$, та відстані між центрами кіл $e = 0.3$.

Зменшимо радіус внутрішньої порожнини та знайдемо значення функції напруження, при цьому, значення функції напруження зменшуються і вплив внутрішньої порожнини на процес деформації матеріалу послаблюється (рис. 4).

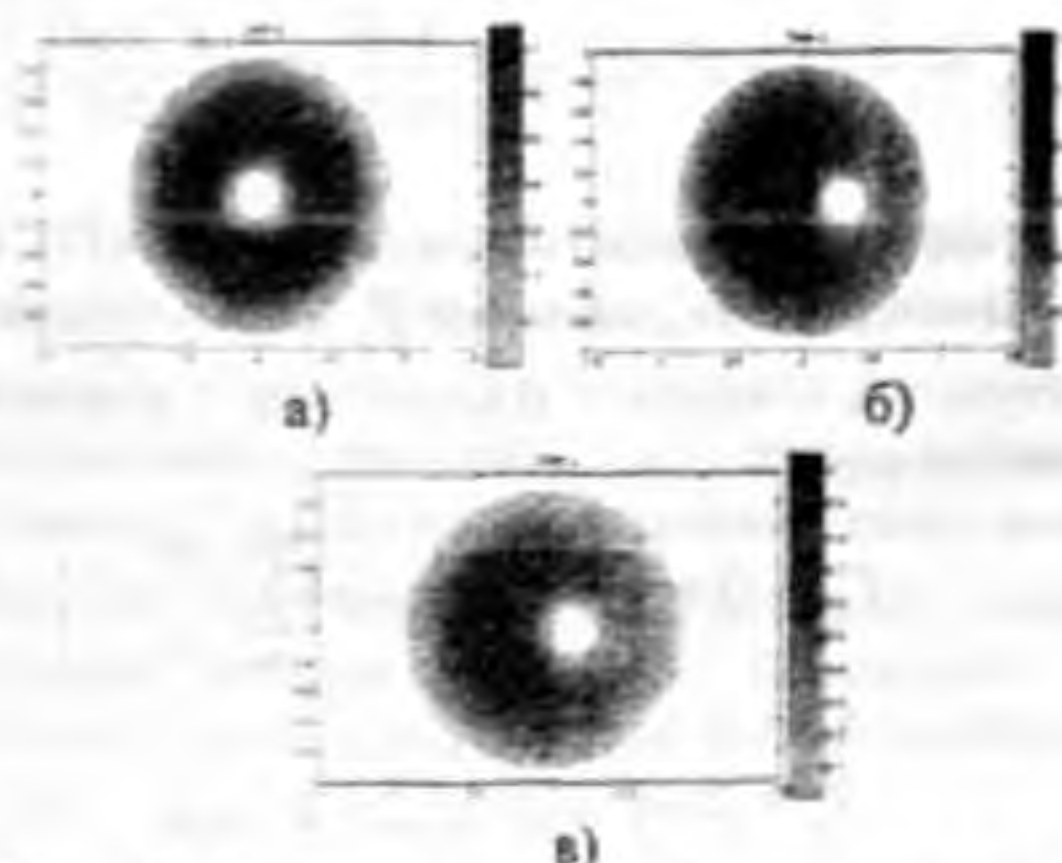


Рис. 4. Поверхня рівнів функції ϕ при: а) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.15$; б) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.15$, та відстані між центрами кіл $e = 0.3$; в) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.15$ та відстані між центрами кіл $e = 0.15$.

Порівнюючи дані рис. 4б та рис. 4в, можна зробити висновок, що зсув внутрішнього кола до центру зовнішнього кола призвів до зменшення максимальних значень функції напруження в лівій частині півкола та підвищенню в правій, вузькій частині. Отже, при зміщенні центру внутрішньої порожнини до центру круга вала деформація більшої частини підобласті зменшується завдяки перерозподілу на меншу смугу функції напруження.

Якщо зменшити радіус внутрішнього кола до $r_0 = 0.1$ при сталому значенні $r_1 = 0.9$ та відстані між центрами кіл $e = 0.3$, матимемо новий набір значень функції напружень у вигляді поверхні розв'язків.

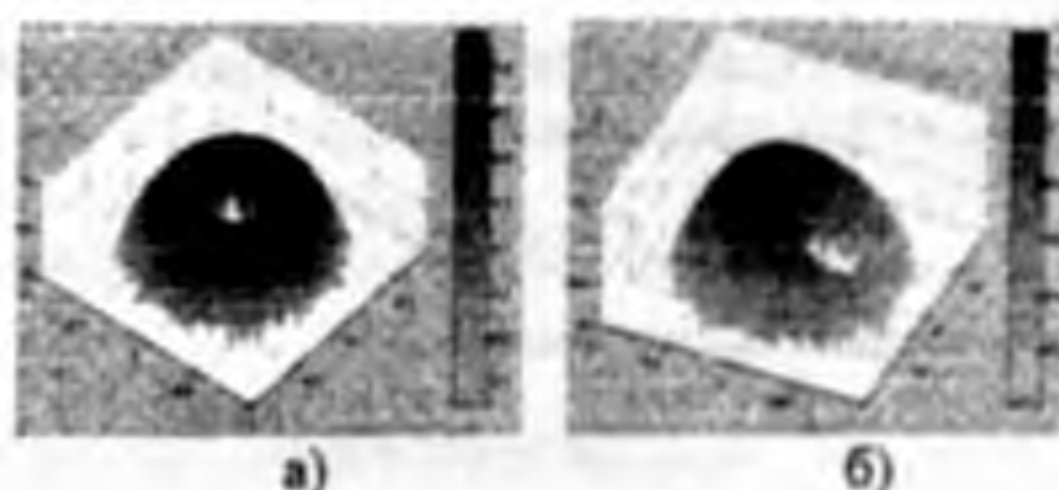


Рис. 5. Поверхня рівнів функції ϕ при: а) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.1$; б) $r_1 = 0.9$, $r_0 = 0.1$, та відстані між центрами кіл $e = 0.3$.

Аналізуючи значення функції з рис. 5а та 5б можна стверджувати, що зменшення радіуса внутрішньої порожнини підвищує значення функції напруження для концентричного та неконцентричного розташування порожнини порівняно з даними рис. 4а, 4б, 4в.

Таким чином, наявність внутрішньої порожнини в круговому валі впливає на значення функції напруження відповідно до свого розміщення.

5. Визначення механічних характеристик кручення стержня

Головною характеристикою стержня при крученні є величина його жорсткості, яка визначається за формулою

$$C = \frac{M}{\tau} \quad (11)$$

Момент кручення M знаходимо за формулою

$$M = 2 \left\{ \iint \rho x dx dy + F_1 \phi_1 - F_0 \phi_0 \right\}, \quad (12)$$

враховуючи площі кіл F_1 та F_0 та площу фігури, зайняту матеріалом стержня.

Жорсткість профілю доцільно представити у вигляді

$$C = GJ, \quad (13)$$

де

$$J = \left\{ \frac{\pi}{2} (r_1^4 - r_0^4) - 2\pi e^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R_n^{2n}}{R_n^2} \right\} \quad (14)$$

$$i \quad \eta = \frac{e}{r_1}, R_0 = 1, R_1 = 1 - \eta^2,$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r_0}{r_1}, \\ \zeta &= \frac{\eta}{1 - \rho} = \frac{e}{r_1 - r_0} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Обчислення величин R_n проводять за формулою

$$R_n = (1 - \eta^2 + \rho^2) R_{n-1} - \rho^2 R_{n-2}. \quad (16)$$

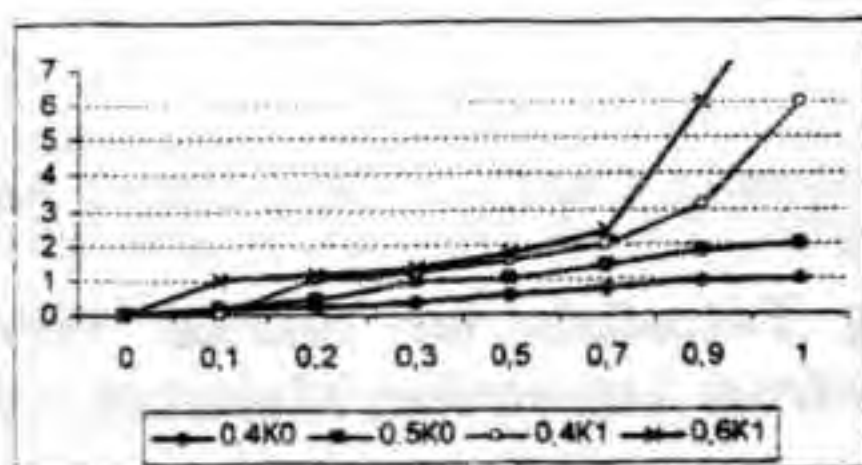


Рис. 7. Залежність коефіцієнтів K_0 та K_1 від ζ .

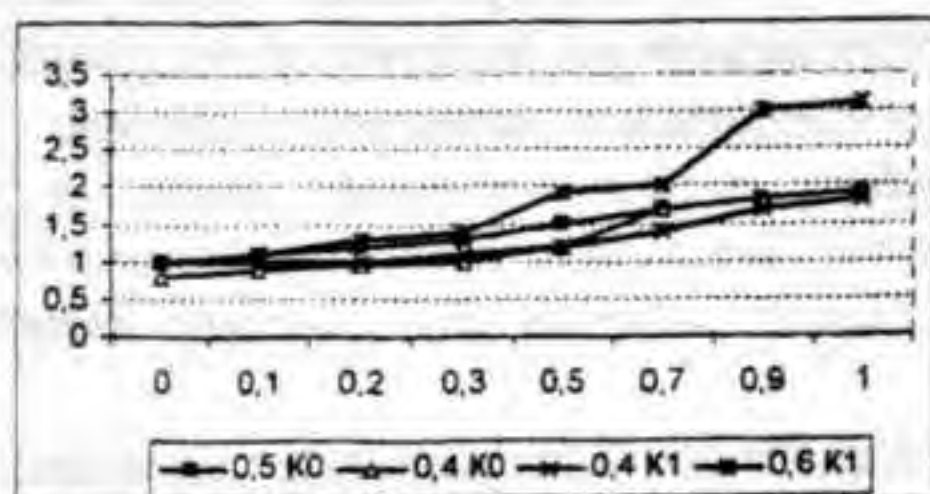


Рис. 8. Залежність коефіцієнтів K_0 та K_1 від ρ .

Графіки на рис. 7 та рис. 8 вказують на те, що при малих значеннях ζ напруження на зовнішній поверхні круглого вала досягають максимальних значень, а при великих значеннях ζ максимальні значення напружень отримуємо на внутрішній поверхні вала. Найбільш напружені точки переходять з зовнішньої поверхні вала на внутрішню при $\zeta = 0.8$.

6. Висновки

Дослідження розв'язків задачі кручення круглого валу з неконцентричною круговою порожниною показало, що ексцентриситет порожнини суттєво впливає на значення функції напруження, а, отже, і на коефіцієнт

жорсткості та сколюючий момент напруження. Положення точки максимального дотичного напруження зміщується на середину області півкільця, що займає більшу площу вала.

Список використаних джерел

1. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
2. Кравченко О.В. Поверхні розв'язків задачі кручення композитного середовища з урахуванням міжфазової взаємодії // Вісник Черкаського університету, Сер. Прикладна математика. – 2006. – № 83. – С.168-173.
3. Папкович П.Ф. Теория упругости. – Л.-М.: Оборонгиз, 1939. – 639 с.
4. Рыдник Е.А., Лысенко И.Е. Решение задач математической физики в системе MATLAB. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005. – 62 с.
5. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. – М.: Физматгиз, 1961. – 519 с.
6. MacDonald H.M. On the torsional strength of a hollow shaft // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1893. – 8. – P. 62-68.
7. Weinel E. Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring // Ingenier Archiv. – 1932. – 3. – P. 67-75.

Надійшла до редколегії 10.09.2007

УДК 539.3:534.1

Віктор О. Моїсєнко, к.ф.-м.н., доцент, докторант

Хвильові потенціали для просторових хвильоводних об'єктів із анізотропних матеріалів

У роботі в тривимірній постановці одержані зображення загального розв'язку повної системи рівнянь руху довільного пружного однорідного просторового хвильоводного об'єкту з анізотропного матеріалу гексагональної, кубічної та орторомбічної структури через три незалежні хвильові потенціали, проведене порівняння з відомими класичними розв'язками для ізотропного матеріалу.

Ключові слова: хвильові потенціали; кубічна гексагональна, орторомбічна структура; просторові хвильоводи.

E-mail: vamvamv@ukr.net

Представлено професором В.В. Мелешко

1 Вступ

Однією з основних задач динаміки просторових хвильоводних об'єктів є побудова загального розв'язку повної системи загальних рівнянь руху. Одним із методів розв'язку цієї задачі є зведення її до розв'язку незалежних визначальних рівнянь шляхом заміни залежних невідомих компонент вектора зміщень через незалежні хвильові потенціали. Для ізотропного матеріалу такими розв'язками є відомі класичні розв'язки [2]. У роботі [4] ці розв'язки частково узагальнені на випадок трансверсально-ізотропного матеріалу. Нижче проведено повне узагальнення такого підходу на анізотропні матеріали гексагональної, кубічної та орторомбічної структури.

2 Постановка задачі

Розглянемо просторовий хвильоводний об'єкт, який є однорідним ідеально пружним середовищем із матеріалу орторомбічної структури або довільною частиною цього середовища, яка обмежена повністю чи частково довільною кусково-гладкою поверхнею. Об'єкт віднесено до декартової системи координат $ox_1x_2x_3$, осі якої направлені вздовж напрямків пружної симетрії. У довільній точці об'єкту з заданим радіусом-вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ і в довільний момент часу t компоненти вектора зміщень $U_i(\vec{x}, t)$, тензора напруг $\sigma_{ij}(\vec{x}, t)$ та тензора деформацій $\varepsilon_{ij}(\vec{x}, t)$ зв'язані між собою рівняннями руху [1]

V.A. Moiseenko, Cand.Sci.(Phys.-Math.), Associate Professor

Waving Potentials for Spatial Waveguide Objects from Anisotropic Materials

The paper presents a general solution of the complete system equation of motion of an unspecified elastic homogeneous spatial waveguide object from anisotropic material of hexagonal, cubic and orthorhombic structure through three independent waving potentials made in three-dimensional formulation. The comparison with well-known classic solutions for isotropic material is given.

Key Words: wave potentials; hexagonal, cubic, orthorhombic structure; spatial waveguide.

$$\partial_j \sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \rho C_0^{-1} \partial_t^2 U_i(\vec{x}, t) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

узагальненим законом Гука [1]

$$\sigma_{ii}(\vec{x}, t) = C_{ip} \varepsilon_{pp}(\vec{x}, t) \quad (i, p = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = G_{ij} \varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) \quad (i \neq j),$$

і співвідношеннями Коші [1]

$$(1 + \delta_{ij}) \varepsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \partial_j U_i(\vec{x}, t) + \partial_i U_j(\vec{x}, t).$$

З цієї повної системи загальних рівнянь руху походять рівняння руху в зміщеннях:

$$L_{ij} U_j(\vec{x}, t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Тут L_{ij} – диференціальні оператори виду:

$$L_{11} = C_{11} \partial_1^2 + G_{12} \partial_2^2 + G_{13} \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2,$$

$$L_{22} = G_{12} \partial_1^2 + C_{22} \partial_2^2 + G_{23} \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2,$$

$$L_{33} = G_{13} \partial_1^2 + G_{23} \partial_2^2 + C_{33} \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0} \partial_t^2, \quad (2)$$

$$L_{12} = L_{21} = (C_{12} + G_{12}) \partial_1 \partial_2,$$

$$L_{13} = L_{31} = (C_{13} + G_{13}) \partial_1 \partial_3,$$

$$L_{23} = L_{32} = (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3.$$

Символами $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ і ∂_i позначені частинні похідні по змінним x_i та t , символами $C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{12}, C_{13}, C_{23}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ - безрозмірні пружні константи, які віднесені до доволі обраної нормувальної пружної константи C_0 , символом ρ - густина матеріалу, δ_{ij} - символ Кронекера.

3 Вирішення задачі

Систему (1) по відношенню до невідомих компонент вектора зміщень можна розглядати як алгебраїчну з операторними коефіцієнтами [2], які мають властивість комутативності. Це дозволяє загальний розв'язок системи (1) представити через три незалежні скалярні функції $\Psi_1(\bar{x}, t)$, $\Psi_2(\bar{x}, t)$, $\Psi_3(\bar{x}, t)$, які назвемо хвильовими потенціалами, у вигляді лінійної комбінації цих хвильових потенціалів з деякими операторними коефіцієнтами в такому вигляді:

$$\begin{aligned} U_1(\bar{x}, t) &= L_1^{(4)}\Psi_1(\bar{x}, t) - (C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_2(\bar{x}, t) - (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_3(\bar{x}, t), \\ U_2(\bar{x}, t) &= -(C_{12} + G_{12})\partial_1\partial_2L_{12}^{(2)}\Psi_1(\bar{x}, t) + L_2^{(4)}\Psi_2(\bar{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_3(\bar{x}, t), \\ U_3(\bar{x}, t) &= -(C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3L_{13}^{(2)}\Psi_1(\bar{x}, t) - (C_{23} + G_{23})\partial_2\partial_3L_{23}^{(2)}\Psi_2(\bar{x}, t) + L_3^{(4)}\Psi_3(\bar{x}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Для введених диференціальних операторів одержані такі зображення:

$$\begin{aligned} L_1^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &G_{13}G_{12}\partial_1^4 + (G_{23}G_{12} + C_{22}G_{13})\partial_1^2\partial_2^2 + C_{22}G_{23}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{33}G_{12} + G_{23}G_{13})\partial_1^2\partial_3^2 + (C_{22}C_{33} - C_{23}^2 - 2C_{23}G_{23})\partial_2^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{23}\partial_3^4 - [(G_{13} + G_{12})\partial_1^2 + (C_{22} + G_{23})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{23})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\}, \\ L_2^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &C_{11}G_{13}\partial_1^4 + (C_{11}G_{23} + G_{13}G_{12})\partial_1^2\partial_2^2 + G_{23}G_{12}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{33}G_{12} + G_{23}G_{13})\partial_2^2\partial_3^2 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})\partial_1^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{13}\partial_3^4 - [(C_{11} + G_{13})\partial_1^2 + (G_{23} + G_{12})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\}, \\ L_3^{(4)} &= \left\{ \begin{aligned} &C_{11}G_{12}\partial_1^4 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}G_{12})\partial_1^2\partial_2^2 + C_{22}G_{12}\partial_2^4 + \\ &+ (C_{22}G_{13} + G_{23}G_{12})\partial_2^2\partial_3^2 + (C_{11}G_{23} + G_{13}G_{12})\partial_1^2\partial_3^2 + \\ &+ G_{23}G_{13}\partial_3^4 - [(C_{11} + G_{12})\partial_1^2 + (C_{22} + G_{12})\partial_2^2 + (G_{13} + G_{23})\partial_3^2] \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_t^4 \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} L_{12}^{(2)} &= L_{21}^{(2)} = G_{13}\partial_1^2 + G_{23}\partial_2^2 + \left(C_{33} - \frac{(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23})}{C_{12} + G_{12}} \right) \partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, \\ L_{13}^{(2)} &= L_{31}^{(2)} = G_{12}\partial_1^2 + \left(C_{22} - \frac{(C_{12} + G_{12})(C_{23} + G_{23})}{C_{13} + G_{13}} \right) \partial_2^2 + G_{23}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2, \\ L_{23}^{(2)} &= L_{32}^{(2)} = \left(C_{11} - \frac{(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})}{C_{23} + G_{23}} \right) \partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_t^2. \end{aligned}$$

Підставляючи зображення (3) з урахуванням виразів (4) у систему (1), для кожного з хвильових потенціалів $\Psi_m(\bar{x}, t)$ одержимо незалежне визначальне диференціальне рівняння у вигляді

$$L\Psi_m(\bar{x}, t) = 0, (m = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Спільний диференціальний оператор шостого порядку L у трьох рівняннях (5) має постійні коефіцієнти і записується так

$$\begin{aligned} L = & D_{600}\partial_1^6 + D_{060}\partial_2^6 + D_{006}\partial_3^6 + D_{420}\partial_1^4\partial_2^2 + D_{240}\partial_1^2\partial_2^4 + D_{402}\partial_1^4\partial_3^2 + \\ & + D_{042}\partial_2^4\partial_3^2 + D_{222}\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2 + D_{204}\partial_1^2\partial_3^4 + D_{024}\partial_2^2\partial_3^4 - \rho^3 C_0^{-3}\partial_1^6 - \\ & - D_{400}\rho C_0^{-1}\partial_1^4\partial_i^2 - D_{040}\rho C_0^{-1}\partial_2^4\partial_i^2 - D_{004}\rho C_0^{-1}\partial_3^4\partial_i^2 - D_{220}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_2^2\partial_i^2 - \\ & - D_{202}\rho C_0^{-1}\partial_1^2\partial_3^2\partial_i^2 + D_{022}\rho C_0^{-1}\partial_2^2\partial_3^2\partial_i^2 + D_{200}\rho^2 C_0^{-2}\partial_1^2\partial_i^4 + D_{020}\rho^2 C_0^{-2}\partial_2^2\partial_i^4 + D_{002}\rho^2 C_0^{-2}\partial_3^2\partial_i^4, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} D_{600} &= C_{11}G_{12}G_{13}, D_{060} = G_{12}C_{22}G_{23}, D_{006} = G_{13}G_{23}C_{33}, \\ D_{420} &= G_{12}^2G_{13} + C_{11}C_{22}G_{13} + C_{11}G_{12}G_{23} - G_{13}(C_{12} + G_{12})^2, \\ D_{240} &= G_{12}^2G_{23} + C_{11}C_{22}G_{23} + C_{22}G_{12}G_{13} - G_{23}(C_{12} + G_{12})^2, \\ D_{402} &= G_{12}G_{13}^2 + C_{11}G_{13}G_{23} + C_{11}C_{33}G_{12} - G_{12}(C_{13} + G_{13})^2, \\ D_{042} &= G_{12}G_{23}^2 + C_{22}G_{13}G_{23} + C_{22}C_{33}G_{12} - G_{12}(C_{23} + G_{23})^2, \\ D_{222} &= \left[C_{11}C_{22}C_{33} + 2G_{12}G_{13}G_{23} + 2(C_{12} + G_{12})(C_{13} + G_{13})(C_{23} + G_{23}) - \right. \\ & \left. - C_{11}(C_{23}^2 + 2C_{23}G_{23}) - C_{22}(C_{13}^2 + 2C_{13}G_{13}) - C_{33}(C_{12}^2 + 2C_{12}G_{12}) \right], \\ D_{204} &= G_{13}^2G_{23} + G_{12}G_{13}C_{33} + C_{11}G_{23}C_{33} - G_{23}(C_{13} + G_{13})^2, \\ D_{024} &= G_{13}G_{23}^2 + G_{12}G_{23}C_{33} + C_{22}G_{13}C_{33} - G_{13}(C_{23} + G_{23})^2, \\ D_{400} &= (G_{12}G_{13} + C_{11}G_{13} + C_{11}G_{12}), \quad D_{040} = (G_{12}G_{23} + C_{22}G_{23} + C_{22}G_{12}), \\ D_{004} &= (G_{13}G_{23} + G_{13}C_{33} + G_{23}C_{33}), \\ D_{220} &= G_{12}G_{13} + C_{22}G_{13} + G_{12}G_{23} + C_{11}G_{23} + G_{12}^2 + C_{11}C_{22} - (C_{12} + G_{12})^2, \\ D_{202} &= G_{13}G_{23} + G_{13}^2 + G_{12}C_{33} + C_{11}C_{33} + G_{13}G_{12} + C_{11}G_{23} - (C_{13} + G_{13})^2, \\ D_{022} &= G_{13}G_{23} + G_{23}^2 + G_{12}C_{33} + C_{22}C_{33} + G_{23}G_{12} + C_{22}G_{13} - (C_{23} + G_{23})^2, \\ D_{200} &= (G_{13} + G_{12} + C_{11}); \quad D_{020} = (G_{23} + G_{12} + C_{22}), \quad D_{002} = (G_{13} + G_{23} + C_{33}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для матеріалу кубічної структури три площини пружної симетрії еквівалентні між собою. Цей матеріал характеризується трьома незалежними пружними константами $C = C_{11} = C_{22} = C_{33}$, $\lambda = C_{12} = C_{13} = C_{23}$, $G = G_{12} = G_{13} = G_{23}$ і диференціальні оператори в зображеннях (3),(4) у цьому випадку спрощуються так:

$$\begin{aligned} L_u &= G\nabla^2 + (C - G)\partial_i^2 - \rho C_0^{-1}\partial_i^2, \\ L_{ij} &= (\lambda + G)\partial_i\partial_j, \quad (i \neq j), \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ L_1^{(4)} &= \left(C\nabla^2 - (C - G)\partial_1^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_1^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_1^2 \right) + ((C - G)^2 - (\lambda + G)^2)\partial_2^2\partial_3^2, \\ L_2^{(4)} &= \left(C\nabla^2 - (C - G)\partial_2^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_2^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_2^2 \right) + ((C - G)^2 - (\lambda + G)^2)\partial_1^2\partial_3^2, \\ L_3^{(4)} &= \left(C\nabla^2 - (C - G)\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_3^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_3^2 \right) + ((C - G)^2 - (\lambda + G)^2)\partial_1^2\partial_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{12}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_1\partial_2\left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + ((C - G) - (\lambda + G))\partial_3^2\right), \\ L_{13}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_1\partial_3\left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + ((C - G) - (\lambda + G))\partial_2^2\right), \\ L_{23}^{(2)} &= -(\lambda + G)\partial_2\partial_3\left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + ((C - G) - (\lambda + G))\partial_1^2\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Окрім цього, спрощуються й вирази для коефіцієнтів (7), які входять у визначальний диференціальний оператор (6):

$$\begin{aligned} D_{600} &= D_{060} = D_{006} = CG^2, \quad D_{400} = D_{040} = D_{004} = G(2C + G), \\ D_{420} &= D_{240} = D_{042} = D_{024} = D_{402} = D_{204} = G(C(C + G) - \lambda(\lambda + 2G)), \\ D_{222} &= C^3 + 2(G^3 + (\lambda + G)^3) - 3C\lambda(\lambda + 2G), \quad D_{200} = D_{020} = D_{002} = C + 2G, \\ D_{220} &= D_{202} = D_{022} = C^2 + 2G(C + G) - \lambda(\lambda + 2G), \end{aligned} \quad (9)$$

але на операторні множники він не розпадається, тобто структура оператора L при цьому зберігається. Це свідчить про те, що характерна для ортотропії структура загального розв'язку також у цьому випадку зберігається.

Для матеріалу гексагональної структури маємо $C_{22} = C_{11}$, $C_{23} = C_{13}$, $G_{23} = G_{13}$, $C_{12} = C_{11} - 2G_{12}$. У цьому випадку залишається п'ять незалежних пружних констант $C_{11}, C_{33}, C_{13}, G_{13}, G_{12}$ і відповідні перетворення диференціальних операторів з урахуванням того, що $D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ дають для них такі зображення:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2, \quad L_{12} = L_{21} = (C_{11} - G_{12})\partial_1\partial_2, \\ L_{22} &= G_{12}\partial_1^2 + C_{11}\partial_2^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2, \quad L_{13} = L_{31} = (C_{13} + G_{13})\partial_1\partial_3, \\ L_{33} &= G_{13}\partial_1^2 + G_{13}\partial_2^2 + C_{33}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2, \quad L_{23} = L_{32} = (C_{13} + G_{13})\partial_2\partial_3, \\ L_1^{(4)} &= G_{13}D^2(G_{12}\partial_1^2 + C_{11}\partial_2^2) + (C_{33}G_{12} + G_{13}^2)\partial_1^2\partial_3^2 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})\partial_2^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{13}\partial_3^4 - [(G_{12} + G_{13})\partial_1^2 + (C_{11} + G_{13})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2]\frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_i^4, \\ L_2^{(4)} &= G_{13}D^2(C_{11}\partial_1^2 + G_{12}\partial_2^2) + (C_{33}G_{12} + G_{13}^2)\partial_2^2\partial_3^2 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})\partial_1^2\partial_3^2 + \\ &+ C_{33}G_{13}\partial_3^4 - [(C_{11} + G_{13})\partial_1^2 + (G_{13} + G_{12})\partial_2^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2]\frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_i^4, \\ L_3^{(4)} &= \left(C_{11}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2\right)\left(G_{12}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2\right), \\ L_{21}^{(2)} &= L_{12}^{(2)} = G_{13}D^2 + \left(C_{33} - \frac{(C_{13} + G_{13})^2}{C_{11} - G_{12}}\right)\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2, \\ L_{23}^{(2)} &= L_{13}^{(2)} = G_{13}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2, \\ L &= \left\{ C_{11}G_{13}D^4 + (C_{11}C_{33} - C_{13}^2 - 2C_{13}G_{13})D^2\partial_3^2 + C_{33}G_{13}\partial_3^4 - \right. \\ &\left. - [(C_{11} + G_{13})D^2 + (C_{33} + G_{13})\partial_3^2]\frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 + \frac{\rho^2}{C_0^2}\partial_i^4 \right\} \left(G_{12}D^2 + G_{13}\partial_3^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Характерною для цього випадку структурною зміною у диференціальному операторі L є те, що він розпадається на два операторні множники. Це означає, що кожен з хвильових потенціалів розпадається на суму двох незалежних хвильових складових [2], які визначаються з розв'язку хвильових рівнянь четвертого і другого порядку відповідно. Цей висновок підтверджується і результатами досліджень, які наведені у роботах [3, 4].

Якщо $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2G$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$, то матимемо розв'язок, який відповідає ізотропному матеріалу. В цьому випадку з урахуванням позначення $\nabla^2 = D^2 + \partial_3^2$ приходимо до ще більш простих виразів для диференціальних операторів:

$$\begin{aligned} L_{ii} &= G\nabla^2 + (\lambda + G)\partial_i^2 - \rho C_0^{-1}\partial_i^2, \\ L_{ij} &= (\lambda + G)\partial_i\partial_j, \quad (i \neq j) \\ L_i^{(4)} &= \left((\lambda + 2G)\nabla^2 - (\lambda + G)\partial_i^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right), \quad (i = 1, 2, 3), \\ L_{12}^{(2)} &= L_{13}^{(2)} = L_{23}^{(2)} = \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right), \\ L &= \left((\lambda + 2G)\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right) \left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Структура оператора L для ізотропного матеріалу визначає наявність трьох незалежних хвильових складових у кожному хвильовому потенціалі, з котрих дві однакові. При цьому наявність спільного операторного множника $\left(G\nabla^2 - \frac{\rho}{C_0}\partial_i^2 \right)$ у диференціальних операторах (11) дозволяє внести його в хвильові потенціали і спростити структуру загального розв'язку. У цьому випадку ми приходимо до відомих класичних зображенням у формі Яковаке [2] через два хвильові потенціали, які визначають чисто повздовжню та чисто зсувну хвильові складові.

4 Висновки

Таким чином, одержані зображення загального розв'язку повної системи рівнянь руху довільного пружного просторового хвилювального об'єкту з матеріалу орторомбичної, кубічної та гексагональної структури через три незалежні хвильові потенціали становлять узагальнення відомих класичних зображень для ізотропних хвилювальних об'єктів. Це дає можливість вивчати характер впливу анізотропії на кінематику хвильових процесів через кінематичну матрицю $U_{ij}(\vec{x}, t)$, що входить у знайдені кінематичні співвідношення (3). Структура цієї матриці третього порядку свідчить про те, що в загальному випадку кінематика рухів є трьохкомпонентною та трьохскладовою і певним чином спрощується у кожному з розглянутих випадків пружної симетрії. Ця обставина потребує окремого подальшого докладного вивчення.

Список використаних джерел

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М: Наука, 1977. – 416 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. – М: Наука, 1975. – 618 с.
3. Космодамианский А.С., Моисеенко В.А. Вынужденные колебания толстых транстропных плит под действием произвольной поперечной нагрузки // Доклады АН УССР, Сер.: Физико-математические и технические науки. – 1980. – №12. – С.27-30.
4. Шульга Н.А. Волновые потенциалы для упругой трансверсально-изотропной среды // Доклады АН УССР, Сер.: Физико-технические и математические науки. – 1973. – №6. – С.547-549.

Надійшла до редколегії 14.06.2007

УДК 539.3

Віталій В. Островський, аспірант

Динаміка точкових вихорів на сфері

В роботі виведено рівняння руху для системи з N точкових вихорів в нескінченно тонкому шарі ідеальної нестисливої рідини між двома концентричними сферами. Показано, що система є Гамільтоновою. Вказано який вигляд має Гамільтоніан та дужка Пуассона. Знайдено інтегральні інваріанти руху для неперервно розподіленої завихреності. Приведено рівняння руху в сферичних та декартових координатах.

Ключові слова: точковий вихор, гамільтонова система, інваріанти руху.

E-mail: vitos@univ.kiev.ua

Представив професор В.В.Мелешко

1 Вступ

Проблеми, що пов'язані з дослідженням руху вихорів на сфері виникають в різних галузях науки, проте особливо актуальні вони в геофізиці. Зважаючи на те, що відношення радіусу Землі до товщини нижніх шарів атмосфери (тропосфери, стратосфери та мезосфери в яких знаходиться основна маса газів, які складають атмосферу) є досить малим числом (≈ 0.013), однією із найпростіших моделей атмосфери землі є модель тонкого шару ідеальної нестисливої рідини сферичної форми. Динаміку циклонів та антициклонів в цьому тонкому шарі можна описати використовуючи модель точкових вихорів. Хоч це й ідеалізована модель, проте її вивчення дає змогу глибше зрозуміти процеси які проходять на поверхні нашої планети. Також дана модель може бути корисною для опису недавно знайдених вихрових утворень на поверхні Юпітера та Сатурна. Врахування кривини землі також може бути корисним у вивченні течій які виникають у товщі світового океану.

Першим, хто звернувся до питання поведінки точкових вихорів на сфері, був І.С.Громеко [2]. Він дослідив поведінку нескінченно тонких вихорів в обмеженій

Vitaly V. Ostrovskiy, PhD student

Point vortex dynamics on a sphere

In the article equations of a motion of a system of N vortices in an infinitely thin layer of incompressible ideal fluid between two close concentric spheres are obtained. It is shown that the system is Hamiltonian dynamical system. Hamiltonian and Poisson bracket for the system are written. Integral invariants of the motion for continuous distribution of vorticity are found. Equations of motion are given in spherical and Cartesian coordinates.

Key Words: point vortex, Hamiltonian system, invariants of the motion.

області на нерухомій сфері. Для цього було виведено рівняння руху нескінченно тонких вихорів на площині, а потім застосовуючи картографічне перетворення координат переносить результати на поверхню сфери. Для опису динаміки на повній сфері Громека стягує границю області в точку. При цьому автор доводить, що у випадку коли сумарна інтенсивність вихорів не рівна нулю, то на нерухомій повній сфері не може існувати вихровий рух (за умови, якщо швидкості точок рідини поза вихорами є скінченими).

Другий метод виведення рівнянь руху використав Богомолов [1]. Його метод дає змогу описати рух точкових вихорів як і у випадку нерухомої сфери, так і у випадку рухомої. На вказану статтю посиляється кожен автор, який працює з точковими вихорами на сфері. У збірці [3] автори слідують за Богомоловим при виведенні рівнянь руху. В інших роботах зазвичай дається тільки посилання без детальної процедури виведення цих рівнянь.

2 Вивід рівнянь руху

Розглянемо рух рідини ідеальної нестисливої між двома концентричними сферами радіусів a та b ($a < b$). Розглянемо спочатку безвихрову течію з особливостями типу джерела та стоку. Враховуючи гармонічну спряженість потенціалу

швидкості та функції току, які є розв'язками рівняння Бельтрамі-Лапласа на сфері, ми можемо перенести отримані результати на випадок з особливостями типу точковий вихор.

Згідно з теоремою Вайса [1] течію в ідеальній рідині зумовлену джерелом чи стоком інтенсивності M на відстані

$$M_1^+ = M \left(\frac{a}{\lambda} \right), r_1^+ = \frac{a^2}{\lambda}; M_1^- = M \left(\frac{b}{\lambda} \right), r_1^- = \frac{b^2}{\lambda};$$

$$M_{2n}^\pm = M \left(\frac{a}{b} \right)^{\pm n}, r_{2n}^\pm = \lambda \left(\frac{a}{b} \right)^{\pm 2n}; M_{2n+1}^\pm = M_1^\pm \left(\frac{a}{b} \right)^{\pm n}, r_{2n+1}^\pm = r_1^\pm \left(\frac{a}{b} \right)^{\pm 2n};$$

Якщо тепер розглянути границю при $a \rightarrow b$, бачимо, що джерела рівномірно заповняють лінію яка з'єднує центр сфер з даною особливістю, причому інтенсивність джерела буде рівномірно розподілена вздовж цієї лінії. Тобто еквівалентним представленням джерела на сфері (S^2) є напівнескінченна лінія в R^3 , яка виходить з центру сфери і проходить через джерело на сфері.

Із гармонічної спряженості потенціалу швидкості та функції току слідує, що еквівалентним представленням точкового вихору є нескінченно тонкий промінь який виходить з центру сфери і проходить через вихор на сфері, причому лінійна щільність вихрової лінії константна. В сферичних координатах поле кутової швидкості, що відповідає цьому вихору можна записати у вигляді

$$\omega(r, \theta, \varphi) = \frac{\Gamma}{r} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \Gamma \delta(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0)$$

де Γ - інтенсивність вихору, $\delta(\theta, \varphi)$ - дельта функція. У випадку N вихорів ми отримаємо суму

$$\omega(r, \theta, \varphi) = \frac{\Gamma}{r} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\theta - \theta_i, \varphi - \varphi_i)$$

З розкладу Гельмгольца поле швидкостей за відсутності джерел та стоків описується рівняннями

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A} + \nabla \Phi, \text{rot } \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}, \text{div } \mathbf{V} = 0,$$

де $\mathbf{V}$ - швидкість частинок рідини, $\mathbf{A}, \Phi$ - векторний та скалярний потенціали. Із третього рівняння маємо, що $\Phi \equiv 0$. Оскільки $\mathbf{A}$ визначається з точністю до деякої гармонічної функції, яку ми можемо підібрати таким чином, щоб $\mathbf{A}$ задовольняв

$$\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{A}, \Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega},$$

$\lambda, a < \lambda < b$, використовуючи метод відображень, можна еквівалентним чином подати у вигляді течії зумовленої зліченням набором джерел та стоків з наступними інтенсивностями та координатами

Розв'язок даних рівнянь знаходимо за допомогою фундаментального розв'язку оператора Лапласа для R^3 , що в декартових координатах має вигляд

$$G_3 = -\frac{1}{4\pi r},$$

Використовуючи властивості згортки, маємо

$$\mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} * G_3,$$

Що у сферичних координатах можна записати у вигляді

$$A_\theta = 0, A_\varphi = 0,$$

$$A_r = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \omega(r', \theta', \varphi') \frac{r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{[r^2 + r'^2 - 2rr' b(\theta, \varphi, \theta', \varphi')]^{3/2}}$$

де $b(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$ косинус кута між векторами (r, θ, φ) та (r', θ', φ') . Вищенаведений інтеграл має невластну розбіжність по радіусу. Щоб виділити регулярну частину інтегралу знайдемо компоненти вектора швидкості за формулами

$$V_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, V_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}, \quad (1)$$

Підставивши вищеведене A_r отримаємо

$$V_\theta = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{\alpha_i}{1-b_i}, V_\varphi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{\beta_i}{1-b_i},$$

$$\alpha_i = \sin \theta_i \sin(\varphi - \varphi_i),$$

$$\beta_i = \cos \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) - \sin \theta \sin \theta_i,$$

$$b_i = \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) - \cos \theta \cos \theta_i,$$

Тепер, використавши формули для компонент вектора швидкості (1), проінтегрувавши по кутам отримаємо

$$A_r = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \ln(1-b_i),$$

З теореми Стокса, враховуючи те, що поверхню сфери можна стягнути в точку, отримаємо результат аналогічний тому, що дає теорема Кельвіна про вихорі

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0,$$

Щоб знайти рівняння руху в сферичних координатах використаємо формули

$$V_\theta = a\dot{\theta}, V_\varphi = a\dot{\varphi} \sin \theta,$$

Заміняючи r, θ, φ на a, θ_k, φ_k і опускаючи доданки $i = k$ отримаємо наступні рівняння руху

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_k &= -\frac{1}{4\pi a^2} \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \Gamma_i \frac{\alpha_{ik}}{1-b_{ik}}, k=1 \dots N, \\ \sin \theta_k \dot{\varphi}_k &= -\frac{1}{4\pi a^2} \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \Gamma_i \frac{\beta_{ik}}{1-b_{ik}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\alpha_{ik} = \sin \theta_i \sin(\varphi_k - \varphi_i),$$

$$\beta_{ik} = \cos \theta_k \sin \theta_i \cos(\varphi_k - \varphi_i) - \sin \theta_k \sin \theta_i,$$

$$b_{ik} = \sin \theta_k \sin \theta_i \cos(\varphi_k - \varphi_i) - \cos \theta_k \cos \theta_i,$$

Або в векторній формі [4]

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{4\pi a} \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^N \Gamma_i \frac{\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_k}{a^2 - \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k}, k=1 \dots N, \quad (3)$$

3 Інваріанти руху

Для того щоб знайти інваріанти руху зазначимо, що вищенаведені рівняння описують рух Гамільтонової системи з наступним гамільтоніаном і канонічними координатами

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

$$q_k = \sqrt{\Gamma_k} \cos \theta_k, p_k = \sqrt{\Gamma_k} \varphi_k,$$

$$H = \frac{1}{4\pi a^2} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln(1-b_{ij}),$$

Дужку Пуассона для наведеної системи можна записати в наступному вигляді

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Gamma_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \frac{\partial g}{\partial \cos \theta_i} - \frac{\partial f}{\partial \cos \theta_i} \frac{\partial g}{\partial \varphi_i} \right),$$

Використовуючи цю дужку рівняння руху можна записати у наступному вигляді

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial t} = \{\cos \theta_i, H\}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \{\varphi_i, H\},$$

З теорії гамільтонових систем відомо, що гамільтоніан є одним із інваріантів руху.

Безпосереднім диференціюванням легко перевірити, що наступні величини також є інваріантами руху

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \\ P &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \\ S &= \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N \Gamma_i z_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \theta_i. \end{aligned}$$

Але H, Q, P, S не є незалежними інваріантами. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що справедливі наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \{H, P^2 + Q^2\} &= 0, \{H, S\} = 0, \{P^2 + Q^2, S\} = 0, \\ \{P, Q\} &= S, \{Q, S\} = P, \{S, P\} = Q. \end{aligned}$$

Тобто система має три незалежні, інволютивні інваріанти руху: $H, P^2 + Q^2$, та S .

Одним із застосувань інваріантів P, Q, S є введення так званого вектора центру завихреності системи

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{M}}{\Gamma},$$

де

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x}_i, \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i,$$

називаються моментом завихреності та повним вихорем системи.

Із інваріантності P, Q, S маємо, що центр завихреності системи не змінюється у процесі руху.

Одним із результатів [4], який слідує з кількості незалежних інваріантів, є те, що задача руху трьох вихорів на сфері є повністю інтегрованою. Якщо ж накласти на систему умову того, щоб центр завихреності був в нулі, ми

отримаємо, що H, P, Q, S чотири незалежних інваріанти руху, і тому задача про рух чотирьох вихорів на сфері, при умові рівності нулю вектора завихреності є повністю інтегрованою.

4 Висновки

Отримані у даній статті рівняння руху мають форму Гамільтонової системи. Для вивчення її динаміки можна застосовувати добре розвинені математичні методи по вивченню таких систем.

При дослідженні динаміки руху вихорів на сфері, перше питання, яке природньо виникає – це знаходження положень відносної рівноваги системи. Як і у граничному випадку – рухові на площині, на сьогоднішній день для задачі на сфері вже знайдено достатньо положень рівноваги. Дуже важливе, але поки що мало досліджене питання – це питання стійкості таких положень рівноваги. У даному напрямку сучасна наука має набагато менше досліджень, проте їх кількість з кожним роком збільшується. Хоч проблема дослідження руху точкових вихорів

досить стара, проте, як можна бачити, її дослідження ще має багато відкритих питань. Вона, як і в часи лорда Кельвіна так і в наш час стимулює розвиток математичного апарату.

Список використаних джерел

1. Богомолов В.А. Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – №6. – С. 57-65.
2. Громека И.С. Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 295 с.
3. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей // А.В. Борисов, И.С. Мамаев, М.А. Соколовский, ред. – М.-Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2003. – 704 с.
4. Newton P.K. The N-Vortex Problem. Analytical Techniques. – New York: Springer, 2001.

Надійшла до редколегії 27.06.2007

УДК 531.36:534.1:62-755

Ірина І. Філімоніхіна*, асистент

Усталені рухи і умови самозрівноваження одного типу ізольованої системи

Одержані узагальнені рівняння усталених рухів ізольованої системи, складеної з обертового несучого тіла і приєднаних до нього твердих тіл, відносно руху яких перешкоджають сили в'язкого опору. Наведений алгоритм оцінки стійкості усталених рухів. Визначені умови зрівноваження автобалансирами статично і динамічно незрівноваженого несучого тіла.

Ключові слова: обертове тіло, усталений рух, стійкість.

I.I. Filimonikhina, assistant professor

The steady-state motions and conditions of self-balancing of one type isolated system

Are received the generalized equations of the steady-state motions of the isolated system which consist of a rotating bearing body and attached to them firm bodies which relative motion is interfered by forces of viscous resistance. Is resulted the algorithm of an estimation of stability of the steady-state motions. Are received conditions of balancing by autobalancers of the statically and dynamically unbalanced bearing body

Key Words: rotating body, steady-state motion, stability.

*E-mail: fii@online.ua

Представлено д.ф.-м.н., проф. В.В.Мелешко

Вступ.

Енергетичний підхід знайшов застосування при дослідженні динаміки ізольованої системи, складеної із обертового несучого тіла і приєднаних до нього тіл, утворюючих демпфер кута нутації обертового тіла [3-5]. У роботах [6-8] була показана ефективність цього метода при дослідженні динаміки незрівноваженого обертового несучого тіла із приєднаними тілами, утворюючими автобалансири (АБ). Останні призначені для зрівноваження несучого тіла [2]. В роботі [8] з використанням енергетичного підхода досліджувалося динамічне зрівноваження двома двохмаятниковими АБ обертового тіла, що здійснює просторовий рух і входить в ізольовану систему. При цьому виділялися основні і побічні рухи системи, і оцінювалася їх стійкість. В результаті було встановлено, що сплюснуті несучі тіла зрівноважити динамічно неможливо, а випадок витягнутого несучого тіла вимагає додаткових досліджень. Дослідження, проведені у роботах [6-8], стосуються конкретних систем, і методи, які в них використані, потребують узагальнення і обґрунтування. Тому у даній роботі одержуються узагальнені рівняння усталених рухів вказаних вище систем, обґрунтовується методика оцінки стійкості різних усталених рухів. Також встановлюються узагальнені умови зрівноваження АБ будь-якого типу несучого тіла у випадках статичного зрівноваження одним АБ, і динамічного зрівноваження – двома АБ.

§1. Опис системи, основні допущення

Ізольована матеріальна система складається з несучого обертового тіла (рис., а) і приєднаних тіл, які можуть рухатися відносно несучого тіла. Відносно руху тіл перешкоджають сили в'язкого опору. В системі немає елементів, здатних накопичувати потенціальну енергію і тому її повна енергія співпадає із кінетичною.

Оскільки система ізольована, то її центр мас – точка G рухається рівномірно і прямолінійно. Не обмежуючи загальності вважаємо, що він нерухомий. Також має місце закон збереження моменту кількості руху системи $K_G = \text{const}$. Введемо в розглядання осі $Gx_Gy_Gz_G$, в яких вісь z_G направлена уздовж вектора K_G . Нехай вони обертаються навколо осі z_G з кутовою швидкістю ω , яка відповідає першому повороту несучого тіла в просторі. Тоді відповідний кут γ є циклічною координатою, і в рівняння руху входити не буде. В процесі подальшого руху осі $Gx_Gy_Gz_G$ переходять в осі $O\xi\eta\zeta$, які визначають кінцеве положення несучого тіла, таким чином. Спочатку осі $Gx_Gy_Gz_G$ повертаються на кути Ейлера - Крилова α, β , як це показано на рис., б, внаслідок чого переходять в осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$. Потім осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$ переміщуються поступально на $-\xi_G, -\eta_G, -\zeta_G$, внаслідок чого переходять в осі $O\xi\eta\zeta$, як це показано на рис., в. Очевидно, що ξ_G, η_G, ζ_G – координати центра мас системи щодо осей $O\xi\eta\zeta$.

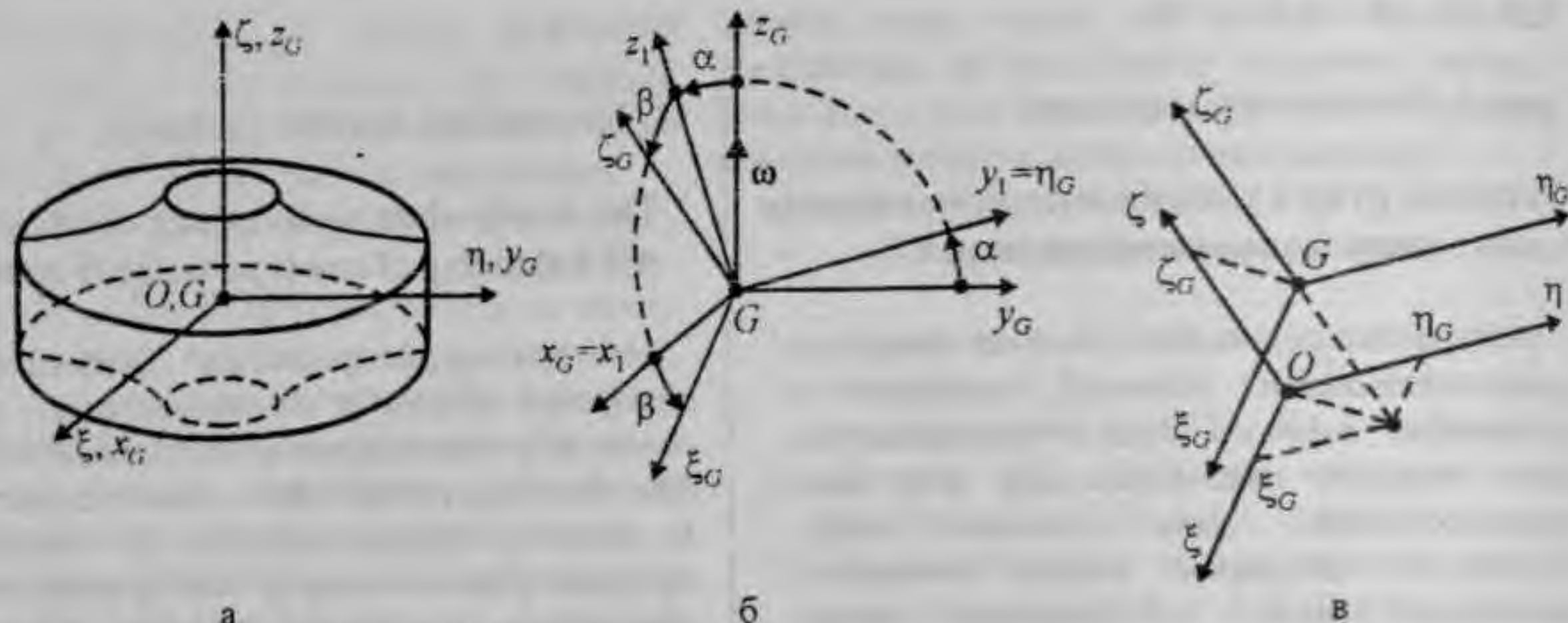


Рис. Визначення руху несучого тіла

Оскільки на систему діють тільки дисипативні сили і її повна енергія співпадає з кінетичною, то

$$dT/dt = -2R, \quad (1.1)$$

де T – кінетична енергія системи, R – дисипативна функція Релея. В зв'язку з тим, що під час перехідних процесів до системи не підводиться зовнішня і внутрішня енергія, то з часом система прийде до усталеного руху, у якому відносний рух приєднаних тіл припиниться і система буде обертатися як одне жорстке ціле навколо осі z_G .

Тензор інерції системи утворений несучим тілом і приєднаними тілами. Відносно осей $O\xi\eta\zeta$ його можна представити у вигляді

$$\mathbf{J}_O = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

де відцентрові моменти інерції системи $J_{\xi\zeta}$, $J_{\eta\zeta}$ характеризують моментну незрівноваженість системи.

Тензор інерції системи щодо центральних осей системи $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} (\eta_G^2 + \zeta_G^2) & -\xi_G\eta_G & -\xi_G\zeta_G \\ -\xi_G\eta_G & (\xi_G^2 + \zeta_G^2) & -\eta_G\zeta_G \\ -\xi_G\zeta_G & -\eta_G\zeta_G & (\xi_G^2 + \eta_G^2) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

де M_Σ – маса всієї системи. Зауважимо, що координати ξ_G , η_G характеризують статичну незрівноваженість системи.

Нехай $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – узагальнені координати, які задають відносні положення приєднаних тіл

відносно несучого тіла. Тоді

$$\begin{aligned} \xi_{Gi} &= \xi_{Gi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & \eta_{Gi} &= \eta_{Gi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ J_{\xi\zeta} &= J_{\xi\zeta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), & J_{\eta\zeta} &= J_{\eta\zeta}(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \\ \mathbf{J}_G &= \mathbf{J}_G(\varphi_1, \dots, \varphi_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рух системи цілком визначають такі незалежні параметри

$$\alpha, \beta, \omega, \varphi_1, \dots, \varphi_n. \quad (1.5)$$

На усталених рухах системи вони – сталі. Параметр $\omega = \dot{\gamma}$ – відповідає циклічній кутовій координаті γ . На усталених рухах він визначає кутову швидкість обертання системи.

§2. Узагальнені рівняння усталених рухів

Кінетична енергія системи є функцією вигляду

$$T = T(\omega, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n). \quad (2.1)$$

Рівняння Лагранжа II роду дають такі диференціальні рівняння руху системи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_j} &= Q_j, & j &= \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де Q_j – узагальнена сила в'язкого опору, яка діє на приєднане тіло j . Вона стає рівною нулю, коли відносний рух тіла припиняється ($\dot{\varphi}_j = 0$).

На усталених рухах кінетична енергія системи є енергією обертального руху системи навколо центра мас і визначається за формулою

$$T_0 = \frac{1}{2} \omega_0^T \mathbf{J}_G \omega_0, \quad (2.3)$$

де

$$\omega_0 = \omega(-\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha, \cos \alpha \cos \beta)^T \quad (2.4)$$

- вектор кутової швидкості обертання системи на усталеному русі, знайдений в проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$.

Введемо у розглядання одиничні вектори $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$, направлені по осях x_G, y_G, z_G . В проекціях на осі $G\xi_G\eta_G\zeta_G$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_G &= (\cos\beta, 0, \sin\beta)^T, \\ \mathbf{y}_G &= (\sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha, -\sin\alpha \cos\beta)^T, \\ \mathbf{z}_G &= (-\cos\alpha \sin\beta, \sin\alpha, \cos\alpha \cos\beta)^T.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Оскільки $\omega_0 = \omega \mathbf{z}_G$, то з (2.3) знаходимо, що

$$T_0 = \frac{1}{2} J_{z_G} \omega^2, \quad J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G. \quad (2.6)$$

де J_{z_G} - осьовий момент інерції системи відносно осі z_G .

Рівняння Лагранжа II роду (2.2) дають такі рівняння усталених рухів системи

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \omega} &= 0, \quad -\frac{\partial T_0}{\partial \alpha} = 0, \quad -\frac{\partial T_0}{\partial \beta} = 0, \\ -\frac{\partial T_0}{\partial \varphi_j} &= 0, \quad / j = \overline{1, n} /.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Перше рівняння в (2.7) відповідає циклічній координаті γ і виражає закон збереження моменту кількості руху системи на усталеному русі. З врахуванням (2.6) з нього знаходимо, що

$$\omega = K_G / J_{z_G}, \quad (2.8)$$

де K_G - стала величина, яка дорівнює модулю моменту кількості руху системи K_G . Тоді з (2.6) знаходимо, що

$$T_0 = K_G^2 / (2J_{z_G}). \quad (2.9)$$

З (2.7) випливає, що на усталених рухах кінетична енергія T_0 приймає екстремальне, або критичне значення.

З врахуванням (2.9) решта рівнянь в (2.7) будуть еквівалентні наступним рівнянням

$$\begin{aligned}\partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 0, \quad \partial J_{z_G} / \partial \beta = 0, \\ \partial J_{z_G} / \partial \varphi_j &= 0, \quad / j = \overline{1, n} /.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Звідки випливає, що на усталених рухах осьовий момент інерції системи J_{z_G} приймає екстремальне, або критичне значення.

Перетворимо перші два рівняння в (2.10). В силу симетрії тензора $\mathbf{J}_G$

$$\begin{aligned}\partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{z}_G / \partial \alpha, \\ \partial J_{z_G} / \partial \beta &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \partial \mathbf{z}_G / \partial \beta.\end{aligned}\quad (2.11)$$

З врахуванням (2.5) знаходимо

$$\partial \mathbf{z}_G / \partial \alpha = \mathbf{y}_G, \quad \partial \mathbf{z}_G / \partial \beta = -\mathbf{x}_G \cos \alpha. \quad (2.12)$$

Підставляючи це в (2.11), а (2.11) в (2.10), одержимо

$$\begin{aligned}\partial J_{z_G} / \partial \alpha &= 2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G = 2J_{y_G z_G} = 0, \\ \partial J_{z_G} / \partial \beta &= -2\mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{x}_G \cos \alpha = \\ &= -2J_{x_G z_G} \cos \alpha = 0,\end{aligned}\quad (2.13)$$

де $J_{x_G z_G}, J_{y_G z_G}$ - відцентрові моменти інерції системи.

Зауважимо, що коли $\cos \alpha \approx 0$, кути Ейлера-Крилова мають особливість. В цьому випадку переозначенням осей і введенням нових кутів α', β' , таких, що $\cos \alpha' \neq 0$ можна показати, що рівняння (2.13) еквівалентні вимозі, щоб відцентрові моменти інерції $J_{x_G z_G}, J_{y_G z_G}$ дорівнювали 0. З цього випливає загальновідомий факт, що якщо на усталеному русі ізольована система обертається навколо осі z_G , то це головна центральна вісь інерції системи [1].

Остаточно одержуємо узагальнені рівняння усталених рухів системи у такій формі:

$$\begin{aligned}\omega &= K_G / J_{z_G}, \quad J_{z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{z}_G; \\ J_{y_G z_G} &= \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{y}_G = 0, \quad J_{x_G z_G} = \mathbf{z}_G^T \mathbf{J}_G \mathbf{x}_G = 0; \\ \partial J_{z_G} / \partial \varphi_j &= 0, \quad / j = \overline{1, n} /.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Зробимо наступні зауваження.

1. Вигляд рівнянь (2.14) не залежить від кутів повороту, визначаючих перехід осей $Gx_G y_G z_G$ в осі $G\xi_G \eta_G \zeta_G$, а залежить від одиничних векторів $\mathbf{x}_G, \mathbf{y}_G, \mathbf{z}_G$, спрямованих по координатним осям x_G, y_G, z_G . Тому іншим кутам будуть відповідати інші вирази для одиничних векторів, ніж (2.5).

2. Рівняння (2.14) - це система нелінійних алгебраїчних рівнянь. Одержання всіх розв'язків цієї системи в аналітичному вигляді - важка задача. В роботі [8] для пошуку всіх усталених рухів був використаний числовий метод повного перебору. Останній дозволяє знаходити для конкретних систем у числовому вигляді всі усталені рухи системи.

§3. Оцінка стійкості усталених рухів

Для оцінки стійкості усталених рухів будемо використовувати те, що коли кінетична енергія усталеного руху T_0 набуде: абсолютного мінімального значення, то рух стійкий і це – достатня умова стійкості; локального мінімального значення, то це – необхідна умова стійкості і цей випадок потребує подальших досліджень; критичного, максимального, або локального максимального значення, то рух нестійкий [3-5].

Тоді з (2.9) можна зробити наступні висновки. Коли осьовий момент інерції J_{z_G} на усталеному русі набуде:

- абсолютного максимального значення, то рух стійкий і це – достатня умова стійкості;
- локального максимального значення, то це – необхідна умова стійкості і цей випадок потребує подальших досліджень;
- критичного, мінімального, або локального мінімального значення, то рух нестійкий.

Стійкість усталених рухів зручніше оцінювати за осьовим моментом інерції J_{z_G} . Введемо позначення

$$a_{ij} = -\partial^2 J_{z_G} / \partial q_i \partial q_j, \\ q = (\alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n), \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (3.1)$$

Нехай на певному усталеному русі

$$q = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n), \quad a_{ij} = \bar{a}_{ij}, \quad / i, j = \overline{1, n} /. \quad (3.2)$$

Тоді, відповідно до критерію Сильвестра умовами максимуму осьового моменту інерції J_{z_G} на цьому усталеному русі будуть [1]:

$$\bar{a}_{ii} > 0, \quad / i = \overline{1, n} / , \\ \Delta_j = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{j1} & \dots & \bar{a}_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad / j = \overline{2, n} /. \quad (3.3)$$

§4. Умови зрівноваження АБ обертового тіла

1. Динамічне зрівноваження несучого тіла.

Нехай тіла АБ можуть усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла. Нехай система здійснює основний рух – у якому обертове тіло зрівноважене і система обертається як одне ціле навколо осі z_G . Нехай на основному русі осі $O\xi\eta\zeta$ і $Gx_Gy_Gz_G$ співпадають і відносно них система має головні центральні осьові моменти інерції A, B, C . Нехай тіла АБ дещо відхилилися від положення, в якому зрівноважують несуче тіло. Тоді тензор інерції та координати центра

мас системи щодо осей $O\xi\eta\zeta$, можна представити у вигляді

$$J_O = \begin{pmatrix} A + \varepsilon \tilde{J}_\xi & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\eta} & B + \varepsilon \tilde{J}_\eta & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} \\ -\varepsilon \tilde{J}_{\xi\zeta} & -\varepsilon \tilde{J}_{\eta\zeta} & C \end{pmatrix}, \\ \xi_G = \varepsilon \tilde{\xi}_G, \quad \eta_G = \varepsilon \tilde{\eta}_G, \quad \zeta_G = \varepsilon \tilde{\zeta}_G, \quad (4.1)$$

де $|\varepsilon| \ll 1$, і врахована властивість тіл АБ не змінювати осьовий момент інерції C [2].

Шукаємо α, β у вигляді

$$\alpha \approx \alpha_1 \varepsilon, \quad \beta \approx \beta_1 \varepsilon. \quad (4.2)$$

Тоді з врахуванням (1.3), (2.5) із (2.14), з точністю до величин другого порядку малості включно, знаходимо

$$J_{z_G} \approx C + \varepsilon^2 \{ [(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 - \\ - M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2) + 2(\beta_1 \tilde{J}_{\xi\zeta} - \alpha_1 \tilde{J}_{\eta\zeta})] \}, \\ J_{x_G z_G} \approx [(A-C)\beta_1 + \tilde{J}_{\xi\zeta}] \varepsilon = 0, \\ J_{y_G z_G} \approx [-(B-C)\alpha_1 + \tilde{J}_{\eta\zeta}] \varepsilon = 0. \quad (4.3)$$

Розглядатимемо параметри незрівноваженості $\tilde{\xi}_G, \tilde{\eta}_G, \tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$ як узагальнені координати, що характеризують рух системи. На основному русі вони дорівнюють нулю. Відмітимо, що вони незалежні (бо АБ може усунути динамічну незрівноваженість несучого тіла) і виражаються через узагальнені координати $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, які задають положення тіл АБ щодо несучого тіла.

Розв'язком останніх двох рівнянь системи (4.3) відносно $\tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$ буде

$$\tilde{J}_{\xi\zeta} = -(A-C)\beta_1, \quad \tilde{J}_{\eta\zeta} = (B-C)\alpha_1. \quad (4.4)$$

Підставляючи $\tilde{J}_{\xi\zeta}, \tilde{J}_{\eta\zeta}$ в осьовий момент інерції J_{z_G} з (4.3), отримаємо

$$J_{z_G} \approx C - \varepsilon^2 \{ [(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 + \\ + M_\Sigma(\tilde{\xi}_G^2 + \tilde{\eta}_G^2)] \}. \quad (4.5)$$

З (4.5) видно, що осьовий момент інерції J_{z_G} матиме максимум, коли

$$A, B > C, \quad (4.6)$$

тобто у випадку витягнутого складеного тіла, утвореного несучим тілом і АБ. При цьому J_{z_G} приймає на основному русі локальне

максимальне значення і тому отримані умови є необхідними умовами настання динамічного зрівноваження.

2. Статичне зрівноваження несучого тіла.

Нехай статичну незрівноваженість несучого тіла усуває один АБ. Нехай площина зрівноваження (і статичної незрівноваженості) паралельна площині $O\xi\eta$ і зміщена на координату b по осі ζ . Тоді

$$\tilde{J}_{\xi\xi} = M_z \tilde{\xi}_{\xi} b, \quad \tilde{J}_{\eta\eta} = M_z \tilde{\eta}_{\eta} b. \quad (4.7)$$

Тоді система (4.3) прийме вигляд

$$\begin{aligned} J_{\alpha_i} &\approx C + \varepsilon^2 \{ [(B-C)\alpha_1^2 + (A-C)\beta_1^2 - \\ &- M_z(\tilde{\xi}_{\xi}^2 + \tilde{\eta}_{\eta}^2) + 2M_z b(\beta_1 \tilde{\xi}_{\xi} - \alpha_1 \tilde{\eta}_{\eta})] \}, \\ J_{\alpha_i \alpha_i} &\approx [(A-C)\beta_1 + M_z \tilde{\xi}_{\xi} b] \varepsilon = 0, \\ J_{\eta \alpha_i} &\approx [-(B-C)\alpha_1 + M_z \tilde{\eta}_{\eta} b] \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

З останніх двох рівнянь знаходимо

$$\alpha_1 = M_z \tilde{\eta}_{\eta} b / (B-C), \quad \beta_1 = -M_z \tilde{\xi}_{\xi} b / (A-C). \quad (4.9)$$

Підставляючи (4.9) в J_{α_i} з (4.8), отримаємо

$$\begin{aligned} J_{\alpha_i} &\approx C - \varepsilon^2 M_z \left(\frac{A + b^2 M_z - C}{A-C} \tilde{\xi}_{\xi}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B + b^2 M_z - C}{B-C} \tilde{\eta}_{\eta}^2 \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Умовами, що J_{α_i} приймає на основному русі максимальне значення, будуть

$$\begin{aligned} (A + b^2 M_z - C) / (A-C) &> 0, \\ (B + b^2 M_z - C) / (B-C) &> 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

З них знаходимо такі два випадки, при яких теоретично можливе статичне зрівноваження несучого тіла

$$\begin{aligned} 1) & A, B > C, \\ 2) & C > A + b^2 M_z, \quad C > B + b^2 M_z. \end{aligned} \quad (4.12)$$

У першому випадку складене тіло – витягнуте, а в другому – сплюснуте, і площина зрівноваження знаходиться поблизу центра мас системи.

У разі витягнутого несучого тіла J_{α_i} приймає на основному русі локальне максимальне значення і тому отримані умови є необхідними умовами настання зрівноваження.

У разі сплюснутого несучого тіла J_{α_i} приймає на основному русі абсолютне максимальне значення і тому отримані умови є достатніми умовами настання зрівноваження.

Зауважимо, що у проведених дослідженнях тип АБ не обумовлювався. Тому одержані умови зрівноваження АБ обертового тіла застосовні для АБ будь-якого типу, тобто є узагальненими.

Список використаних джерел

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
3. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft // Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, – p. 70.
4. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ, т. XXVII, вып. 1, 1963, – С. 16-26.
5. Алпер Дж. Р. Теория маятникового демпфера нутационных колебаний спутника // Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 3, – С. 170-176.
6. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиrom // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2005, – №4. – С. 67-76.
7. Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В. Стабілізація положення осі вращення твердого тела связанными абсолютно твердыми телами. // Прикл. механика. – 2005, – 41, №8. – С. 122-129.
8. Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами // Збірник наукових праць КНТУ, 2006. Вип. №17, – С. 234-240.

Надійшла до редколегії 04.07.07

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Акіменко В.В., д.т.н., професор, Сугоняк І.І.*

Динамічні моделі життєвого циклу інновацій в умовах невизначеності

У статті досліджуються динамічні моделі життєвого циклу інноваційної продукції в умовах невизначеності. Отримані аналітичні та чисельні розв'язки для певного класу моделей.

Ключові слова: нелінійні системи диференціальних рівнянь, методи зняття невизначеності, ієрархічні моделі, життєвий цикл інновацій.

*E-mail: isygon@mail.ru

Підтримка прийняття рішень щодо інноваційних процесів на підприємстві й побудова відповідних математичних моделей потребує використання системного аналізу, методів побудови багаторівневих стратифікованих систем, методів моделювання нелінійних динамічних систем, математичних методів зняття невизначеності. В основу моделювання життєвого циклу інновацій і взаємодії суб'єктів ринку покладені динамічні моделі Лотки-Вольтерра [1], [2] з популяційної екології. В ієрархічних стратифікованих системах даного типу на різних рівнях ієрархії присутня невизначеність у виборі стратегії поведінки вищестоящих страт. У статті на основі методів зняття невизначеності досліджені групи лінійних і нелінійних моделей динаміки життєвого циклу інновацій для тривірневих стратифікованих систем. Отримані аналітичні й чисельні розв'язки для динамічних систем дозволяють проаналізувати всі відомі типи процесів динаміки інновацій і визначити тип поведінки (стратегії) учасників інноваційного процесу.

1. Для дослідження процесу динаміки інновацій розглянемо тривірневу стратифіковану систему: Виробник (1 рівень), Дилер (2 рівень), Споживач (3 рівень) (рис.1).



Рис.1

де G_i – обсяг виробництва інноваційного продукту, r_i – обсяг зовнішніх фінансових потоків у ви-

Akimemko V.V., professor, Sygonyak I.I.

Dynamic models of the innovations life cycle in condition of the uncertainties

The question of the building dynamic models of the life circle of innovation production is bounded in the article.

Key words: nonlinear system of the differential equations, methods of the removing to uncertainties, hierarchical managerial system, life circle of innovations

робничий процес; r_2 – фінансові потоки розповсюджувача; G_2 – обсяг реалізації продукції Дилером; r_3 – обсяг фінансових ресурсів Споживача; G_3 – обсяг попиту на інноваційний продукт, $B_i = f(b_i, G_i)$ доходи i -го суб'єкта ринку, $D_i = f(d_i, G_i)$ витрати i -го суб'єкта ринку; b_i, d_i – питома швидкість росту (зменшення) фінансових ресурсів i -го учасника ринку в замкнутому циклі перерозподілу ресурсів у системі. Для моделювання процесу скористаємось моделлю Лотки-Вольтера в загальному вигляді [1], [2]:

$$\begin{cases} \dot{G}_1(t) = r_1(t) - f_1((d_1 - b_1), G_1, G_2, G_3, t); \\ \dot{G}_2(t) = r_2(t) - f_2((d_2 - b_2), G_1, G_2, G_3, t); \\ \dot{G}_3(t) = r_3 - f_3(G_1, G_2, d_3 G_3, t); \\ G_1|_{t=0} = 0, G_2|_{t=0} = 0, G_3|_{t=0} = G_3^0. \end{cases} \quad (1)$$

Життєвий цикл інновації визначається умовою падінням попиту на інноваційний продукт до рівня $G_3(t^*) = G_3^*$. Де G_3^* – експертна оцінка мінімально можливого обсягу попиту на інноваційний продукт.

Точна інформація про поведінку Споживача й Дилера на ринку відсутня. Це означає, що неможливо визначити точні значення параметрів системи, які характеризують швидкість зростання доходів Виробника (b_1), швидкість зростання доходів (b_2) і витрат (d_2) Дилера, швидкість споживчих витрат (d_3). На основі існуючої статистичної інформації про ринок, у даній системі можна визначити допустимі діапазони значень, вище вказаних параметрів. У такому випадку для зняття невизначеності коефіцієнтів можна застосувати метод інтегральної згортки [3].

Для системи (1) запишемо рівняння балансу фінансових потоків: витрати Споживача є дохо-

дами Дилера й виробника, у свою чергу витрати Дилера є доходами Виробника:

$$d_3 G_3 = (b_2 - d_2) G_2 + b_1 G_1. \quad (2)$$

Додаткову умову (4) замкнутого циклу розподілу фінансових ресурсів між Споживачами, Ділерами й Виробником можна використовувати в (2) для зняття невизначеності коефіцієнтів b_2, d_2, d_3 , за умови відсутності апіорної інформації про діапазон припустимих значень параметрів (параметри вільного ринку).

2. Лінійні моделі. Отримане рівняння зв'язку (3) дозволяє першому рівню стратифікації (Виробникові) одержати дві гіпотези про поведінку нижніх рівнів системи (Дилерів і Споживачів) на основі моделі (1).

Гіпотеза 1. Поведінка Дилерів відомо. Підприємство впливає на процес ціноутворення й придбання продукції Ділерами (невизначеним є параметр d_3 , що визначає поведінку Споживача на ринку). Розглянемо лінійний варіант моделі (1). Для зняття невизначеності в параметрах поведінки Споживача підставимо (2) у третє рівняння системи (1), маємо:

$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = r_1 - d_1 G_1 + b_1 G_1 \\ \frac{dG_2}{dt} = r_2 - d_2 G_2 + b_2 G_2; \\ \frac{dG_3}{dt} = r_3 - (b_2 - d_2) G_2 - b_1 G_1; \\ G_1|_{t=0} = 0, G_2|_{t=0} = 0, G_3|_{t=0} = G_3^0. \end{cases} \quad (3)$$

При $d_i, b_i, r_i = \text{const}$ можна одержати наступний аналітичний розв'язок (4). Графіки лінійної системи (4) при коефіцієнтах, наведених у табл. 1 мають вигляд рис. 2.

Для моделі (3), у діапазоні дослідження ($0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1$), виявлено, що поведінка Виробників і Дилерів не залежить від стану ринку й попиту на продукцію, і визначається співвідношенням коефіцієнтів b_i, d_i . При $b_i - d_i > 0$ доходи Виробника й Дилера, і відповідно обсяг виробництва зростає, при $b_i - d_i < 0$ Виробник і Дилер зазнає збитків (інноваційний проект провалюється). Введемо відносні характеристичні константи $\Delta_1 = \frac{b_1}{d_1}, \Delta_2 = \frac{b_2}{d_2}$ ($0 < \Delta_i < 1$) для якісного аналізу успішних інноваційних процесів. При покроковій зміні параметрів $\Delta_i \in (0,1)$ тип кривих на рис. 2 не змінюється.

$$\begin{cases} G_1 = \frac{r_1}{b_1 - d_1} (\exp((b_1 - d_1)t) - 1); \\ G_2 = \frac{r_2}{b_2 - d_2} (\exp((b_2 - d_2)t) - 1); \\ G_3 = \frac{r_2}{b_2 - d_2} (1 - \exp((b_2 - d_2)t)) + \frac{b_1 r_1}{(b_1 - d_1)^2} \times \\ \times (1 - \exp((b_1 - d_1)t)) + G_3^0 + \left(r_3 + r_2 + \frac{b_1 r_1}{b_1 - d_1} \right) t; \\ b_1 - d_1 \neq 0; b_2 - d_2 \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Таблиця 1

b_1	d_1	b_2	d_2	r_1	r_2	r_3	G_3^0
0,5	0,1	0,4	0,1	0,01	0,01	0,01	1

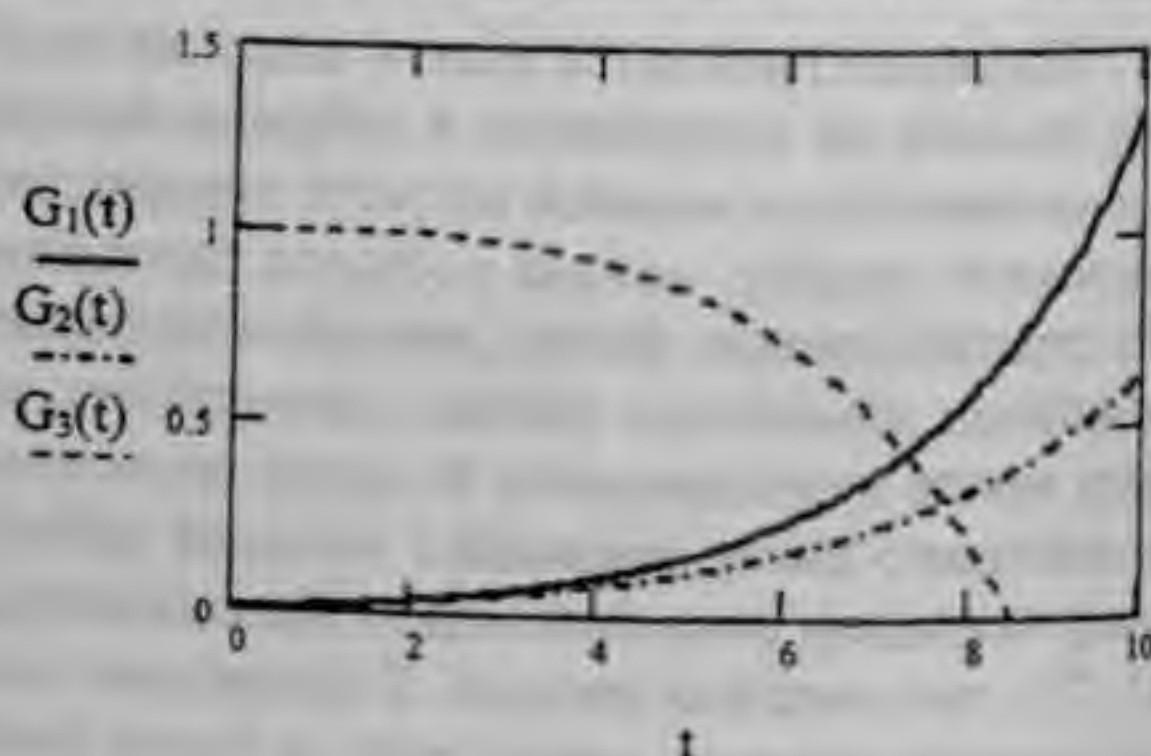


Рис.2

При $\frac{|1 - \Delta_1|}{|1 - \Delta_2|} > 1$ зростання обсягів виробництва перевищує обсяги реалізації продукції Ділером, що свідчить про доцільність організації прямих продажів. Ця ситуація відображена на графіках $G_1(t), G_2(t)$ (рис.2). При $\frac{|1 - \Delta_1|}{|1 - \Delta_2|} \leq 1$ прямий продаж не є доцільним, тому що Дилер має можливість реалізувати всю запропоновану продукцію. На рис 2. графіки $G_1(t), G_2(t)$ міняються місцями.

Із (4) слід, що обсяг виробництва й обсяг продажів Дилера залежить тільки від зовнішніх фінансових джерел. Поводження Споживача залежить від Виробників і Дилерів (якщо пропозиція зменшується попит зростає, якщо пропозиція збільшується попит зменшується). Якщо параметри $b_i \in [\bar{b}_i, \bar{\bar{b}}_i], d_i \in [\bar{d}_i, \bar{\bar{d}}_i]$, то Виробник може використовувати метод інтегральної згортки для зняття невизначеності:

$$G_i(b_i, \bar{b}_i, t) = \frac{1}{\bar{b}_i - \bar{\bar{b}}_i} \int_{\bar{\bar{b}}_i}^{\bar{b}_i} G_i(b_i, t) db_i \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} G_1 &= \frac{r_1 t}{\bar{b}_1 - \bar{b}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(\bar{b}_1 - d_1)^{n+1} - (\bar{b}_1 - d_1)^{n+1}]}{(n+1)!(n+1)}; \\ G_2 &= \frac{r_2 t}{\bar{b}_2 - \bar{b}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(\bar{b}_2 - d_2)^{n+1} - (\bar{b}_2 - d_2)^{n+1}]}{(n+1)!(n+1)}; \\ G_3 &= \frac{r_1 t^2}{\bar{b}_1 - \bar{b}_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(n+1)\bar{b}_1 + d_1](\bar{b}_1 - d_1)^{n+1} - [(n+1)\bar{b}_1 + d_1](\bar{b}_1 - d_1)^{n+1}}{(n+2)!(n+1)(n+2)} - \\ &\quad - \frac{r_2 t^2}{\bar{b}_2 - \bar{b}_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(\bar{b}_2 - d_2)^{n+1} - (\bar{b}_2 - d_2)^{n+1}]}{(n+2)!(n+1)} + G_3^0 + r_3 t; \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Проведений аналіз отриманих рішень (4), (6), дозволяє зробити висновок, що поведінка Споживача відповідає типам життєвих циклів товарів на ринку з [4] коли попит на продукти залежить від наявності товару на ринку.

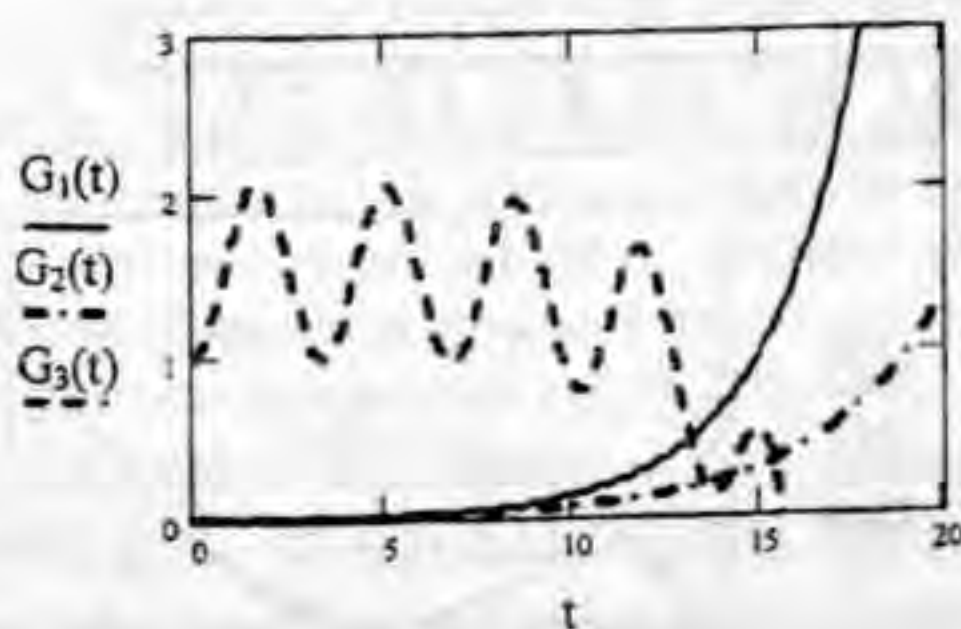
Тип графіка життєвого циклу інновації змінюється залежно від типу функції $r_3(t)$.

Для лінійної залежності $r_3(t) = a + mt$ (a, m параметричні константи) має місце традиційний життєвий цикл товару (рис.2).

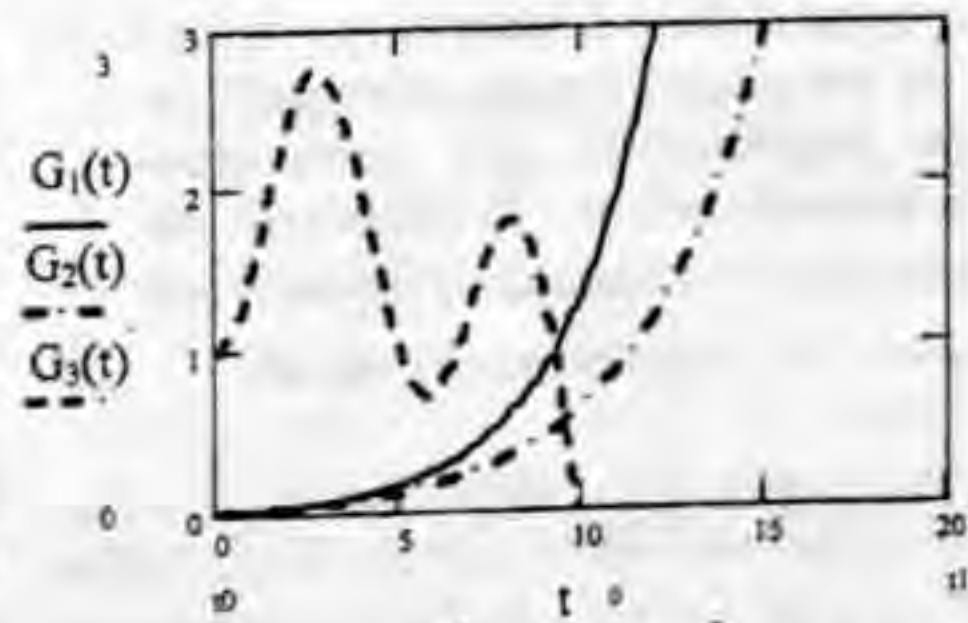
Якщо $r_3(t)$ є періодичною функцією $r_3(t) = a \sin(\frac{m}{k} \pi t)$ (a, k, m – параметри функції), то в досліджуваному діапазоні ($0.001 \leq b_1, d_1, r_1 \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1$) одержуємо три типи процесів (традиційний рис. 2, сезонні коливання рис. 3 а, повернення інтересу рис. 3 б при коефіцієнтах табл.2):

Таблиця 2

	b_1	d_1	b_2	d_2	r_1	r_2	a	m	k	G_3^0
а)	0,5	0,1	0,4	0,1	0,01	0,01	1	5	8,45	1
б)	0,5	0,1	0,4	0,1	0,01	0,01	1	3	8,45	1



а)



б)

Рис. 3

При співвідношеннях коефіцієнтів: $m > 4$, $1 \leq \frac{a}{G_3^0} \leq 10$ і $\frac{k}{t^*} = 1$, (t^* визначається з умови $\tilde{G}_3(t^*) = 0$, $\tilde{G}_3(t)$ розв'язок системи (3) при $r_3 = 0.001$) тип графіка (рис.3 а) відповідає сезонному життєвому циклу. При $3 < m \leq 4$ й $1 \leq a/G_3^0 \leq 10$ і $k/t^* = 1$ тип графіка (рис.3 б) відповідає життєвому циклу повернення інтересу (ностальгії), при $m < 3$ й $0.01 \leq \frac{a}{G_3^0} \leq 1$ і

$\frac{k}{t^*} = 1$ тип графік відповідає традиційному життєвому циклу (рис.2).

Дослідження поведінки моделі при $r_1(t)$ показало, що функція Виробника не впливає на тип життєвого циклу, однак істотно змінює його кількісні показники, такі як тривалість життєвого циклу й пік попиту. Так, у випадку $r_1(t) = |a - mt^2|$ при покроковому дослідженні співвідношення коефіцієн-

тів $0.1 \leq \frac{m}{a} \leq 1$ функції $r_1(t)$ в діапазоні дослідження ($0.001 \leq b_1, d_1, r_1 \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1$) тривалість життєвого циклу й максимальний обсяг попиту збільшується при $\frac{a}{r_3(t)} \rightarrow 0$, і зменшується при $\frac{a}{r_3(t)} \rightarrow \infty$.

Дослідження одночасного впливу $r_1(t)$ й $r_3(t)$ не виявило нових якісних змін процесів у моделі, за умови масштабування коефіцієнтів. Залежно від співвідношення типів і параметрів функцій $r_1(t)$, $r_3(t)$ можна отримати зміни кількісних параметрів, а саме тривалості життєвого циклу й обсягів збуту.

Аналіз моделі (3) дозволяє отримати основні типи залежностей, що визначають життєвий цикл інновації. Однак, тип процесу виробництва й реалізації продукції не відображає реальну поведінку Дилера й Виробника на ринку, тому що в основному визначається тільки зовнішніми фінансовими потоками. У моделі необхідно врахувати вплив Споживача на обсяги виробництва й продажів Дилерів.

Гіпотеза 2. Поведінка Споживача на ринку відома. Однак Виробник не може впливати на поведінку Дилера (невизначеними є параметри b_2, d_2). Можна припустити, що участь Дилера в продажі продукції буде залежати від попиту Споживача на інновацію й умов реалізації, запропонованих Виробником. Для зняття невизначеності в лінійній моделі (1) параметри поведінки Дилера b_2, d_2 виразимо з другого рівняння системи (1) за допомогою (2), маємо:

$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = r_1 - d_1 G_1 + b_1 G_3 \\ \frac{dG_2}{dt} = r_2 - b_1 G_1 + d_3 G_3; \\ \frac{dG_3}{dt} = r_3 - d_3 G_3; \\ G_1|_{t=0} = 0, G_2|_{t=0} = 0, G_3|_{t=0} = G_3^0. \end{cases} \quad (7)$$

При $d_1, b_1 = \text{const}$ отримаємо аналітичний розв'язок (8)

Графіки лінійної системи при коефіцієнтах (табл.2) мають такий вигляд (рис.4).

Для моделі (7) виявлені наступні особливості. Поведінка Виробника не залежить від стану ринку й визначається аналогічно моделі

(3). Поведінка Споживача визначається обсягом зовнішніх фінансових ресурсів r_3 і витратами Споживача d_3 . При $d_3 > 0$ попит на продукцію існує, при $d_3 \leq 0$ можна відразу зробити висновок про провал проекту через відсутність попиту на даний товар.

$$\begin{cases} G_1 = \frac{r_1}{b_1 - d_1} (\exp((b_1 - d_1)t) - 1); \\ G_2 = \left(\frac{r_2}{d_3} - G_3^0 \right) \exp(-d_3 t) - \frac{b_1 r_1}{(b_1 - d_1)^2} \exp((b_1 - d_1)t) + \\ + \left[r_2 + \frac{b_1 r_1}{(b_1 - d_1)} + r_3 \right] t + \left[\frac{b_1 r_1}{(b_1 - d_1)^2} - \frac{r_3}{d_3} + G_3^0 \right]; \\ G_3 = G_3^0 \exp(-d_3 t) + \frac{r_3}{d_3} (1 - \exp(-d_3 t)); \\ r_1 - d_1 \neq 0; d_3 \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $\frac{|1 - \Delta_1|}{d_3} \leq 1$ (де $\Delta_1 = \frac{b_1}{d_1}, \Delta_1 \in (0; 1)$) прямий продаж не є доцільним, тому що Дилер має можливість реалізувати всю запропоновану продукцію (рис.4).

При $\frac{|1 - \Delta_1|}{d_3} > 1$ ріст попиту перевищує обсяги реалізації продукції Дилером, що свідчить про доцільність організації прямих продажів (графік Споживача перетне графік Дилера до досягнення Споживачем значення $G_3 = 0$).

Таблиця 3

b_1	d_1	d_3	r_1	r_2	r_3	G_3^0
0.5	0.1	0.4	0.01	0.01	0.01	1

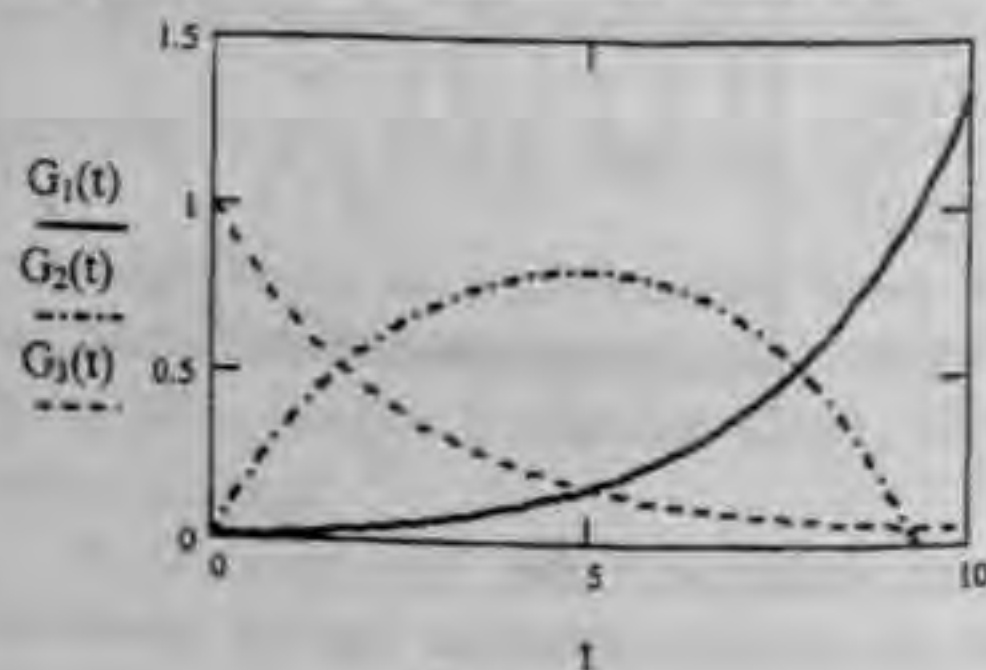


Рис.4

Із (8) випливає, що обсяг виробництва залежить тільки від зовнішніх фінансових джерел. Споживач не залежить від Дилерів і Виробників. Поведінка Дилера на ринку прямо залежить від наявності товару у Виробника й попиту на ринку (якщо товар і попит збільшуються, обсяги реалізації Дилером зменшуються).

При параметрах $b_1 \in [\bar{b}_1; \bar{b}_1], d_3 \in [\bar{d}_3; \bar{d}_3]$ Виробник може використати метод інтегральної згортки (5) для зняття невизначеності розв'язків системи (8). Одержуємо усе-

реднені значення параметрів:

$$\begin{cases} G_1 = \frac{r_1 t}{b_1 - b_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(\bar{b}_1 - d_1)^n - (\bar{b}_1 - d_1)^n]}{(n+1)!(n+1)}; \\ G_2 = r_3 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{d}_3 - \bar{d}_3)^n t^{n+1}}{(n+1)!(n+1)} - \frac{r_1 t^2}{b_1 - b_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n [(n+1)\bar{b}_1 + d_1][\bar{b}_1 - d_1]^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} - \\ - \frac{t^n [(n+1)\bar{b}_1 + d_1][\bar{b}_1 - d_1]^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} + (r_2 + r_3)t + G_3^0; \\ G_3 = G_3^0 \frac{(-\bar{d}_3 \exp(-\bar{d}_3 t) + \bar{d}_3 \exp(-\bar{d}_3 t))}{(\bar{d}_3 - \bar{d}_3)^2} - r_3 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{d}_3 - \bar{d}_3)^n t^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}; \end{cases} \quad (9)$$

Аналіз рішень (8), (9), дозволяє зробити висновки, що гіпотеза 2 не дозволяє досліджувати життєвий цикл товару, оскільки 1) вид залежності $G_3(t)$ не відповідає основним типам життєвого циклу інновацій; 2) у рівнянні поведінки Споживача не враховані обсяги виробництва й наявності товару на ринку. Поведінка Дилера залежить як від Виробника, так і від попиту на продукцію, що відповідає реальним умовам ринкової економіки. Вид графіка життєвого циклу товару не викличе якісні зміни в поведінці Виробника й Дилера при змінах типу функції $r_3(t)$.

3. Нелінійні моделі. Аналіз лінійних моделей з одного боку, виявив основні закономірності в поведінці окремих страт системи й закономірності, що обумовлюють різні типи життєвих циклів інновацій, а з іншого – їх обмеженість для практичного використання. Ці результати використовуються в більше точних нелінійних моделях системи. Скористаємось лінійною залежністю параметрів рівняння від змінних (G_1, G_2, G_3) [5].

Для гіпотези 1 система (1) з врахуванням $b_i = f(b_{i0}, b_{ij}, G_j)$, $d_i = f(d_{i0}, d_{ij}, G_j)$ має вигляд (10). Розв'язок даної системи отримуємо методом Рунге-Кутта порядку $O(\tau^4)$. Результати дослідження даної системи дозволили підтвердити відповідність системи реальним життєвим циклам інновацій, оскільки отримані типи графіків функцій збігаються з описаним в [4], і в системі присутня адекватна взаємозалежність між всіма стратами (рис.5, табл.4).

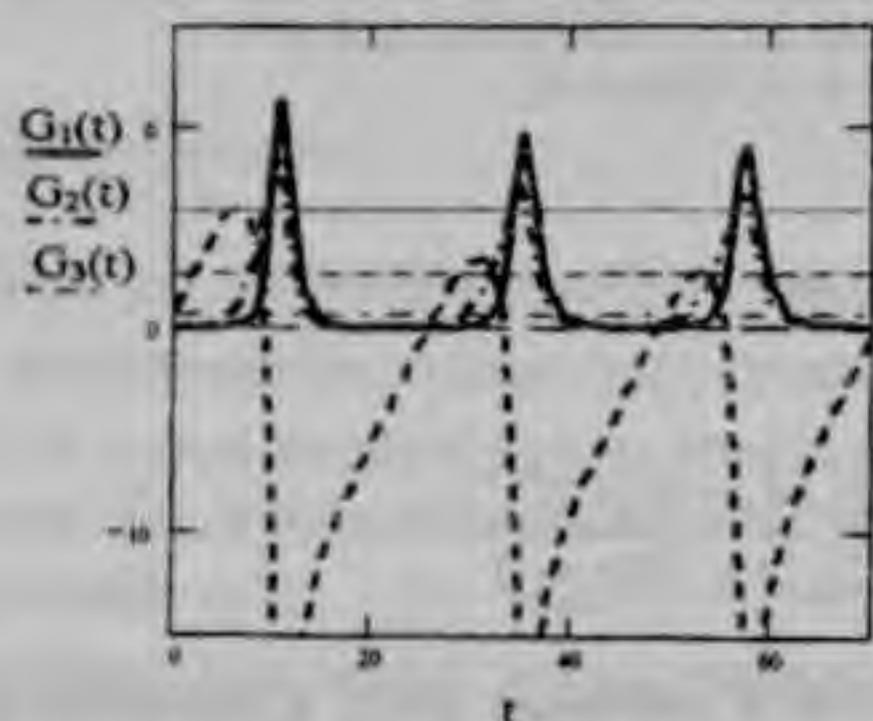
Отримано різні типи процесів для системи (10) (рис 5 графіки а), б) в), г)) при $r_i = \text{const}$ (фінансові надходження на кожному рівні страт

постійні в одиницю часу) в діапазонах, що досліджуються ($0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1$; $0 \leq G_3^0 < 1$). Аналіз результатів дозволяє виявити наступні закономірності між співвідношеннями коефіцієнтів і типом кривих на графіках системи.

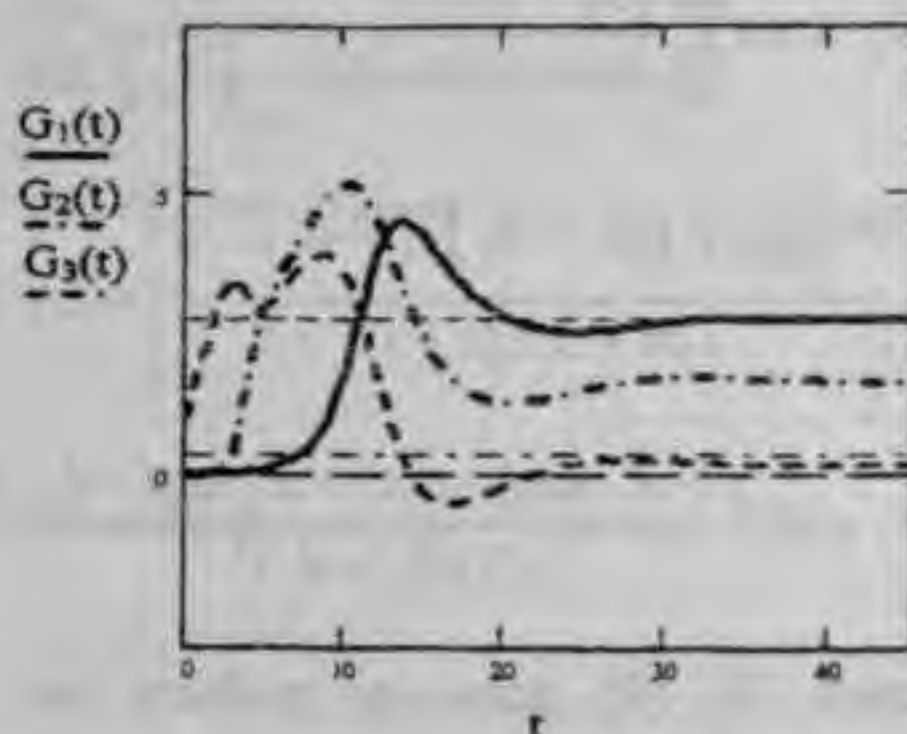
$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = r_1 + (b_{10} - d_{10} + b_{12}G_2 + b_{13}G_3 - d_{11}G_1)G_1 \\ \frac{dG_2}{dt} = r_2 - (b_{20} - d_{20} + b_{21}G_1 + b_{23}G_3 - d_{22}G_2)G_2; \\ \frac{dG_3}{dt} = r_3 - (b_{30} - d_{30} + b_{31}G_1 + b_{33}G_3 - d_{32}G_2)G_2 - \\ - (b_{10} + b_{12}G_2 + b_{13}G_3)G_1; \\ G_1|_{t=0} = 0, G_2|_{t=0} = 0, G_3|_{t=0} = G_3^0. \end{cases} \quad (10)$$

1) При співвідношеннях $r_1/r_3 \ll 0.1$; $r_2/r_3 \ll 0.1$ (фінансові витрати Споживача набагато більші за фінансові вкладення Виробника та Дилера) у досліджуваних діапазонах ($0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1$; $0 \leq G_3^0 < 1$) можна отримати всі типи процесів (рис.5 (а), (б), (в), (г)). Процес, зображений на рис. 6 (а) має місце при співвідношеннях $0 < b_{13}/b_{12} \leq 0.3$; $0 < b_{10}/b_{12} \leq 0.3$ і $0 < b_{23}/b_{21} \leq 1$, крива попиту, за формою нагадує сезонний попит. Насправді, якщо на прибуток Виробника в більшій мірі впливає Дилер, чим Споживач, а прибуток Дилера визначається здебільшого поведінкою Виробника, то виробництво продукції почне більше залежати від запитів Дилера, чим від реального рівня попиту. Тобто, графік рис.6 (а) є графіком «псевдосезонного» попиту, обумовленого взаємним впливом Дилера й Виробника.

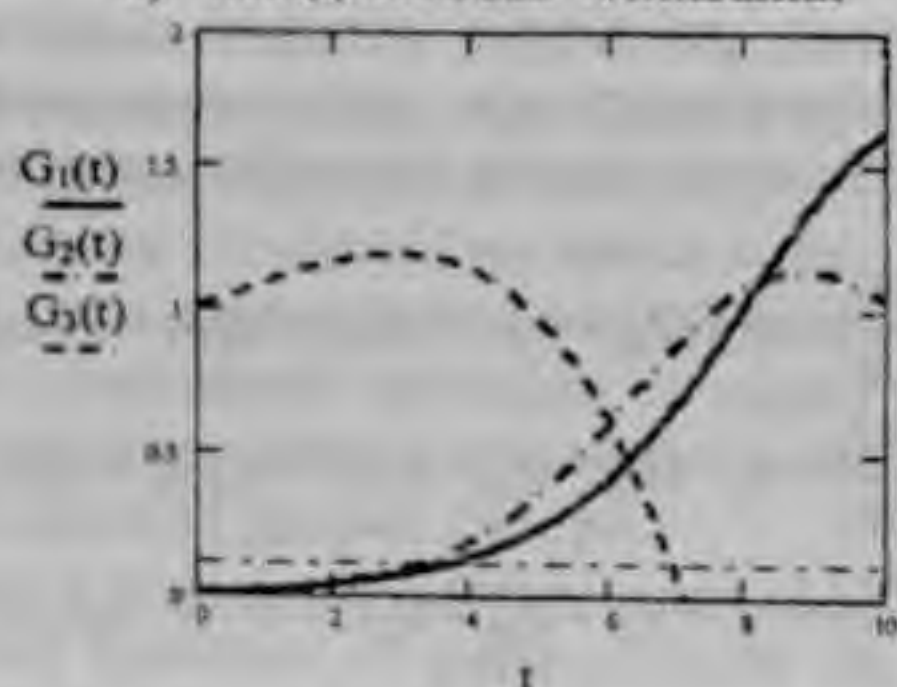
	b_{10}	b_{12}	b_{13}	d_{10}	d_{11}	b_{20}	b_{21}	b_{23}	d_{20}	d_{21}	r_1	r_2	r_3	G_3^0
а)	0,03	0,3	0,06	0,1	0,1	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,01	0,01	1,0	1
б)	0,2	0,1	0,02	0,1	0,1	0,1	0,3	0,6	0,2	0,5	0,01	0,01	1,0	1
в)	0,5	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,3	0,1	0,2	0,01	0,01	0,1	1
г)	0,5	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4	0,2	0,3	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01	1



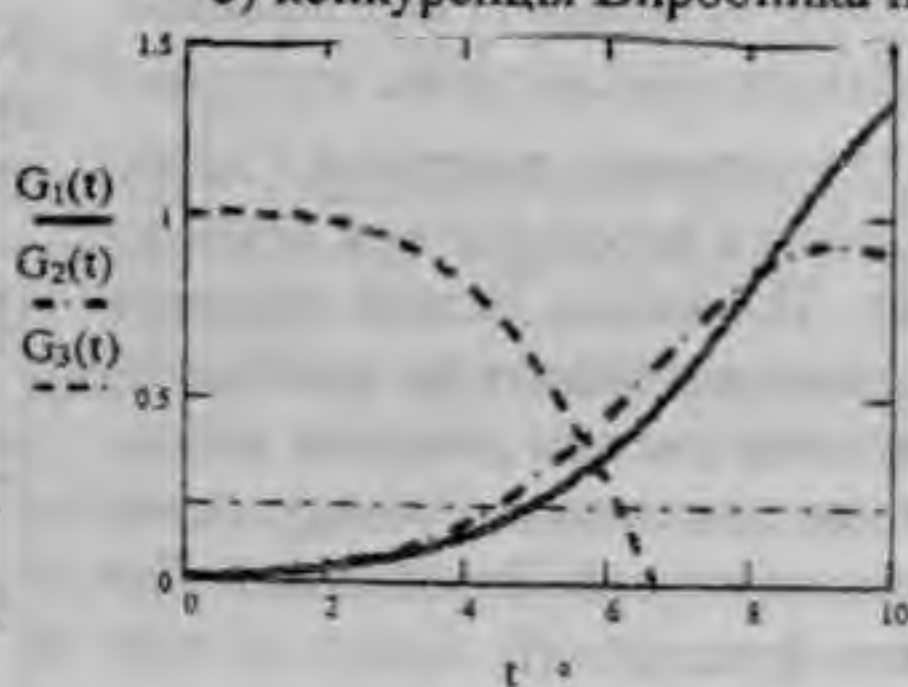
а) "псевдосезонні" коливання



б) конкуренція Виробника й Дилера



в) класичний цикл



г) провал інноваційного проекту

Рис.5

Тип процесу рис. 5 б) отримаємо $0 < b_{20}/b_{21} \leq 0.3$, $b_{23}/b_{21} \geq 1$, $0 < b_{10}/b_{21} \leq 1$, $0 < b_{12}/b_{21} \leq 1$, $0 < b_{13}/b_{23} < 0.5$ для $b_{13}/b_{12} > 0.3$, $b_{10}/b_{12} > 0$, у діапазонах $(0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1)$. У випадку, коли Споживач визначає поведінку, як Дилера так Виробника між першим і другим рівнями стратифікованої системи виникає конкуренція. При спаді попиту, Дилер і Виробник збільшують активність на ринку, що приводить до повернення інтересу Споживача (попит зростає). У цілому, графік б) відображає звичайний життєвий цикл товару, скорегований конкуренцією Дилера й Виробника на ринку.

Для співвідношень $r_1/r_3 \ll 0.1$; $r_2/r_3 \ll 0.1$ одержуємо класичний цикл (рис.5 в) і провал інноваційного проекту (рис.5 г) в досліджуваних діапазонах коефіцієнтів $(0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1)$, за умови довільних співвідношень коефіцієнтів $b_{ij}/b_{ji} > 0$ крім сполучень, описаних для випадків а) і б). Дані процеси є однотипними, і вста-

новити між ними різницю можна тільки на основі експертних даних про рівень попиту, що вважається мінімально допустимим для конкретної групи товарів G_3^0 . Графіки поведінки Споживача відповідають графікам, отриманим для лінійної системи (4).

2) При співвідношеннях $r_1/r_3 > 0.1$; $r_2/r_3 > 0.1$ при довільних співвідношеннях коефіцієнтів $(b_{ij}/b_{ji}) > 0$ у границях життєвого циклу продукції отримані процеси рис. 5 (в) і (г).

3) Застосування залежностей $r_3(t)$, отриманих для моделювання сезонного попиту й життєвого циклу повернення інтересу моделі (10), підтвердило для нелінійної моделі правильність висновків зроблених при дослідженні лінійній системі (3).

4) Дослідження умов існування стійких розв'язків дозволило визначити особливі точки системи (10):

$$k = (b_{21} + d_{11}b_{23})G_1 + (b_{20} - d_{20} + b_{10}b_{23} + d_{10}b_{23}) - \frac{r_1}{G_1}$$

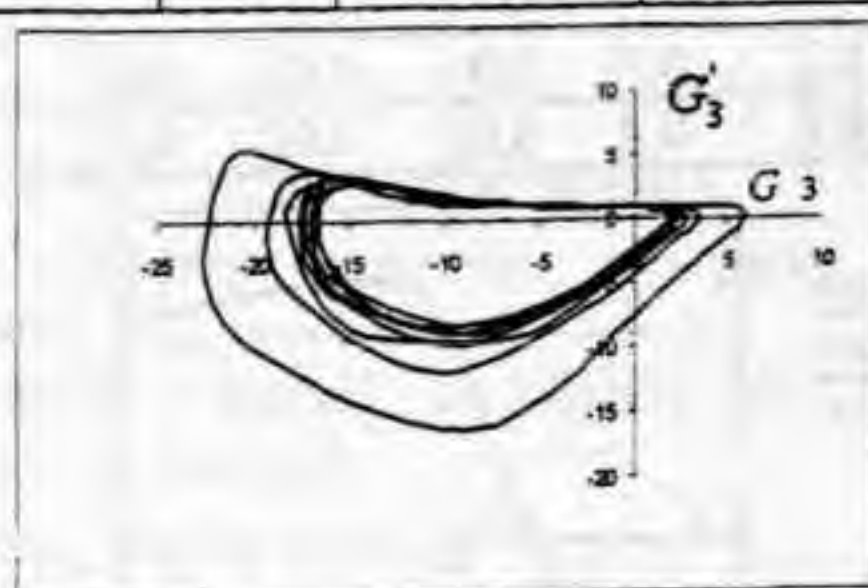
$$\begin{cases} G_1^* = \frac{-d_{10} \pm \sqrt{d_{10}^2 + 4d_{11}(r_1 + r_2 + r_3)}}{2d_{11}} \\ G_2^* = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4r_2 \left(\frac{b_{12} \cdot b_{23} - b_{13} \cdot d_{22}}{b_{13}} \right)}}{2 \frac{b_{12} \cdot b_{13} - b_{13} \cdot d_{22}}{b_{13}}} \\ G_3^* = \frac{1}{b_{13}} \left(\frac{-r_1}{G_1^*} - b_{10} - d_{10} - d_{11}G_1^* + b_{12}G_2^* \right) \end{cases}$$

З врахуванням коефіцієнтів табл.4 отримаємо особливі точки (табл.5). Результати, що потрапляють в діапазон дослідження відображено на рис. 5 (а,б,в,г). Дослідження підтвердило стійкість розв'язків системи (10) в околі особливих точок.

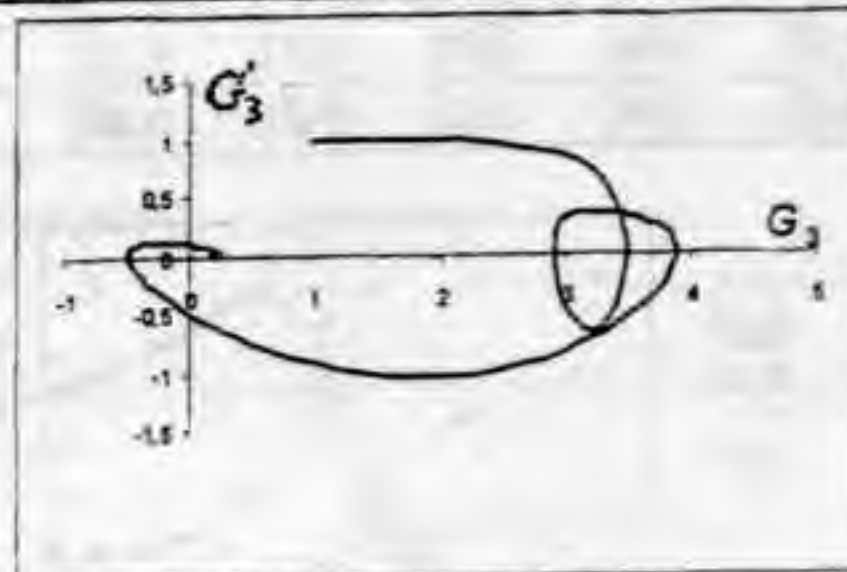
На рис.6(а), (б), (в), (г) наведені фазові портрети (G_3', G_3) для нелінійних систем, що відповідають типам життєвих циклів інновацій на рис.5.

Таблиця 5

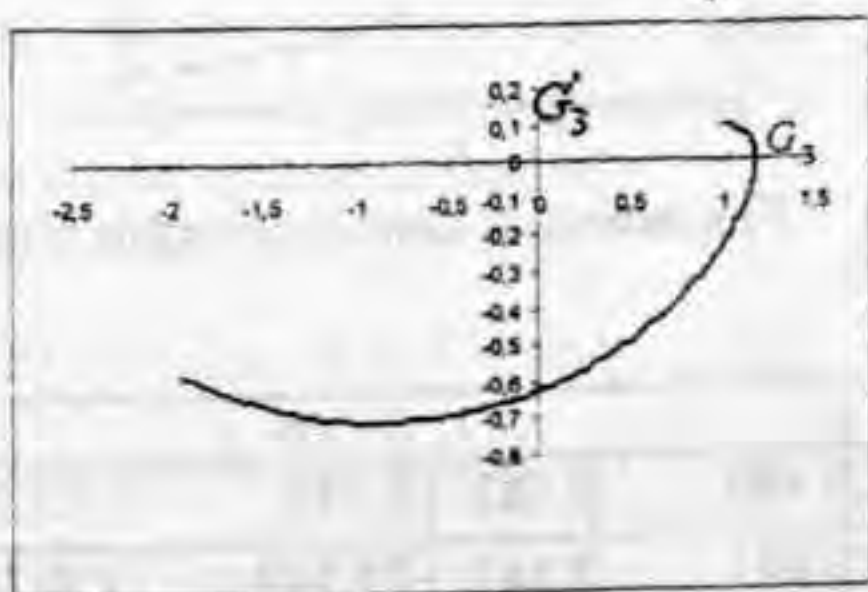
	а)				б)			
G_1	2.732	2.732	-3.733	-3.733	2.732	2.732	-3.733	-3.733
G_2	-9.18E-3	-2.723	0.04	0.622	-7.132E-3	-0.561	0.011	0.351
G_3	5.827	19.396	-5.3	-1.921	8.879	11.648	-23.854	-5.134
	в)				г)			
G_1	2.022	2.022	-2.522	-2.522	0.211	0.211	-0.711	-0.711
G_2	-8.87E-3	-2.819	0,064-0,145i	0,064+0,145i	-0.016	-1.218	0,093-0,107i	0,093+0,107i
G_3	0.111	5.731	-9,212+0,29i	-4.04	-3.074	-0.668	-5,749+0,214i	-4,141



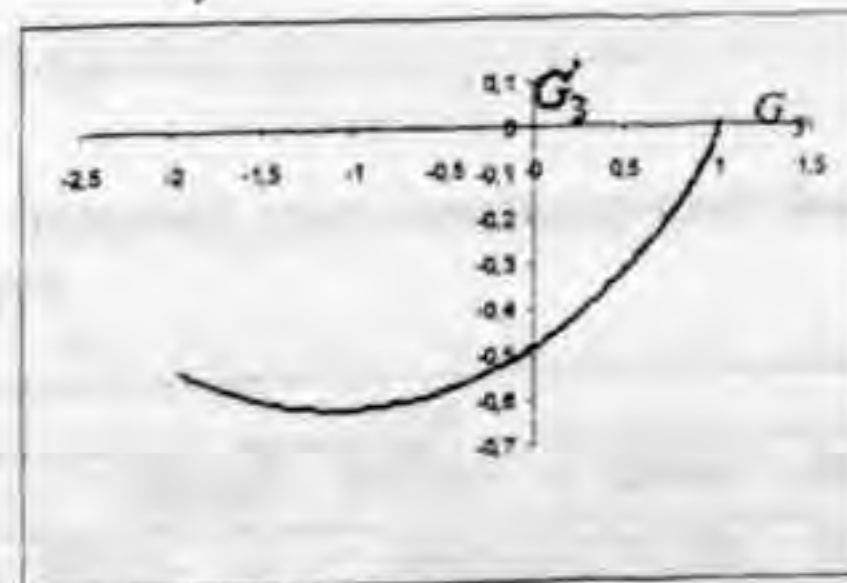
а)



б)



в)



г)

Рис.6

Нелінійна модель із врахуванням гіпотези 2 має вигляд (11). Розв'язок, отриманий методом Рунге-Кутта $O(\tau^4)$ дозволяє зробити наступні висновки - при наявності інформації про поведінку Споживача, Виробник і Дилер є конкурентами в процесі реалізації товарів.

Дослідження системи (11) показали, що най-

більш істотними для аналізу типів залежностей є відносні характеристики r_3/d_3 , b_{13}/b_{12} .

1) При $r_3/d_3 \geq 5$ й $b_{13}/b_{12} \geq 3$ для діапазонів дослідження ($0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1$; $0 \leq G_3^0 < 1$) спостерігається активне поведіння Виробника на ринку (рис. 7 б). 2).

$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = r_1 + (b_{10} - d_{10} + b_{12}G_2 + b_{13}G_3 - d_{11}G_1)G_1 \\ \frac{dG_2}{dt} = r_2 - (b_{10} + b_{12}G_2 + b_{13}G_3)G_1 + (d_{30} + \\ + d_{31}G_1 + d_{32}G_3)G_3; \\ \frac{dG_3}{dt} = r_3 - (d_{30} + d_{31}G_1 + d_{32}G_2)G_3; \\ G_1|_{t=0} = 0, G_2|_{t=0} = 0, G_3|_{t=0} = G_3^0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} G_1^* = \frac{-d_{10} \pm \sqrt{d_{10}^2 + 4d_{11}(r_1 + r_2 + r_3)}}{2d_{11}} \\ G_2^* = \frac{1}{b_{12}} \left(\frac{-r_1}{G_1} - b_{10} + d_{10} - b_{13}G_3 + d_{11}G_1 \right) \\ G_3^* = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4r_3d_{32}b_{13}/b_{12}}}{2d_{32}b_{13}/b_{12}} \\ k = d_{30} + \frac{G_1(b_{12}d_{31} + d_{11}d_{32})}{b_{12}} + \frac{d_{32}}{b_{12}} \left(\frac{-r_1}{G_1} - b_{10} + d_{10} \right) \end{cases}$$

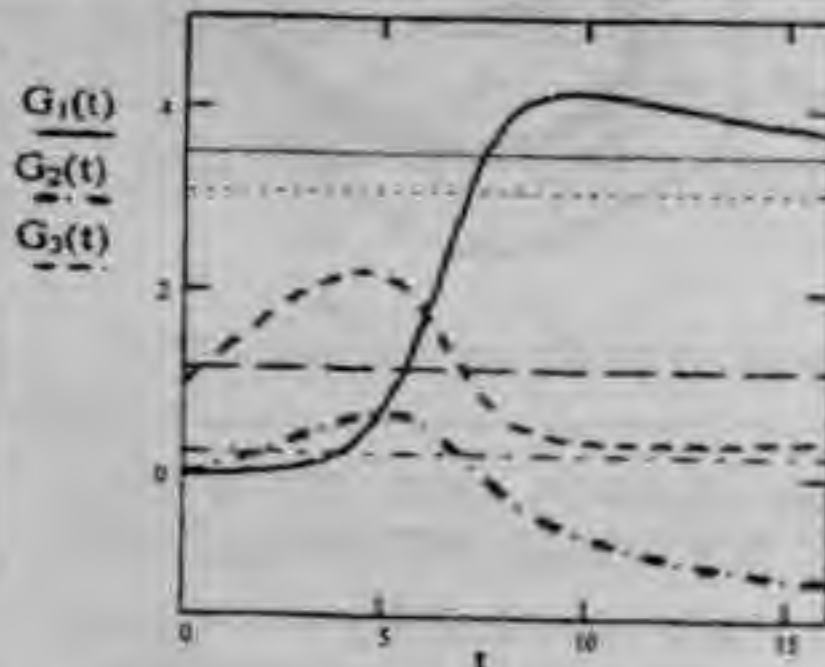
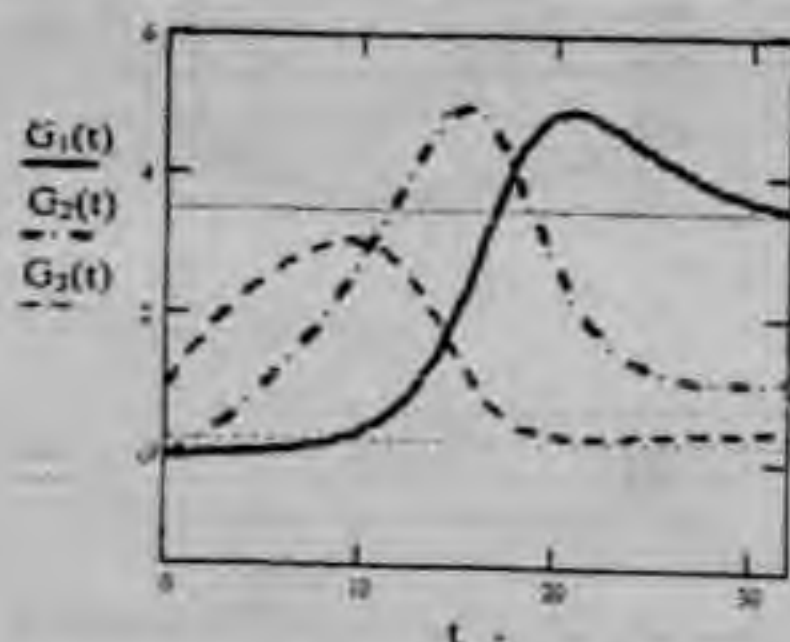
При $0 < r_3/d_3 < 5$ й $0 < b_{13}/b_{12} < 3$ для діапазонів дослідження ($0.001 \leq b_i, d_i, r_i \leq 1; 0 \leq G_3^0 < 1$) Дилер є основним продавцем продукції, а Виробник утримується від прямих продажів. Даний висновок збігається з висновками по системі (7).

Дослідження умов існування стійких розв'язків дозволило визначити особливі оч-ки системи (11):

З врахуванням коефіцієнтів табл.6 отримаємо наступні масиви значень особливих точок (табл.7). Результати, що потрапляють в діапазон дослідження відображено на рис. 7 (а,б). Дослідження підтвердило стійкість розв'язків системи (11) в околі особливих точок.

Таблиця 6

	b_{10}	b_{12}	b_{13}	d_{10}	d_{11}	d_{30}	d_{31}	d_{32}	r_1	r_2	r_3	G_3^0
а)	0,05	0,06	0,04	0,01	0,04	0,1	0,3	0,01	0,01	0,01	0,5	1
б)	0,05	0,06	0,04	0,01	0,04	0,1	0,3	0,01	0,01	0,01	0,5	1



а) класичний цикл (реалізація через Дилерів)

б) класичний цикл (реалізація Виробником)

Рис.7

Таблиця 7

	а)				б)			
G_1	3.483	3.483	-3.733	-3.733	3.483	3.483	-3.733	-3.733
G_2	1.751	59.512	-55.549	-3.269	3.081	1.161	-55.549	0.245
G_3	-0.216	-86.857	78.657	0.238	-0.221	-8.486	-54.071	-4.697

Дослідження стратифікованих трирівневих систем інноваційного ринку за допомогою динамічних нелінійних моделей дозволяє визначити стратегії суб'єктів інноваційного ринку в умовах невизначеності, визначають тип життєвого циклу товару, максимальні обсяги реалізації, а також тривалість життєвого циклу інновації.

Література

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. - М.: Наука, 1976. - 285 с.
2. Свирижев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. - М.: Наука, 1978. - 352 с.

3. Акименко В.В., Наконечный А.Г., Сугоняк И.И. Моделирование процессов оптимального управления в условиях неопределенности в экономических системах с иерархией - //Проблемы управления и информатики.-2007.-№1.-с.134-147.
4. Гаркавенко С.С. Маркетинг. Підручник. - Київ: Лібра, 2002 - 712 с.
5. Акименко В.В., Сугоняк И.И. Аналіз та математичне моделювання оцінки ефективності інноваційної діяльності підприємства// Системні дослідження та інформаційні технології.-2007.-№3.-с.45-56.

Надійшло до редколегії 25.06.11

Ірина М. Александрович, Олена Г. Кочулова¹,
Володимир І. Ляшко, Микола В.-С. Сидоров

Irina M. Alexandrovich, Olena G. Kochulova^{*},
Volodimir I. Lyshko, Mikola V.-S. Sidorov

Задача Діріхле для узагальненого осесиметричного рівняння Гельмгольца у півсмугі.

Dirichlet problem for generalized axisymmetric Helmholtz equation in half-strip

Досліджено крайові задачі для рівняння Гельмгольца у нескінченній області, на границі якої існують точки, де оператор вироджується. Встановлено обмеження на деякі параметри крайових умов, при яких розв'язок існує та єдиний.

Boundary problems for Helmholtz equation in infinite region with points on the boundary are investigated. The restrictions on some parameters of boundary conditions guaranteeing the existence and uniqueness of the solution are identified.

Ключові слова: єдиність розв'язку, існування розв'язку, вагові крайові умови.

Key Words: uniqueness of solution, existence of solution, weighted boundary conditions.

¹E-mail: kl@univ.kiev.ua

Вагова крайова задача для виродженого рівняння еліптичного типу розглядається у півсмугі $D = \{0 < x < 1, 0 < y < \infty\}$ з наближенням до осі $y = 0$ в точках $P_1(0,0)$ і $P_2(1,0)$ ($P_1, P_2 \in 0x$ – відрізок виродження).

Вивчається питання єдиності розв'язку розглянутої задачі.

Задача Діріхле. Знайти в області D регулярний розв'язок рівняння

$$Lu = u_{xx} + u_{yy} + \frac{k}{y}u_y - c^2u = 0, \quad k \in R \quad (1)$$

неперервний в області $\bar{D} \setminus \{y=0\}$, який обертається в нуль на нескінченності і задовольняє наступним крайовим умовам

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y < \infty \quad (2)$$

$$u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y < \infty \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau_i(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k < 1 \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} (\ln y)^{-1} u(x, y) = \tau_2(x), \quad (5)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad k = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{k-1} u(x, y) = \tau_3(x), \quad (6)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad k > 1,$$

де

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C_{(0,+\infty)};$$

$$y^{\frac{k}{2}} \varphi_1(y), y^{\frac{k}{2}} \varphi_2(y) \in L(0, +\infty),$$

$\tau_i(x)$ – неперервні, а $\tau_i'(x)$ – абсолютно інтегровані на $[0,1]$ функції, причому $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \tau_i(0) = \tau_i(1) = 0, \quad i = \overline{1,3}.$

Тут $\bar{D} = D \cup P_1P_2$, P_1P_2 – відрізок осі $0x$.

Розв'язок рівняння (1) у півсмугі $0 < x < 1, y > 0$, що задовольняє умовам (2)–(4); (3), (5); (2), (3), (6) будемо шукати у вигляді суми

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (7)$$

де $u_1(x, y), u_2(x, y)$ – розв'язки рівняння (1), що задовольняють, відповідно, крайовим умовам

$$u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(1, y) = \varphi_2(y), \quad (8)$$

$$a_{11}) \quad u_1(x, 0) = 0, \quad k < 1$$

$$b_{11}) \quad \lim_{y \rightarrow +0} (\ln y)^{-1} u_1(x, y) = 0, \quad k = 1$$

$$c_{11}) \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{k-1} u_1(x, y) = 0, \quad k > 1$$

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_1(1, y) = 0 \quad (8')$$

$$a_{21}) \quad u_2(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k < 1$$

$$b_{21}) \quad \lim_{y \rightarrow +0} (\ln y)^{-1} u_2(x, y) = \tau_2(x),$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad k = 1$$

$$c_{21}) \quad \lim_{y \rightarrow +0} y^{k-1} u_2(x, y) = \tau_3(x),$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad k > 1.$$

Функцію $u_2(x, y)$ будемо шукати у вигляді

$$u_1(x, y) = y^{\frac{1-k}{2}} \int_0^{\infty} J_{\frac{1-k}{2}}(y\lambda) \left(\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} \right) d\lambda, \quad k < 1 \quad (9)$$

$$u_1(x, y) = \int_0^{\infty} J_0(y\lambda) \left(\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} \right) d\lambda, \quad k = 1 \quad (10)$$

$$u_1(x, y) = y^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} J_{\frac{k-1}{2}}(y\lambda) \left(\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} \right) d\lambda, \quad k > 1 \quad (11)$$

$\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)$ – довільні функції.

Функції (9), (10), (11) задовольняють рівнянню (1) і умовам (8, a_1, b_1, c_1).

Нехай $k < 1$. Задовольняючи перші умови (8), матимемо

$$\varphi_1(y) = y^{\frac{1-k}{2}} \int_0^{\infty} J_{\frac{1-k}{2}}(y\lambda) (\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)) d\lambda,$$

$$\varphi_2(y) = y^{\frac{1-k}{2}} \int_0^{\infty} J_{\frac{1-k}{2}}(y\lambda) \left(\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} \right) d\lambda.$$

Користуючись формулою обернення перетворення Хенкеля

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) J(xy) x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dx,$$

одержимо

$$\frac{\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)}{\lambda} = \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(t\lambda) \varphi_1(t) dt,$$

$$\frac{\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x}}{\lambda} =$$

$$= \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(t\lambda) \varphi_2(t) dt$$

Позначимо $\frac{\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)}{\lambda} = \Phi_1,$

$$\frac{\alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x}}{\lambda} = \Phi_2.$$

Після простих перетворень, одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} &= \\ &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2}}{2sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \left[\Phi_2(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}(1-x)} \Phi_1(\lambda) \right] + \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2}}{2sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \left(e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}(1-x)} \Phi_1(\lambda) + e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} \Phi_2(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Підставляючи Φ_1 і $\Phi_2(\lambda)$, матимемо

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} &= \\ &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} sh\left(\sqrt{\lambda^2 + c^2}(1-x)\right)}{sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(t\lambda) \varphi_1(t) dt + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} sh\left(\sqrt{\lambda^2 + c^2}x\right)}{sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(t\lambda) \varphi_2(t) dt, \quad k < 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогічно одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} &= \\ &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} sh\left(\sqrt{\lambda^2 + c^2}(1-x)\right)}{sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} t J_0(t\lambda) \varphi_1(t) dt + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} sh\left(\sqrt{\lambda^2 + c^2}x\right)}{sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} t J_0(t\lambda) \varphi_2(t) dt, \quad k = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda) e^{\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} + \alpha_2(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + c^2}x} &= \\ &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} sh\left(\sqrt{\lambda^2 + c^2}(1-x)\right)}{sh\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times \end{aligned} \quad (14)$$

$$\times \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(t\lambda) \varphi_1(t) dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{\lambda^2 + c^2} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda^2 + c^2} x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda^2 + c^2}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} t^{\frac{k+1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(t\lambda) \varphi_2(t) dt, \quad k > 1$$

Формули (9) і (12), (10) і (13), (11) і (14) визначають розв'язок $u_1(x, y)$, коли, відповідно $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$.

Використовуючи метод розділення змінних, розв'язок $u_2(x, y)$ шукатимемо у вигляді [1]

$$u_2(x, y) =$$

$$= y^{\frac{1-k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + n^2 \pi^2} y), \quad (15)$$

де $K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + n^2 \pi^2} y)$ – функція Макдональда і

$$a_n = 4 \left(\frac{\sqrt{c^2 + n^2 \pi^2}}{2} \right)^{\frac{1-k}{2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)} \int_0^1 \tau_1(x) \sin \pi n x dx, \quad k < 1$$

$$a_n = -2 \int_0^1 \tau_2(x) \sin \pi n x dx, \quad k = 1$$

$$a_n = 4 \left(\frac{\sqrt{c^2 + n^2 \pi^2}}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^1 \tau_3(x) \sin \pi n x dx, \quad k > 1$$

Отже,

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)} y^{\frac{1-k}{2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \tau_1(t) \sum_{n=1}^{\infty} (c^2 + \pi^2 n^2)^{\frac{1-k}{4}} \times \quad (16)$$

$$\times K_{\frac{1-k}{2}} \sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y \times$$

$$\times (\cos \pi n(x-t) - \cos \pi n(x+t)) dt, \quad k < 1$$

$$u_2(x, y) = \int_0^1 \tau_2(t) \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y) \times \quad (17)$$

$$(\cos \pi n(x+t) - \cos \pi n(x-t)) dt, \quad k = 1$$

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} y^{\frac{1-k}{2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \tau_3(t) \sum_{n=1}^{\infty} (c^2 + \pi^2 n^2)^{\frac{k-1}{4}} \times \quad (18)$$

$$\times K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y) \times$$

$$\times (\cos \pi n(x-t) - \cos \pi n(x+t)) dt, \quad k > 1$$

За ознакою рівномірної збіжності Абеля ряд в (15) рівномірно збіжний у півсмузі $0 < x < 1$, $y > 0$, бо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y) =$$

$$= K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2} y) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x \frac{K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y)}{K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2} y)},$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x$ збіжний абсолютно і

рівномірно в силу того, що $\tau_i(x)$ ($i = \overline{1, 3}$) неперервні, а $\tau'_i(x)$ – абсолютно інтегровані на відрізку $[0, 1]$. Крім того

$$\left| \frac{K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y)}{K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2} y)} \right| \leq 1.$$

Функція $u_2(x, y)$ задовольняє крайовій умові

$$u_2(0, y) = u_2(1, y) = 0.$$

Виконання умов (4)-(6) випливає з того, що

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\frac{1-k}{2}} K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2} y) =$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2}}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}}, \quad k < 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{K_0(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2 y})}{\ln y} &= \\ &= -\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\ln \sqrt{c^2 + \pi^2 n^2 y}}{\ln y} = -1, k=1 \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^{k-1} \left(y^{\frac{1-k}{2}} K_{\frac{1-k}{2}}(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2 y}) \right) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} y^{\frac{k-1}{2}} K_{\frac{k-1}{2}} \sqrt{c^2 + \pi^2 n^2 y} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \left(\frac{(\sqrt{c^2 + \pi^2 n^2})^2}{2} \right)^{\frac{1-k}{2}}, k > 1 \end{aligned}$$

а також з того, що

$$\tau_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Доведемо єдність розв'язку поставленої задачі.

Єдність розв'язку задачі Діріхле у випадку $k < 1$ зразу випливає з принципу максимуму для еліптичних рівнянь.

Доведемо єдність розв'язку задачі Діріхле коли $k = 1$ або $k > 1$.

Введемо нову функцію $V(x, y)$ [2], вважаючи, що

$$u(x, y) = W(x, y)V(x, y).$$

Тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{L}V &= V_{xx} + V_{yy} + \\ &+ \left(\frac{k}{y} + \frac{2W_y}{W} \right) V_y + \frac{L(W)}{W} V = 0 \end{aligned}$$

Виберемо $W(x, y)$ так, щоб $W(x, y) > 0$, $L(W) < 0$ в $\bar{D}$ і $W(x, y)$ рівномірно прямувало б до ∞ при $y \rightarrow +0$.

Нехай $k > 1$, $W(x, y)y^{1-k} = (x - \delta)^2 + C_0$, $0 < \delta < 1$, $C_0 = \text{const}$, $C_0 > 0$ і нехай

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{k-1} u(x, y) = 0.$$

Це означає, що $u(x, y) = O(y^{1-k})$, $y \rightarrow +0$.

Отже, $V(x, y) = O(1)$, $y \rightarrow +0$ або $V(x, y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow +0$.

З того, що $u(x, y) \rightarrow 0$, при $y \rightarrow \infty$, а $\lim_{y \rightarrow 0} W(x, y) = -(x - \delta)^2 + C_0$ маємо, що $V(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$.

Крім того, $V(0, y) = V(1, y)$ і $\frac{L(W)}{W} < 0$ в D .

Тому, з принципу екстремуму для еліптичних рівнянь робимо висновок, що $V(x, y) \equiv 0$ в D . Отже, $u(x, y) \equiv 0$ в D .

Коли $k \equiv 1$, за $W(x, y)$ візьмемо

$$\begin{aligned} W(x, y) &= -\ln y - (x - \delta)^2 + C_1, \quad 0 < \delta < 1, \\ C_1 &= \text{const}, \quad C_1 > 0 \end{aligned}$$

Доведення єдності розв'язку задачі Діріхле в цьому випадку аналогічне попередньому.

Висновки

Як підсумок роботи можемо сформулювати теорему.

Теорема. Задачі Діріхле (1)-(4); (1)-(3),(5); (1)-(3),(6) такі, що розв'язуються у півсмузі D ; їх розв'язок єдиний і має відповідно вигляд (7), (9), (12), (16); (7), (10), (13), (17); (7), (11), (14), (18).

Список використаних джерел

1. Толстов Г.П. Ряды Фурье. -М.: Наука, 1980.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. -М.: Наука, 1966.

Надійшла до редакції 21.03.07

УДК 004.4

Горностаї М.П.*, аспірантка

Деякі питання серверної підтримки інформаційних систем, здатних до навчання

У статті розглядаються математичні закономірності, що описують потоки даних між веб-сервером та Всесвітньою мережею, їх вплив на побудову серверної архітектури інформаційної системи. Аналізується архітектура інформаційної системи, що здатна навчатися, на рівні бізнес-логіки і на серверному рівні та аспекти її побудови. Розглядаються алгоритми, які повинен виконувати сервер інформаційної системи, здатної до навчання.

Ключові слова: сервер, розподілений сервер, розподіл тривалості передачі файлів, персоналізація, алгоритми персоналізації, серверна архітектура.

*E-mail: gornostay.m@gmail.com

1. Інформаційні системи, здатні до навчання, як невід'ємний елемент сучасного Інтернету

Під інформаційною системою, здатною до навчання, розуміється інтегрована система, що може забезпечувати користувача певною тематичною інформацією залежно від його поведінки (переваг) та випереджаючи його явний запит. Така риса інформаційної системи, як здатність надавати потенційно цікаву інформацію користувачу без явного запиту, називається персоналізацією.

Персоналізація всесвітньої мережі перетворилась із корисної риси у необхідність. Вона впливає на вигляд сторінок через визначення користувачем його переваг. Процес персоналізації може відбуватись у реальному часі шляхом виконання алгоритмів, запрограмованих у системі, або ж шляхом проведення аналізу експертом на основі зібраної інформації та реалізації його рекомендацій.

2. Веб-сервер як стохастична система масового обслуговування

При проектуванні інформаційної системи, що підтримує алгоритми персоналізації, потрібно розв'язати декілька задач, пов'язаних із серверною підтримкою інформаційної системи,

Gornostay M.P.*, post graduate student

Some issues of server support of information systems able to learn

The article says about mathematic patterns which describe data flows between Web-server and World Wide Web, their influence on building server architecture of information system. Article describes architecture of information system able to learn, at business logic level and server level and details of its building. Also algorithms are described which to be done by server of information system able to learn.

Key words: server, distributed server, files transmission duration distribution, personification, personification algorithms, server architecture.

серед яких – аналіз мережевого трафіка та очікуваної завантаженості сервера; вибір архітектури інформаційної системи; вибір дисципліни обслуговування запитів і сервера; розподіл інформації, що зберігається, та інші. У даній статті зупинимось лише на наведених вище задачах.

Протягом останнього десятиліття з'явилися праці, спрямовані на моделювання роботи всесвітньої мережі та виявлення математичних закономірностей щодо її функціонування. Метою даного розділу є виявлення факторів, що впливають на функціонування та час роботи системи.

Розглянемо веб-сервер як стохастичну систему масового обслуговування з точки зору потоків даних між ним та всесвітньою мережею, а також всередині системи, для якої веб-сервер спроектовано.

Описування веб-сервера як стохастичної системи масового обслуговування вимагає знання розподілу службового часу. Є два головні види послуги веб-сервера: статичне обслуговування (передача файлів) та динамічне обслуговування, що включає додаткову роботу по відповіді на клієнтські запити. В даному розділі розглянемо обслуговування передачі файлів клієнту, де розподіл службового часу

характеризується розподілом тривалості передачі файлів [1].

Кровелла (Crovella) і інші [2] представили свідомство, в якому розподіл тривалості передачі файлів у всесвітній мережі має важкий хвіст. Відомо, що розподіли з важкими хвостами характерні для втрат від природних катастроф (ураганів, землетрусів, максимального використання води у річках) і для втрат від техногенних катастроф (типу Чорнобильської аварії, розливів нафти у морях внаслідок аварій танкерів, аварій хімічних підприємств, пожеж, руйнувань нафтопроводів, аварій глобальних комп'ютерних мереж і т. д.). У випадку цих катастроф зустрічаються екстремальні значення втрат, що незрівнянно великі порівняно із значеннями більшості подій. Втрати при цих екстремальних подіях можна порівнювати із сумарними втратами від всіх катастроф за той же проміжок часу. Для розподілів з важким хвостом неможливо знехтувати хвостом при аналізі, а вибіркові середні є нестійкими та малоінформативними [3].

Розподіли з важким хвостом характеризуються надзвичайно високою мінливістю і спричиняють сильні негативні ефекти при реалізації. Приклад розподілу з важким хвостом – розподіл Парето з параметром форми k і параметром розташування x_m , який має наступну кумулятивну функцію розподілу

$$[4, 5]: F(x) = P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{x}{x_m} \right)^{-k}, \quad \forall x \geq x_m, \text{ де}$$

$$x_m, k > 0.$$

Детальніший аналіз даних показує, що розподіл тривалості передачі певного файлу від певного сервера до певного клієнта у всесвітній мережі є розподілом Парето з важким хвостом [1]. Цей емпіричний результат означає, що кожен запит файлу в мережі має значну вірогідність мати дуже довгий час завершення, що справедливе навіть для дуже маленьких файлів. Крім того, це означає, що кожен веб-сервер, зокрема такий, який обслуговує єдину статичну сторінку, страждає від пульсуючого часу обслуговування.

Розглянемо три головні чинники, що можуть бути причиною важкого хвоста розподілу тривалості передачі файлів: розміри файлів, умови маршрутів і завантаженість серверу.

2.1. Вплив розмірів файлів на розподіл тривалості передачі файлів

Для визначення впливу розмірів файлів, потрібно порівняти розподіл тривалості передачі різних файлів, що передаються від одного сервера до одного клієнта. Обираються файли розміром від 1 KB до 150 KB, які покривають більшість текстових файлів та веб-сторінок. Запит файлу генерується кожні дві секунди і збирається статистика тривалості передачі. Низька частота запитів задана з метою уникнення впливу на результат через обраний маршрут і завантаженість сервера. Для збільшення надійності моделювання виконувалось декілька разів для декількох клієнтів у світі. У результаті виявлено, що розподіл тривалості передачі всіх файлів це розподіл Парето. Параметри форми – подібні, параметри розташування зростають з розміром файлу.

Окрім того, розглядаючи файли, які передавалися від одного сервера до одного клієнта, помічено, що маленький ефект, який спричиняють розміри файлів на розподіл тривалості передачі файлів, зникає. Майже всі розподіли тривалості передачі файлів мають подібний параметр форми і подібний параметр розташування [1].

Робота Кохена (Cohen) і Каплана (Kaplan) [6] пояснює цей емпіричний результат. Ця робота показує, що час запитів DNS (Domain Name System – система доменних імен [5]), час установлення зв'язків TCP (Transmission Control Protocol – протокол управління передачею [5]) і час затримки початку сесій на стороні серверів HTTP (Hypertext Transfer Protocol – протокол передачі гіпертексту [5]) – головні причини довгих очікувань, більших за фактичний час передачі файлу. Потрібно також відзначити, що незалежно від розмірів запитаного файлу час, який витрачається на запити, зроблені одним клієнтом до одного сервера, однаково розподілений.

2.2. Вплив маршрутів на розподіл тривалості передачі файлів

Щоб зрозуміти вплив маршруту на розподіл тривалості передачі файлів, потрібно порівняти розподіл тривалості передачі одного файлу, що передається від одного сервера до різних клієнтів. У моделюванні [1] клієнти були розташовані на Сході і Заході США, Португалії, Бразилії, Австралії і Тайвані, і сервер був розташований в Ізраїлі. Очевидно, що маршрути мають різні якісні параметри. У результаті моделювання було виявлено, що розподіл

тривалості передачі всіх файлів – це розподіл Парето з подібними параметрами форм і відмінними параметрами розташувань.

2.3. Вплив завантаженості сервера на розподіл тривалості передачі файлів

Щоб вивчити вплив завантаженості сервера на розподіл тривалості передачі файлів, потрібно порівняти розподіл тривалості передачі файлу, що передається від одного сервера, який працює з різними навантаженнями, до одного клієнта. У моделюванні [1] розглянуто п'ять різних рівнів завантаження: від повної відсутності до високого завантаження. У результаті моделювання виявлено, що розподіл тривалості передачі всіх файлів – це розподіл Парето з відмінними параметрами форм і відмінними параметрами розташування.

Виходячи з того, що параметр розташування не є визначальним у поведінці розподілу Парето, робимо висновок, що розподіл розмірів файлів в межах вище згаданого діапазону і якості маршруту не мають головного впливу на поведінку розподілу тривалості передачі файлів з важким хвостом. Дійсно, ніяка кореляція не була знайдена між розмірами файлів і розподілом тривалості передачі файлів [2]. Загальною помилкою є припущення, що розподіл розмірів файлу з важким хвостом викликає розподіл тривалості передачі файлів з важким хвостом.

Отже, за умов розподілу передачі файлів у мережі з важким хвостом (коли існує імовірність аномально високого часу передачі файлу при відсутності аномальних умов передачі, таких як великий розмір файлу чи довгий маршрут), основна задача, що постає при проектуванні серверної архітектури інформаційної системи – це ефективне виконання алгоритмічних обчислень сервером та ефективне розташування даних, необхідних для проведення обчислень.

3. Персоналізація як характерна риса інформаційної системи, здатної до навчання

Як вже було згадано вище, характерною рисою системи, здатної до навчання, є її здатність забезпечувати персоналізацію для користувача. Для успішного виконання персоналізації потрібні три складові:

- збір великого об'єму даних;
- потужний сервер для обробки даних;
- алгоритми обробки даних та надання рекомендацій.

Великий об'єм даних потрібен для визначення максимально імовірнісних рекомендацій, оскільки мала вибірка може

призвести до хибного опису ситуації та невірної рекомендації. Вибір даних цілком залежить від обраного алгоритму персоналізації.

У наступному розділі розглянемо оглядово алгоритми персоналізації та види систем персоналізації.

4. Алгоритми та методи, що використовуються в інформаційних системах, здатних навчатися.

Припустимо, ми маємо m користувачів, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ та набір n елементів, які представляють інтерес для користувачів, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Елементами можуть бути, залежно від типу інформаційної системи, наприклад, веб-сторінки, категорії і підкатегорії новин чи найменування товарів. Введемо поняття профілю користувача: профіль користувача $u \in U$ є вектором довжини n , що складається з упорядкованих пар:

$u^{(n)} = \langle (i_1, s_u(i_1)), (i_2, s_u(i_2)), \dots, (i_n, s_u(i_n)) \rangle$, де $i_j \in I$ та s_u – функція, яка приписує елементам

ваги, що відповідають ступеню інтересу для користувача u . Ваги можуть визначатись кількома способами (як бінарні, що вказують на наявність чи відсутність елемента в профілі користувача, або як функція від тривалості перегляду користувачем елемента [7]). До ваг може застосовуватись алгоритм нормалізації (в рамках одного профілю нові ваги отримаємо за

формулою $s'_u(i_j) = \frac{s_u(i_j) - m_u}{\max_{1 \leq l \leq n} \{s_u(i_l)\} - m_u}$, $j = \overline{1, n}$, де

$$m_u = \min_{1 \leq l \leq n} \{s_u(i_l)\} \quad \text{чи}$$

$$s'_u(i_j) = \frac{s_u(i_j) - m(i_j)}{\max_{v \in U} \{s_v(i_j)\} - m(i_j)} \quad j = \overline{1, n} \quad \text{для усіх}$$

профілів в системі, де $m(i_j) = \min_{v \in U} \{s_v(i_j)\}$.

Профілі зберігаються протягом роботи системи для всіх користувачів, що взаємодіють із системою. База даних всіх профілів може бути представлена як матриця розмірністю $m \times n$: $\Lambda = [s_{u_i}(i_j)]_{m \times n}$, де $s_{u_i}(i_j)$ є ступінь інтересу користувача u_i до елемента i_j . Отже, система персоналізації СП може розглядатися як функція, визначена на добутку: $СП_\Lambda: U \times I \rightarrow R \cup \{\text{null}\}$, де R є нова множина ваг елементів, за якими можна визначити множину рекомендованих елементів. Залежно від вибору алгоритму функція СП може давати невизначений результат

(null). Загалом функцію СП можна розглядати як функцію прогнозування цікавості цільового користувача $u_k \in U$ відносно цільового елемента i_j : $СП_A(u_k, i_j) = s'_{u_k}(i_j)$.

Останнім кроком задачі надання рекомендації є вибір певної кількості елементів i_j з найбільшим значенням $s'_{u_k}(i_j)$. Ці елементи і будуть результативною рекомендацією.

Системи персоналізації можна розділити на три типи залежно від архітектури і використовуваних алгоритмів: системи, засновані на сукупності правил; системи, що базуються на фільтруванні змісту, та системи, що базуються на аналізі поведінки користувачів [7]. Кожен з типів має свою сферу застосування та свої обмеження.

Системи, засновані на сукупності правил, залежать від правил прийняття рішень, які формуються вручну або автоматично. Багато існуючих Веб-сайтів електронної комерції, які запровадили рекомендаційні технології, використовують системи даного типу з правилами, введеними вручну адміністраторами системи, і такими, що базуються на демографічній інформації або інших особистих характеристиках споживачів (сфера діяльності, посада, набір інтересів). Алгоритм формування вмісту сторінок виконується для користувачів, чий профіль задовольняє одне або більше правил. Параметри профілю користувача отримуються через явну взаємодію з користувачем (користувачу пропонується заповнити анкету чи відповісти на ряд запитань).

Для забезпечення персоналізації в таких системах, зазвичай, немає потреби збирати великі об'єми даних, а потрібно запрограмувати певні правила.

Найпростіші приклади персоналізації в таких системах – це вітання користувача по імені, чи автоматичний вибір мови інтерфейсу на основі країни, що зазначив користувач, чи мови у браузері. Такий вид персоніфікації застосовується практично усюди, де реалізована можливість реєструватися користувачам та де пропонується мова інтерфейсу на вибір. Такі системи дозволяють збільшити ефективність веб-сайту, проте така персоналізація є примітивною.

У системах, що базуються на фільтруванні змісту, елементами в профілі користувача є описи змісту сторінок, продуктів, категорій новин тощо, до яких користувач виказав інтерес. Дані описи змісту представляють собою набір властивостей, які характеризують сторінку,

продукт, категорію тощо (наприклад, ціна, виробник, належність продукту чи сторінки до певної області, фізичне розташування компаній, сервіс яких обирається, тощо). Задача надання рекомендацій в таких системах базується на порівнянні елементів, що не були відвідані користувачем, із описами елементів з профілю користувача. Елементи, які вважаються достатньо подібними до елементів профілю користувача, рекомендуються користувачу.

Для реалізації алгоритму персоналізації в таких системах потрібно визначити метод для розподілу елементів на тематичні групи. Розподіл на групи може бути визначений явно через ієрархічну структуру сайту (елементи, що мають спільного батька, вважаються елементами з однієї групи).

Окремий випадок таких систем – системи, що базуються на послідовності переходів та часі, витраченому на сторінці. Таким чином обираються найпопулярніші сторінки та найпопулярніші переходи між сторінками, проте не розпізнається індивідуальна поведінка.

Системи, що базуються на аналізі поведінки користувачів, порівнюють ваги для елементів активного користувача з вагами для тих же елементів інших користувачів (найближчих сусідів) для того, щоб розробити рекомендації для елементів, ще не відвіданих активним користувачем. Традиційно для виконання цього завдання використовується підхід класифікації, що має назву k-Найближчий-Сусід (k-Nearest-Neighbor, чи kNN), при якому порівнюється профіль користувача з історичними профілями інших користувачів для знаходження k користувачів, які мають подібні смаки або інтереси (ці користувачі в рамках даного підходу називаються найближчими сусідами).

Дані системи дають виграти у швидкості та ефективності отримання рекомендацій, проте виникають складності у створенні рекомендацій для незвичайних користувачів, чия поведінка та смаки значно відрізняються від середньостатистичних.

Проте дані системи мають обмеження в застосуванні через наявність наступних рис:

- мала масштабованість: оскільки обчислення повинні відбуватись у режимі реального часу, збільшення кількості користувачів та елементів може призвести до запізнення надання рекомендацій;

- зменшення покриття елементів протягом роботи користувача в результаті збільшення кількості елементів у базі даних, що таким чином

приведе до менш надійних кореляційних зв'язків.

Щоб обійти ці обмеження, запропоновані методи оптимізації обробки даних (індексування схожих об'єктів, зменшення розмірності, розбиття запитів користувачів на кластери в режимі попередньої обробки даних та накладення обмежень на операції, що можуть виконуватись в реальному часі).

Для збільшення ефективності роботи системи (зменшення часу обробки даних) та для підвищення точності прогнозування доцільно проводити кластеризацію даних. Кластеризувати можна як елементи, так і користувачів, причому обидва методи виявляються ефективними, що підтверджується перевіркою експериментальним шляхом. Нижче наведемо опис типів методів кластеризації та опишемо один з підходів – застосування методу кластеризації для елементів.

Кластерні методи можна розділити на три категорії [8]:

- розділюючи методи (створюють розбиття множини даних на кластери);
- ієрархічні методи (дозволяють створити ієрархії кластерів);
- методи, засновані на побудові моделей (базуються на використанні імовірнісної моделі розподілу даних).

Для надання користувачу рекомендації системи, що базуються на аналізі поведінки користувачів, повинні реалізовувати алгоритми для знаходження:

- метрики для вимірювання ступеня схожості користувачів, чи близькості сусідства;
- метод для вибору множини сусідів для прогнозування;
- метод для прогнозування рейтингу елементів, ще не відвіданих користувачем.

При виборі метрики для вимірювання ступеня схожості користувачів найчастіше використовується метрика, що підраховується як нормалізований добуток двох векторів:

$$\text{sim}(u_a^{(n)}, u_b^{(n)}) = \frac{u_a^{(n)} \cdot u_b^{(n)}}{\|u_a^{(n)}\|^2 \cdot \|u_b^{(n)}\|^2}, \quad \text{де вектор}$$

$u_x^{(n)} = \langle s_x(i_1), s_x(i_2), \dots, s_x(i_n) \rangle$. Для вибору множини сусідів для прогнозування використовується метод вибору k користувачів з найбільшим значенням ступеня схожості. Для прогнозування ваг елементів, не відвіданих користувачем, використовується метод зваженої суми рангів [9].

5. Проектування серверної архітектури інформаційної системи, здатної до навчання.

Серверна архітектура інформаційної системи, здатної до навчання, повинна включати рівень інтерфейсу, рівень аналізу та рівень баз даних. Рівень інтерфейсу підтримує зв'язок із користувачем (створюючи для нього інтерфейс та отримуючи для цього інформацію з бази даних). Рівень аналізу виконує алгоритми персоналізації та включає аналітичний сервер, що призначає виклики алгоритмів персоналізації для аналізу даних, отриманих від користувача, та даних із бази даних. Також цей рівень включає навчальний інструмент, що виконує навчальний крок алгоритму персоналізації. Рівень баз даних складається із таблиць даних, зібраних системою для виконання алгоритмів персоналізації, та таблиць, що містять результат обробки даних та результат виконання алгоритмів персоналізації [10].

На рис. 1. представлена описана вище серверна архітектура.

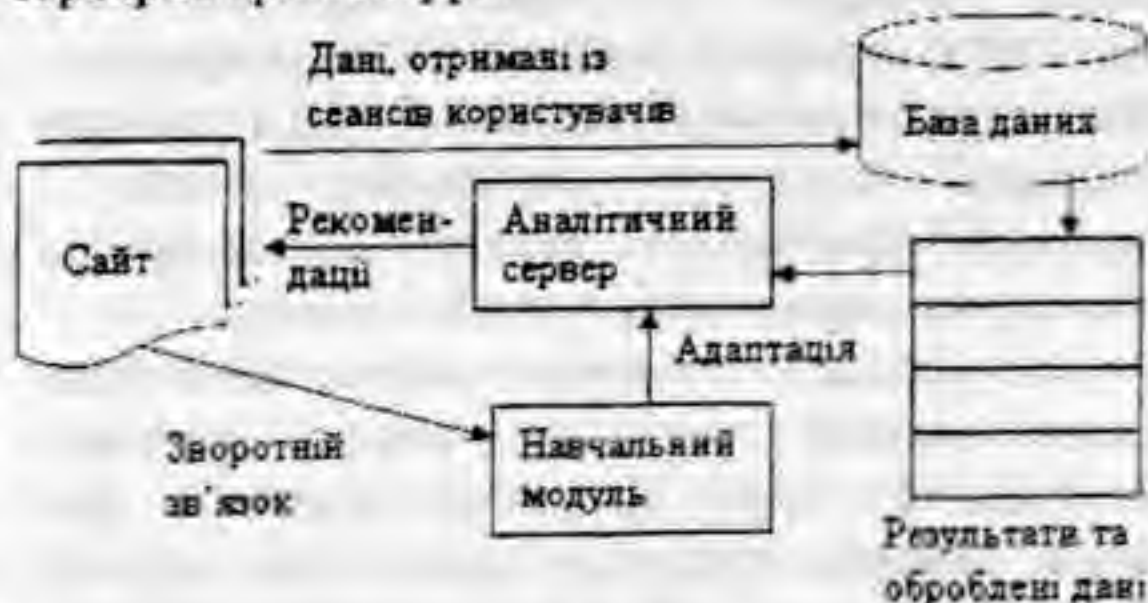


Рис. 1. Серверна архітектура інформаційної системи, здатної до навчання

Потрібно також зазначити, що процес персоналізації можна розбити на два етапи – попередню підготовку даних (виконується не у реальному часі) та надання рекомендації у реальному часі, що базується на використанні підготовлених даних. Як відзначалось у четвертому розділі, попередня підготовка даних дозволяє підвищити ефективність роботи системи у часі.

Пропонується наступний метод побудови серверної архітектури інформаційної системи, здатної до навчання. На першому кроці обирається метод персоналізації, що буде застосовуватись. Залежно від методу та специфіки елементів визначається множина даних, потрібних для обробки, формується структура таблиць бази даних та проектується методи збору інформації.

Наступним кроком є вибір апаратної моделі серверу та програмного забезпечення для реалізації алгоритму персоналізації. Реалізуються програмні модулі для попередньої обробки даних та для формування рекомендації у режимі реального часу.

Останнім кроком є створення методів, що забезпечують виконання рекомендацій та враховують реакцію користувача на надані рекомендації.

6. Сервер інформаційної системи як деяка цілісна сукупність даних у Всесвітній мережі

Як один з поширених випадків реалізації серверної архітектури розглянемо особливості функціонування та архітектури розподіленого сервера інформаційної системи.

Створення розподілених систем підвищує їх швидкість роботи та потенціал. Платформи Unix та Windows дозволяють застосовувати політику доступу до інформації та багаторівневу систему безпеки. Технології, вбудовані в XML (*Extensible Markup Language* – розширена мова розмітки [5]), і SQL-сервер (*Structured Query Language* – мова структурованих запитів [5]), зробили можливим спростити інтеграцію систем і підвищити ефективність передачі даних цілісно із застосуванням сучасних засобів захисту.

Для реалізації структури системи найчастіше використовують один з двох потужних інструментів – Java чи засоби Microsoft. Для аналізу складних структур даних та їх модулів використовуються OLAP-технології (*OnLine Analytical Processing* – аналітична обробка в реальному часі [5]).

При проектуванні сервера потрібно враховувати його масштабованість, що полягає в універсальності архітектури і гнучкості при додаванні нових компонент і розширенні системи. Серед особливостей масштабування можна назвати наступні: підтримка багатопроцесорного устаткування, регулювання завантаження і оптимальний розподіл серед декількох серверів, підтримка декількох підключень на одній станції.

Одним з ключовим елементів розуміння серверної архітектури є її графічна інтерпретація як єдиного цілого. Здатність створювати графічну інтерпретацію та підтримувати її актуальність дозволить значно спростити розуміння та модифікацію архітектури, підтримувати масштабованість.

Іншим аспектом при розробці складних систем є їх документування та підтримка

актуальності зв'язків між проектними документами та програмним кодом.

Важливим також є налаштування додатків з метою забезпечення безпеки. Забезпечення безпеки розподіленого додатку – це тривалий і складний процес, оскільки при цьому використовується безліч технологій і параметрів, які можуть впливати на структуру і реалізацію додатку. В даний час не існує загальноприйнятого способу, за допомогою якого можна було б при проектуванні додатку описати вимоги до його структури з погляду безпеки, або вимоги по безпеці з боку сервера, на якому цей додаток виконуватиметься [11].

З точки зору розуміння особливості сервера інформаційної системи як деякої цілісної сукупності даних у Всесвітній мережі цікавою є робота [12], де наведені статистичні дані по множині запрошуваних і переданих даних, зокрема:

- частка успішних звернень складає 88%; інші звернення – відсутність документа на сервері або прав доступу до нього;
- HTML-файли і графічні файли складають від 90% до 100%;
- середній розмір передачі – 21 Кбайт (що задовольняє припущенню у моделюванні, описаному у підрозділі 2.1);
- список файлів без повторів – менше 3% від загального числа переданих файлів;
- розподіл розміру файлу – Парето;
- концентрація посилань – на 10% файлів доводиться до 90% запитів, які складають 90% трафіку;
- географія запитів: звернення з 10% від загального числа доменів складають понад 75% всіх звернень.

Ефективність функціонування розподіленого Web-сервера багато в чому залежить і від того, яким чином усередині нього розміщена інформація. Проблема розміщення даних породжує цікаві задачі дискретної оптимізації, при цьому розрізняють розміщення файлів і видів служб. У першому випадку на полярних позиціях знаходиться повне дублювання всієї інформації на кожному сервері і повне розділення, коли вся множина файлів ділиться на скінченну кількість підмножин, що не перетинаються. Перше рішення неекономічне, друге ненадійне і не гарантує балансування завантаження – бо одні файли популярніші за інші. Найкращим рішенням є дублювання однієї множини файлів і розділення іншої. У зв'язку з цим виникають завдання оптимального розбиття змісту сервера

на підмножини і вибору кількості копій. Існують алгоритми, що передбачають динамічну міграцію даних між серверами. Що ж до генерації і розподілу динамічного змісту, то ефективність планування робіт багато в чому визначається бізнес-логікою і технологіями розробки Веб-додатків, загальних тенденції тут небагато [13]. Щодо структури розподіленого сервера інформаційної системи, здатної до навчання, то вона повністю визначається призначенням інформаційної системи та проектується одночасно з проектуванням бізнес-логіки, компонентів інформаційної системи та зв'язків між компонентами. При цьому для досягнення максимальної ефективності обчислень кожен сервер має містити компонент чи декілька компонентів інформаційної системи, що беруть участь в одному алгоритмічному обчисленні чи пов'язані між собою іншими зв'язками.

За умови невеликого часу обробки даних кількість зв'язків, що пов'язують компоненти, які знаходяться на різних серверах, повинна бути меншою за кількість зв'язків, що пов'язують компоненти на одному сервері. За умови значного часу обробки даних проектування архітектури повинно спиратися на розбиття даних таким чином, щоб їх обробка відбувалась за оптимальний сукупний час, тобто потрібно розв'язати задачу оптимізації за часом виконання алгоритмів.

7. Реалізація серверів інформаційних систем, здатних до навчання, провідними світовими компаніями-розробниками програмного забезпечення.

У даному розділі розглянемо приклади реалізації інформаційних систем, здатних до навчання, як надбудов над існуючими системами баз даних. Так як компанії-розробники не поширюють інформацію про використані алгоритми та серверну архітектуру, наведені лише загальні риси додатків, що дозволяють виконувати обчислення на основі баз даних і забезпечують реалізацію інформаційних систем, здатних до навчання (чи таких, що забезпечують персоналізацію).

Oracle Application Server пропонує технологію та функціональність Oracle Personalization, що за відгуками, завдяки запропонованим рекомендаціям, дозволяє збільшити середній розмір замовлень користувачів, час перебування на сторінці чи сайті та кількість повернень користувачів до сайту. Oracle Personalization – це персоналізація у реальному часі для електронного бізнесу,

Інтернет-магазинів, центрів обслуговування. Маючи можливість використовувати Oracle Database, Oracle Personalization може аналізувати великі об'єми даних користувачів. Технологія є достатньо точною, оскільки не використовує припущень для спрощення та зменшення складності обчислень. Oracle Personalization має такі властивості: обчислення рекомендації у реальному часі; вбудовану побудову моделей в базі даних Oracle; вбудований метод персоналізації, що базується на даних про користувачів та їх поведінку; вбудований індекс персоналізації, що показує ступінь персоналізації; можливість обирати довжину історії для користувача; можливість використовувати ієрархічність сайту при наданні рекомендації та можливість використовувати рейтинги для даних [15].

Компанія Microsoft пропонує Microsoft Personalization System, що складається з додаткових компонентів для Internet Information System та має наступні риси: комунікації, специфічні для користувача (на основі обраного кола інтересів чи голосування) з можливістю надсилати інформацію користувачу; персоналізацію сторінок на основі збереженого профілю користувача чи його минулих дій; можливість передавати чи отримувати інформацію про користувачів з центрального сервера на розподілені сторінки; автоматичну ідентифікацію користувачів (без потреби вводити логін та пароль для зареєстрованих користувачів); можливість проводити голосування та обробляти результати в базі даних SQL чи Microsoft Access; можливість надсилати поштою певну інформацію; легке адміністрування та інтегрованість з Windows NT Server та Microsoft Internet Information Server, що дозволяє використовувати їх можливості; підтримку Active Server Pages (швидке динамічне створення сторінок); спільні механізми безпеки та інтеграцію з Microsoft Commercial Internet System [15].

Висновки

Персоналізація набуває все більшого значення в сучасному світі для інформаційних систем. Такі системи здатні адаптуватись під потреби користувача; персоналізація визнана одним з основних напрямків роботи компаній-розробників програмного забезпечення та компаній, що розробляють пошукові системи в Інтернет. У даній статті розглянуті математичні закономірності, що описують потоки даних між

сервером та Всесвітньою мережею, зроблені висновки щодо впливу на ефективність роботи веб-сервера. Описані вимоги до систем, які здатні навчатися, та типи систем. Представлені алгоритми, що повинні бути реалізовані сервером для підтримки персоналізації. Описана серверна архітектура систем, здатних до навчання та запропонований метод її проектування та побудови. Також розглянуті деякі аспекти розподілених систем та наведений опис систем, реалізованих компаніями Oracle та Microsoft.

Список використаних джерел

1. Nossenson R., Attiya H. Understanding of files transmission distribution in the Web // International Journal of Communication Systems. – June 2004. – Volume 17. – Issue 5.
2. Crovella M., Taqqu M., Bestavros A. Heavy-Tailed Probability Distributions in the World Wide Web // A practical Guide To Heavy Tails: Statistical Techniques and Application. – Boston: Birkhauser, 1998.
3. Российская Академия Наук Статистика катастрофических событий // Управление Риском (под ред. Малинецкого Г. Г.). – Москва, 2000.
4. Hettmansperger T., Keenan M. Tailweight, Statistical Inference, and Families of Distributions – A Brief Survey // Statistical Distributions in Scientific Work, Boston: Kluwer, 1980.
5. Електронна енциклопедія Вікіпедія / <http://ru.wikipedia.org/wiki>
6. Cohen E., Kaplan H. Prefetching the means for document transfer: a new approach for reducing web latency // Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (INFOCOM 2000). – 2000. – Volume 2, p. 854-863.
7. B. Mobasher, Dai H., Luo T., Nakagawa M. Improving the Effectiveness of Collaborative Filtering on Anonymous Web Usage Data // IJCAI 2001 Workshop on Intelligent Techniques for Web Personalization (ITWP01), – Seattle, August 2001.
8. Han J., Kamber M. Data Mining: Concepts and Techniques // Morgan Kaufmann. – 2001. – San Francisco.
9. Anand S. S., Mobasher B. Intelligent Techniques for Web Personalization // LNAI 3169. – 2005. – Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, p. 1-36.
10. Пат. 20020078039 США, G06F 007/00. Architecture for distributed relational data mining systems: Пат. 20020078039 США, G06F 007/00; James M. Stover NCR Corporation. – № 739993; Заявл. 18.12.2000; Опубл. 20.06.2002; 707/4.
11. Gibson B., Torone A. Visual Studio Enterprise Tools, Visual Studio 2005 Team System: Designing Distributed Systems for Deployment. – Microsoft Corporation, May 2004 / <http://msdn2.microsoft.com/en-us/library/aa302176.aspx>.
12. Arlitt M.F., Williamson C.L. Web Server Workload Characterization: The Search for Invariants // ACM SIGMETRICS'96 Conference – Philadelphia (PA), 1996.
13. Труб И. Алгоритмическое обеспечение распределенных Web-серверов // Открытые системы. – 2003. – №5 / http://www.osp.ru/os/2003/05/183030/_p3.html.
14. Oracle Corporation The Art of Personalization // An Oracle White Paper, August 2005 / <http://www.oracle.com/technology/products/personalization/index.html>.
15. Microsoft TechNet Library What is Personalization? / <http://www.microsoft.com/technet/archive/mcis/personwp.msp?mfr=true>.

Надійшла до редколегії 03.09.2007

УДК 519.21

Доценко С.І., к.ф.-м.н., доцент
Луценко Є.О.

Оптимізація розкладу в системах конвеєрного типу

*Розглянуто Задачу мінімізації сумарної
тривалості проходження робіт в системі
конвеєрного типу.*

*Ключові слова: Системи конвеєрного типу,
задача Джонсона.*

Представлено професором Закусило О.К.

Вступ.

Серед задач, що виникають при розгляді систем конвеєрного типу, найбільш відомою є задача мінімізації максимальної тривалості проходження для двох машин, яка носить назву задачі Джонсона і формулюється наступним чином.

Нехай є n робіт, кожна з яких характеризується парою (A_i, B_i) , де A_i, B_i – тривалості виконання частини роботи, що виконує перша та друга машини відповідно. Треба мінімізувати максимальний час проходження робіт (тобто інтервал часу від початку виконання першої роботи на першій машині до закінчення останньої роботи на другій машині).

Ця задача є розв'язаною в загальному випадку і оптимальний порядок проходження робіт визначається алгоритмом Джонсона.

Алгоритм Джонсона.

Треба спочатку знайти мінімальне з чисел $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$. Якщо це буде A_i , то робота з номером i буде першою в оптимальному розкладі, якщо B_i , то останньою (якщо мінімум досягається одночасно для A_i та B_i , то байдуже, буде ця робота першою чи останньою). Викреслюючи i -ту роботу зі списку, повторюємо цю операцію знову і т.д.

В [2] було зроблено наступне зауваження, яке істотно спрощує реалізацію алгоритму Джонсона. Для того, щоб знайти оптимальний порядок проходження робіт, що мінімізує максимальний час проходження, достатньо впорядкувати роботи в не зростаючому порядку значень $\omega(j) = \text{sign}(B_j - A_j)(M - \min(A_j, B_j))$

Dotsenko S.I., cand.phys.-math., docent
Lutsenko Eu.O.

Optimal scheduling in tandem systems

*A problem of total passage time minimization
in tandem system is considered.*

Key Words: Tandem systems, Johnson problem.

E-mail: sergei204@ukr.net

де M – довільне число, таке, що $M \geq \max(A_i, B_i)$

Виявляється, що мінімізація сумарного часу проходження є значно складнішою задачею, ніж розглянута вище задача мінімізації максимальної тривалості і в загальному випадку для неї відсутній конструктивний алгоритм, подібний Джонсонівському. Позитивним моментом при дослідженні даної задачі є те, що середня тривалість проходження є регулярним критерієм, отже розклад слід шукати серед таких, що порядок виконання робіт на двох машинах співпадає. На підставі розглянутих нижче теорем в деяких частинних випадках можливе покращення вихідного розкладу і знаходження деякого "тупікового" розкладу, який є не гіршим за вихідний, але при цьому немає ніяких гарантій, що знайдений розклад є кращим серед усіх можливих.

Теорема 1.

Нехай маємо деякий розклад для двох машин. Тривалості виконання робіт дорівнюють A_j та B_j для першої та другої машини відповідно. Роботи пронумеровані в порядку виконання. Нехай для деяких робіт j та $k > j$ виконується $A_j \geq A_k$ та $B_j \geq B_k$. Тоді для того, щоб після перестановки у розкладі робіт j та k місцями, сума всіх проходжень не збільшилась, достатньо, щоб для кожної з робіт $(j+1), \dots, (k-1)$ довжина проміжку часу між кінцем виконання на першій машині та початком виконання на другій був не меншим за $(B_j - B_k) - (A_j - A_k)$, а для k -тої роботи – не меншим за $B_j - B_k$.

Доведення.

Зауважимо, що від перестановки j -тої та k -тої робіт місцями час проходження робіт $\overline{1, j-1}$ не зміниться.

Час проходження наступної роботи (k -тої в початковій нумерації, що виконується j -тою в новій нумерації) зменшиться на величину не більшу, ніж $(B_j - B_k) + (A_j - A_k)$.

Тепер розглянемо наступні роботи. В новому розкладі робота $(j+1)$ закінчить своє виконання на першій машині на $(A_j - A_k)$ одиниць часу раніше. Оскільки в початковому розкладі кінець роботи $(j+1)$ на першій машині та початок виконання на другій розділяв проміжок часу принаймні в $[(B_j - B_k) - (A_j - A_k)]_+$, та враховуючи те, що попередня робота на другій машині закінчилась на $(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше, то й $(j+1)$ робота закінчить своє виконання на $(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше.

Далі $(j+2)$ робота закінчить першу фазу на $(A_j - A_k)$ одиниць часу раніше. А враховуючи "запас" між кінцем першої фази і початком другої та зменшенням часу виконання попередньої роботи на $(B_j - B_k)$ робимо висновок, що і $(j+2)$ робота завершить виконання на $(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше.

Аналогічно буде відбуватися з усіма роботами від $(j+1)$ до $(k-1)$ включно. Послідовно доводимо, що кожна наступна робота закінчує першу фазу на $(A_j - A_k)$ раніше, та, маючи "запас" принаймні в $[(B_j - B_k) - (A_j - A_k)]_+$, зможе закінчити усю роботу на $(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше (вона зможе посунутись на таку відстань лівіше, бо попередня робота теж зсунулась на цю відстань).

Як бачимо, усі роботи від $(j+1)$ до $(k-1)$ зменшують свій час проходження на $(B_j - B_k)$. Тепер подивимось, що відбувається з j -тою роботою, яка стає на місце k -тої. Час закінчення першої фази вона не змінить (бо роботи на першій машині виконуються без простоїв). Але ця робота, за умовою, має запас часу в $(B_j - B_k)$. А оскільки $(k-1)$ робота закінчилась на

$(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше, то j -та робота може розпочати своє виконання на другій машині на $(B_j - B_k)$ одиниць часу раніше, ніж k -та робота в попередньому розкладі. Але тривалість виконання цих робіт на другій машині відрізняється на цю ж величину, тому робота j не змінить свого часу виконання.

Якщо десь перед однією з розглянутих робіт на другій машині був простій та $(A_j - A_k) > (B_j - B_k)$, то робота могла виконатись ще швидше – не на час $(B_j - B_k)$, а на

$$(B_j - B_k) + \min \left((A_j - A_k) - (B_j - B_k), 0 \right)$$

Оскільки j -та робота виконала першу фазу в той самий час, а другу – не пізніше, то й усі роботи після k -тої не збільшать свій час виконання.

Усі роботи розглянуто. Звідси, сумарний час проходження за вказаних умов не збільшиться.

Зауваження 1.

Якщо $(A_j - A_k) \geq (B_j - B_k)$, то умови для робіт $\overline{(j+1), (k-1)}$ виконуються автоматично. Залишається перевірити лише "запас" для k -тої роботи.

Зауваження 2.

Вказані умови не є надлишковими.

Доведення.

1-й випадок. Нехай $(A_j - A_k) \geq (B_j - B_k)$.

Припустимо, що "запас" для k -тої роботи менший за $(B_j - B_k)$. Тоді j -та робота закінчиться пізніше, ніж k -та в попередньому розкладі. І в цьому випадку за рахунок додавання "миттєвих" робіт після k -тої можна збільшити сумарний час проходження на як завгодно велику величину.

Наприклад, нехай $A_1 = 6$, $B_1 = 4$, $A_2 = 3$, $B_2 = 2$, $A_i = B_i = 0$ для $i = \overline{3, n}$, $j = 1$, $k = 2$. Усі необхідні умови виконуються, окрім тієї, що "запас" для другої роботи не менший за $(B_1 - B_2)$. Він дорівнює одиниці і є меншим за $(B_1 - B_2)$. До заміни робіт місцями маємо $T_1 = 10$, $T_2 = T_3 = \dots = T_n = 12$, тобто сумарний час проходження дорівнює $10 + 12(n-1)$. Після

заміни місцями перших двох робіт $T_1 = 5$, $T_2 = T_3 = \dots = T_n = 13$, а сумарних час стане рівним $5 + 13(n-1)$. Таким чином при $n \geq 7$ матимемо збільшення сумарного часу проходження, що буде нескінченно зростати при зростанні n .

2-й випадок. Нехай $(A_j - A_k) < (B_j - B_k)$.

Припустимо, що для l -тої роботи "запас" менший за $(B_j - B_k) - (A_j - A_k)$. Тоді ця l -та робота зсунеться лівіше на час, що менший за $(B_j - B_k)$. Якщо усі наступні роботи йшли без простоїв, то усі вони зсунуться на строго менше за $(B_j - B_k)$ одиниць часу лівіше. А тому знову, j -та робота закінчиться пізніше і за рахунок "миттєвих" робіт можна збільшити сумарний час проходження на яку завгодно велику величину.

Наприклад, нехай $A_1 = 4$, $B_1 = 6$, $A_2 = 5$, $B_2 = 5$, $A_3 = 3$, $B_3 = 3$, $A_i = B_i = 0$ для $i = 4, n$. $j = 1$, $k = 3$. Усі необхідні умови виконуються, окрім тієї, що "запас" для другої роботи не менший за $(B_j - B_k) - (A_j - A_k)$. Він дорівнює одиниці і є меншим за $(B_j - B_k) - (A_j - A_k)$. До заміни робіт місцями маємо $T_1 = 10$, $T_2 = 15$, $T_3 = T_4 = \dots = T_n = 18$, тобто сумарний час проходження дорівнює $25 + 18(n-2)$. Після заміни місцями перших двох робіт $T_1 = 6$, $T_2 = 13$, $T_3 = T_4 = \dots = T_n = 19$, а сумарних час стане рівним $19 + 19(n-2)$. Таким чином при $n \geq 9$ матимемо збільшення сумарного часу проходження, що буде нескінченно зростати при зростанні n .

Зауваження 3.

У випадку заміни місцями двох сусідніх робіт теорема зводиться до наступного твердження.

Нехай для деякої пари сусідніх робіт вихідного розкладу виконуються співвідношення $A_k \geq A_{k-1}$, $B_k \geq B_{k-1}$ та $\min(A_k, B_{k-1}) \geq \min(A_{k-1}, B_k)$. Тоді перехід до розкладу

$(1, 2, \dots, k-1, k+1, k, k+2, \dots, n)$ не збільшує сумарної тривалості проходження робіт.

Це твердження було сформульовано та доведено в [1] як теорема 2.

Теорема 2.

Нехай маємо деякий розклад для двох машин та n робіт. Тривалості виконання робіт дорівнюють A_i та B_i для першої та другої машин відповідно. Роботи пронумеровані у порядку виконання.

Нехай для деяких робіт j та $k > j$ виконуються нерівності $A_j \geq A_k$, $B_j \geq B_k$ та $(n-k+1)(B_j - B_k - \min(A_j - A_k, B_j - B_k, d_k)) \leq (k-j+1)\min(A_j - A_k, B_j - B_k) + (B_j - B_k)$

де d_k - це час між кінцем виконання k -тої роботи на першій машині та початком її виконання на другій машині.

Тоді, якщо поміняти у розкладі місцями роботи j та k , то сума тривалостей проходжень усіх робіт не збільшиться.

Доведення.

Перші $(j-1)$ робіт не змінять часу свого виконання.

Далі замість j -ої роботи виконується k -та. Оскільки вона на першій машині виконається раніше на час $(A_j - A_k)$, а на другій - раніше на час $(B_j - B_k)$, то час її проходження зменшиться на $(B_j - B_k)$.

При цьому усі роботи з $(j+1), (k-1)$ завершать виконання на першій машині на $(A_j - A_k)$ часу раніше. Оскільки k -та робота завершила виконання на час $(B_j - B_k)$ менший, то з'являється можливість для робіт з $(j+1), (k-1)$ виконатись раніше. Але усі вони можуть почати виконуватись не раніше, ніж закінчать виконання на першій машині. Тому час виконання кожної роботи з $(j+1), (k-1)$ гарантовано зменшиться принаймні на час $\min(A_j - A_k, B_j - B_k)$. Оскільки усього цих робіт $(k-j-1)$, то враховуючи виграш на k -й роботі, маємо сумарний виграш $(k-j-1)\min(A_j - A_k, B_j - B_k) + (B_j - B_k)$.

Тепер розглянемо інші роботи. j -та робота закінчить виконання на першій машині у той самий час. При цьому $(k-1)$ робота закінчить своє виконання на час $\min(A_j - A_k, B_j - B_k)$ раніше. Це дає можливість для j -тої роботи розпочати своє виконання на другій машині на

час $\min(A_j - A_k, B_j - B_k)$ раніше. Але вона не може почати виконуватись на другій машині раніше, ніж закінчить виконання на першій. Тому, вона гарантовано почне виконуватись на другій машині раніше на час $\min(A_j - A_k, B_j - B_k, d_k)$. Але вона виконується на $(B_j - B_k)$ довше. Тому загальна затримка для j -ої роботи не перевищить $(B_j - B_k) - \min(A_j - A_k, B_j - B_k, d_k)$.

На стільки ж затримається і кожна наступна робота. Усього їх разом з j -тою буде $(n - k + 1)$. Тому сумарний програш в часі буде не більший, ніж

$$(n - k + 1)((B_j - B_k) - \min(A_j - A_k, B_j - B_k, d_k))$$

Ми отримали оцінки для сумарного виграшу та сумарного програшу. Оскільки, за умовою, сумарний виграш переважає програш, то поміняти місцями роботи вигідно.

Зауваження 4.

Якщо в початковому розкладі на другій машині перед виконанням j -ої роботи був простій довжини p_j , то нерівність можна покращити до наступної:

$$(n - k + 1)((B_j - B_k) - \min(A_j - A_k, B_j - B_k + p_j, d_k)) \leq (k - j + 1)\min(A_j - A_k, B_j - B_k + p_j) + (B_j - B_k) + \min(A_j - A_k, p_j)$$

Доведення.

Покращення нерівності відбувається за рахунок того, що у новому розкладі k -та робота зможе розпочати своє виконання на другій машині на час $\min(A_j - A_k, p_j)$ раніше і виграш по k -й роботі складатиме $(B_j - B_k) + \min(A_j - A_k, p_j)$.

Тоді кожна робота з $(j+1), (k-1)$ зможе розпочати своє виконання на другій машині раніше на час

$$\min(A_j - A_k, B_j - B_k + \min(A_j - A_k, p_j)), \text{ що еквівалентно } \min(A_j - A_k, B_j - B_k + p_j).$$

Аналогічно, кожна робота, починаючи з j -ої (це $j, (k+1), (k+2), \dots, n$) затримається не більше, ніж на

$$(B_j - B_k) - \min(A_j - A_k, B_j - B_k + p_j, d_k)$$

Зауваження 5.

Помітимо, що довжина проміжку d_k між кінцем виконання k -тої роботи на першій машині та початком її виконання на другій виражається через величини A_j та B_j наступним чином.

k -та робота завершить своє виконання на першій машині через час $(A_1 + \dots + A_k)$.

Попередня до неї робота завершить своє виконання на другій машині через час

$$\max \begin{pmatrix} A_1 + B_1 + \dots + B_{k-1}; A_1 + A_2 + B_2 + \dots + B_{k-1}; \\ A_1 + \dots + A_{k-1} + B_{k-1} \end{pmatrix}$$

k -та робота розпочне виконання на другій машині після того, як завершить своє виконання на першій та дочекається завершення виконання на другій машині попередньої роботи, тому

$$d_k = \max \begin{pmatrix} A_1 + B_1 + \dots + B_{k-1}; \\ A_1 + A_2 + B_2 + \dots + B_{k-1}; \\ A_1 + \dots + A_{k-1} + B_{k-1}; A_1 + \dots + A_k \end{pmatrix} - (A_1 + \dots + A_k)$$

Вносячи $(A_1 + \dots + A_k)$ під знак максимуму та вводячи заміну $B_k - A_{k+1} = \Delta_k$ отримаємо

$$d_k = \max \begin{pmatrix} \Delta_{k-1}; \Delta_{k-1} + \Delta_{k-2}; \Delta_{k-1} + \Delta_{k-2} + \Delta_{k-3}; \dots; \\ \Delta_{k-1} + \dots + \Delta_1; 0 \end{pmatrix}$$

Для d_k можна також вивести рекурентне співвідношення. Ця затримка буде ненульовою, якщо час виконання k -тої роботи на першій машині менший за час виконання попередньої роботи на другій машині плюс затримка для неї. Тому буде справедливою формула

$$d_k = [B_{k-1} + d_{k-1} - A_k]_+ = [\Delta_{k-1} + d_{k-1}]_+$$

Наслідок.

Якщо $\min(A_j - A_k, d_k) \geq (B_j - B_k)$, то сумарний програш відсутній і міняти роботи вигідно.

Список використаних джерел

1. Доценко С.І., Закусило О.К. Мінімізація середньої тривалості проходження в системі з двох машин. Вісник кібернетика, вип. 8, 2007 р.
2. Ковалев М.Я. Модели и методы календарного планирования. Минск, БГУ, 2004 г.

Надійшла до редколегії 10.09.2007

УДК 519.21

Єлейко Я.І., докт. ф.-м. н., проф.,
Заболоцький Т.М.

Асимптотичне поведіння розв'язку зліченновимірної рівняння відновлення

Досліджено асимптотичне поведіння
розв'язку зліченновимірної рівняння
відновлення для нижньотрикутних
зліченновимірних матричних мір.

Ключові слова: рівняння відновлення,
матриця відновлення, матрична міра,
перетворення Фур'є.

Статтю представив професор Є.О.Лебедєв

Нехай $G_{ij}^\varepsilon(dx)$, $i, j \in \mathbb{N}$, – сім'я комплексно-
значних мір на $\mathbb{R}_+$ така, що $G_{ij}^\varepsilon(dx) = 0$ при $j > i$,
 $V_{ij}^\varepsilon(dx)$ – варіація міри $G_{ij}^\varepsilon(dx)$ та $V_\varepsilon(dx) =$
 $= (V_{ij}^\varepsilon(dx))_{i,j=1}^\infty$, $G_\varepsilon(dx) = (G_{ij}^\varepsilon(dx))_{i,j=1}^\infty$.

Позначимо $H_\varepsilon(dx) = \sum_{k=0}^\infty G_\varepsilon^{k*}(dx)$ – матрицю
відновлення, що відповідає матриці $G_\varepsilon(dx)$, де
 $G_\varepsilon^{0*}([0, x]) = I$ і $G_\varepsilon^{(k+1)*}([0, x]) = G_\varepsilon^{k*} * G_\varepsilon([0, x]) =$
 $= \int_0^x G_\varepsilon^{k*}([0, x-y]) G_\varepsilon(dy)$. Аналогічно, $R_\varepsilon(dx) =$
 $= \sum_{k=0}^\infty V_\varepsilon^{k*}(dx)$.

Нехай $m_i = \int_0^\infty x G_{ii}^\varepsilon(dx)$ і міри $G_{ij}^\varepsilon(dx)$, $i, j \in \mathbb{N}$,

задовольняють наступним умовам:

границя $G_{ij}^\varepsilon(dx)$ в розумінні слабкої збіжності
дорівнює $G_{ij}(dx)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_{ij}^\varepsilon(dx) = G_{ij}(dx); \quad (1)$$

$$G_{ij}(dx) = 0 \quad (i \neq j), \quad G_{ii}(dx) \geq 0, \quad G_{ii}([0, \infty)) = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I - V_\varepsilon([0, \infty))) = D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^\infty, \quad d_{ij} < \infty; \quad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I - G_\varepsilon([0, \infty))) = C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^\infty, \quad c_{ij} < \infty; \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^x x V_{ij}^\varepsilon(dx) \right) = 0;$$

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} m_i > 0, \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} m_i < \infty;$$

$$\inf_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^\infty d_{ij} > 0.$$

Yelejko Y.I.,
Zabolotsky T.M.

Asymptotic behavior of the solution of the countable dimensional renewal equation

Here is investigated the asymptotic
behavior of the solution of the renewal equation for
countable dimensional lower semi-matrix measures.

Key Words: renewal equation, renewal
matrix, matrix measure, Fourier transformation.

Зауважимо, що завдяки умові (5), для всіх
 $i \in \mathbb{N}$ виконується $0 < m_i < \infty$. Аналогічно, нехай

$$n_i = \int_0^\infty x V_{ii}^\varepsilon(dx), \text{ де } V_{ij}^\varepsilon(dx) \text{ варіація міри } G_{ij}^\varepsilon(dx),$$

$$G(dx) = (G_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty, \quad V(dx) = (V_{ij}(dx))_{i,j=1}^\infty,$$

$$M = \text{diag}\{m_1, \dots\}, \quad N = \text{diag}\{n_1, \dots\}.$$

З а у в а ж е н н я 1. Оскільки міри $G_{ii}(dx)$ є
дійснозначними (див. (2)), то очевидно, що
 $G_{ii}(dx) = V_{ii}(dx)$, тобто $M = N$.

Означення 1. Сім'я функцій $f_\varepsilon(x)$, визначе-
них на $[0, +\infty)$, що залежать від параметру $\varepsilon > 0$,
називається рівномірно безпосередньо інтегрова-
ною за Ріманом, якщо

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \geq 0} |f_\varepsilon(x)| < \infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\varepsilon > 0} \sum_{n=0}^\infty \sup_{n\delta \leq x \leq (n+1)\delta} |f_\varepsilon(x)| \right) = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\delta \sum_{n=0}^\infty \left(\sup_{n\delta \leq x \leq (n+1)\delta} f_\varepsilon(x) - \inf_{n\delta \leq x \leq (n+1)\delta} f_\varepsilon(x) \right) \right) = 0.$$

Сім'я вектор-функцій $\vec{f}_\varepsilon(x)$, $x \geq 0$, $\varepsilon > 0$,
називається рівномірно безпосередньо інтегрова-
ною за Ріманом, якщо безпосередньо інтегрова-
ними за Ріманом є всі компоненти вектора $\vec{f}_\varepsilon(x)$.

При виконанні цих умов невластивий інте-
грал $\int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx$ є рівномірною відносно $\varepsilon > 0$
границею інтегральних сум, побудованих за
безпосереднім розбиттям півосі $[0, +\infty)$, тобто

$$\lim_{\max_k \Delta_k \rightarrow 0} \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx - \sum_{n=0}^\infty f_\varepsilon(\xi_n) \Delta_n \right| = 0, \text{ де}$$

$$\Delta_n = x_{n+1} - x_n, \quad 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots, \quad x_n \rightarrow \infty,$$

$$x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}. \text{ Також рівномірно відносно } \varepsilon > 0$$

$$\text{мають місце співвідношення}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx &= \lim_{\max \Delta_k \rightarrow 0} \left| \sum_{n=0}^\infty \sup_{x_n \leq x \leq x_{n+1}} f_\varepsilon(x) \Delta_n \right| = \\ &= \lim_{\max \Delta_k \rightarrow 0} \left| \sum_{n=0}^\infty \inf_{x_n \leq x \leq x_{n+1}} f_\varepsilon(x) \Delta_n \right|. \text{ Нехай } \Psi_\varepsilon(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty e^{i\lambda x} V_\varepsilon(dx), \quad \Psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} G(dx) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} V(dx). \end{aligned}$$

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. Нехай $G_\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(6), матриця D є додатно визначена, матриця $(\Psi(\lambda) - I)$ – оборотна. Тоді для довільного $s \geq 0$ виконується

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ s \rightarrow \infty \\ \varepsilon s \rightarrow t}} R_\varepsilon([x, x+s]) = se^{-i\lambda t} M^{-1}.$$

Зауваження 2. Додатна визначеність матриці розуміється в сенсі [1, с.218-219].

Теорема 2. Нехай $G_\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(6), матриця D є додатно визначена, матриця $(\Psi(\lambda) - I)$ – оборотна. Якщо вектор-функція $\vec{f}_\varepsilon(x)$ є рівномірно безпосередньо інтегрованою за Ріманом та існує границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \vec{f}_\varepsilon(x) dx = \vec{b}$, то

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ s \rightarrow \infty \\ \varepsilon s \rightarrow t}} H_\varepsilon * \vec{f}_\varepsilon(x) = e^{-i\lambda t} M^{-1} \vec{b}.$$

Розглянемо банаховий простір K з елементами $Q(x) = (Q_\nu(x))_{\nu=1}^m$ і нормою $\|Q\| = \int_0^\infty \|Q(x)\| dx < \infty$, де $\|A\| = \sup_{i \in \mathbb{C}} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ – норма

матриці A . Для $Q \in K$ позначимо $\tilde{Q}(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} Q(x) dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$, і нехай $N_\varepsilon = \int_0^\infty x V_\varepsilon(dx)$,

$$L_\varepsilon = N_\varepsilon^{-1} (I - V_\varepsilon([0; \infty))),$$

$$Q_\varepsilon(x) = e^{-i\lambda x} - \int_0^x V_\varepsilon(df) e^{-(x-f)L_\varepsilon}.$$

Для доведення теорем будуть потрібні наступні твердження.

Лема 1. Нехай $G_\varepsilon(dx)$ задовольняють умови (1)-(7). Якщо матриця $(\Psi(\lambda) - I)$ оборотна, то для всіх $-\infty < a < b < \infty$ і для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ знайдуться функції $F \in K, F_\varepsilon \in K$ такі, що для $\lambda \in [a, b]$ виконується:

$$\tilde{F}_\varepsilon^{-1}(\lambda) = (I - \Psi_\varepsilon(\lambda))(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1},$$

$$\tilde{F}^{-1}(\lambda) = \frac{i}{\lambda} (I - \Psi(\lambda)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x) = F(x) \text{ за нормою простору } K.$$

Зауваження 3. Умова оборотності матриці $(\Psi(\lambda) - I)$ є аналогом умови не решітчатості мір $G_\varepsilon(dx)$ у випадку скінчено-вимірних матриць. Доведення леми 1 ми не наводимо, оскільки воно громіздке і за схемою аналогічне до скінченновимірного випадку.

Нехай L_1 простір всіх інтегрованих на $(-\infty; +\infty)$ комплекснозначних функцій і $\tilde{g}(\lambda)$ перетворення Фур'є функції $g \in L_1$, тобто

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x} g(x) dx.$$

Лема 2. Нехай виконуються умови (1)-(6), причому матриця D є додатно визначена. Тоді для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ і довільної обмеженої функції $g \in L_1$, $\tilde{g}(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin [a, b]$,

$$g * R_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-i\lambda x} \tilde{g}(\lambda) [I - \Psi_\varepsilon(\lambda)]^{-1} d\lambda.$$

Доведення. Нехай $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ – власні значення матриці D . З додатної визначеності матриці D маємо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ і для деякого $\sigma > 0$, виконується $\operatorname{Re} \sigma_k \geq \sigma$. Отже, всі власні значення матриці e^{-D} лежать в крузі радіусу $e^{-\sigma} < 1$. Покажемо, що для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ матричний ряд $\sum_{k=0}^\infty [\Psi_\varepsilon(\lambda)]^k$ збігається абсолютно і рівномірно відносно λ .

Дійсно, завдяки (3), $\|\Psi_\varepsilon(\lambda)^k\| \leq \|\Psi_\varepsilon(0)^k\| = \|(I - \varepsilon D + o(\varepsilon))^k\|$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Візьмемо $k = k_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Тоді $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I - \varepsilon D + o(\varepsilon))^{k_\varepsilon} = e^{-D}$, тобто

$$(\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon(\delta) > 0) (\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon(\delta))) (\forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\|\Psi_\varepsilon(\lambda)^{k_\varepsilon}\| \leq \|(1 + \delta) \cdot e^{-D}\|. \text{ Виберемо } \delta \text{ так, щоб}$$

$r = (1 + \delta)e^{-\sigma} < 1$ і нехай $\varepsilon > 0$ такі, що виконується попередня нерівність. Оскільки всі власні значення матриці e^{-D} знаходяться в крузі радіуса $e^{-\sigma}$, то всі власні значення матриці $\Psi_\varepsilon(\lambda)^{k_\varepsilon}$ мають вигляд $\rho_j^{k_\varepsilon}$, де ρ_j ($j \in \mathbb{N}$) власні значення матриці $\Psi_\varepsilon(\lambda)$, які містяться в крузі

радіусу $r_{\frac{1}{k\varepsilon}} < 1$. Отже, для достатньо малих $\varepsilon > 0$ рівномірно відносно λ спектральні радіуси матриці $\Psi_\varepsilon(\lambda)$ є менші за одиницю. Звідси отримуємо збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} [\Psi_\varepsilon(\lambda)]^k$. Легко бачити,

що сума цього ряду дорівнює $(I - \Psi_\varepsilon(\lambda))^{-1}$.

З властивості перетворення Фур'є $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} g * V_\varepsilon^{k*}(x) dx = \bar{g}(\lambda) \cdot \Psi_\varepsilon^k(\lambda)$. За умов леми накладених на g отримуємо, що функція $\bar{g}(\lambda) \cdot \Psi_\varepsilon^k(\lambda)$ є неперервною і $\bar{g}(\lambda) \cdot \Psi_\varepsilon^k(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [\alpha, b]$. Тому функція $\bar{g}(\lambda) \cdot \Psi_\varepsilon^k(\lambda)$ є абсолютно інтегрованою. Отже, просумувавши по k рівності $g * V_\varepsilon^{k*}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^b e^{-i\lambda x} \bar{g}(\lambda) \Psi_\varepsilon^k(\lambda) d\lambda$, отримаємо потрібне твердження.

Доведення теореми 1. Припустимо, що виконується умова (7). З леми 1 при $\lambda \in [\alpha, b]$ маємо $(I - \Psi_\varepsilon(\lambda))^{-1} = (L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_\varepsilon(\lambda)^{-1} = (L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} \cdot \bar{F}_\varepsilon(\lambda)$. Звідси, враховуючи лему 2, отримуємо рівність $(L_\varepsilon - i\lambda I)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} e^{-xL_\varepsilon} dx$ та, завдяки властивості перетворення Фур'є згортки функцій (див., напр. [2])

$$g * R_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)L_\varepsilon} F_\varepsilon * g(y) dy.$$

Розглянемо сім'ю матричних функцій

$$T_{\varepsilon, x}(y) = \begin{cases} e^{-(x-y)L_\varepsilon}, & y \leq x; \\ 0, & y > x. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } g * R_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\varepsilon, x}(y) F_\varepsilon * g(y) dy.$$

Завдяки умовам (6) та (7) $\sigma = \inf_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{ij}}{m_i} > 0$, а

тому $\|e^{-t} M^{-1} D\| \leq e^{-t\sigma}$. Оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|e^{-\frac{1}{\varepsilon} L_\varepsilon}\| = \|e^{-M^{-1} D}\|$, то $\|e^{-xL_\varepsilon}\| \leq e^{-x\sigma}$, а тому при $y \leq x$ $\|T_{\varepsilon, x}(y)\| \leq e^{-\sigma(x-y)} \leq 1$, а отже, $\sup_{-\infty < y < \infty} \|T_{\varepsilon, x}(y)\| \leq 1$.

Нехай $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $x\varepsilon \rightarrow t$. Тоді $\limsup \|T_{\varepsilon, x}(y)\| \leq 1$, $T_{\varepsilon, x}(y) \rightarrow e^{-M^{-1} D}$. Оскільки

$F_\varepsilon(x)$ збігається до $F(x)$ за нормою простору

$\mathbf{K}$, тобто $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|F_\varepsilon * g(y) - F * g(y)\| dy = 0$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} F * g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy =$$

$$= \bar{\mathcal{Q}}(0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = M^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy, \text{ то для всіх}$$

$g \in L^1$ з фінітним перетворенням Фур'є при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $x\varepsilon \rightarrow t$ отримаємо

$$g * R_\varepsilon(x) \rightarrow e^{-tM^{-1} D} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F * g(y) dy =$$

$$= e^{-tM^{-1} D} M^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy. \text{ Покажемо, що для довільного } s \geq 0 \text{ виконується}$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, x\varepsilon \rightarrow t} \|R_\varepsilon([x; x+s])\| < \infty. \quad (8)$$

Через $\bar{v}_\varepsilon(x)$ позначимо векторну функцію з координатами $v_\varepsilon^i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}^\varepsilon([x; \infty))$. Легко перевірити, що $R_\varepsilon * \bar{v}_\varepsilon(x) = \bar{1} - R_\varepsilon([0; x])(\bar{1} - \bar{v}_\varepsilon(0))$, а також, для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується $\sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}^\varepsilon([0; \infty)) \leq 1$. Отже, вектор $\bar{v}_\varepsilon(0)$ має невід'ємні координати і тому для всіх $\varepsilon > 0$ та $x \geq 0$ отримуємо $R_\varepsilon * \bar{v}_\varepsilon(x) \leq \bar{1}$. Завдяки умові (3), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} V_{ij}^\varepsilon([0; \infty)) = 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Тому знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ функція $v_\varepsilon^i(x) \geq \delta$ для $0 \leq x \leq \delta$. Звідси і з нерівності $R_\varepsilon * \bar{v}_\varepsilon(x) \leq \bar{1}$ маємо, що для всіх $x \geq 0$ і для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується $\delta R_\varepsilon([x; x+\delta]) \bar{1} \leq R_\varepsilon * \bar{v}_\varepsilon(x) \leq \bar{1}$.

Далі, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $x\varepsilon \rightarrow t$ отримаємо $\limsup \|R_\varepsilon([x; x+\delta])\| \leq \frac{1}{\delta}$. Отже, для $t > \delta$ маємо $\limsup \|R_\varepsilon([x; x+s])\| \leq \frac{t+\delta}{\delta^2}$, що доводить (8).

З (8) випливає, що для довільної скалярної обмеженої вимірної функції $\chi(x)$ з компактним носієм $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, x\varepsilon \rightarrow t} \|\chi * R_\varepsilon(x)\| < \infty$. Зафіксуємо функцію $\chi(x)$ і позначимо через $\mathbb{L}^1(\chi)$ множину тих функцій $g \in L^1$, для яких виконується

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow l}} g * \chi * R_\varepsilon(x) = \\ = e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y) dy \quad (9)$$

Легко показати, що множина $\bar{L}^1(\chi)$ містить всі функції $g \in L^1$ з фінітним перетворенням Фур'є, $\bar{L}^1(\chi)$ є замкнутою у розумінні збіжності за нормою простору L^1 і лінійною множиною. Отже, $\bar{L}^1(\chi)$ є замкнений підпростір простору L^1 , що містить в собі щільну множину, яка складається з функцій з фінітним перетворенням Фур'є. Тому $\bar{L}^1(\chi) = L^1$ і співвідношення (8) має місце для всіх $g \in L^1$ і всіх вимірних обмежених функцій $\chi(x)$.

Нехай функція $\chi(x)$ є нескінченно диферентційовна і її носій лежить строго всередині інтервалу $(0; +\infty)$, $l(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$.

$$\text{Тоді } \chi(x) = \int_0^x \chi(x-y) e^{-y} dy + \int_0^x \chi'(x-y) e^{-y} dy = \\ = l * \chi(x) + l * \chi'(x) \text{ і з (9) отримуємо}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow l}} \chi * R_\varepsilon(x) = l * \chi * R_\varepsilon(x) + l * \chi' * R_\varepsilon(x) = \\ = e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \times \int_0^{\infty} l(y) dy \int_0^{\infty} \chi(y) dy + \\ + e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \int_0^{\infty} l(y) dy \int_0^{\infty} \chi'(y) dy = \\ = e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \int_0^{\infty} \chi(y) dy.$$

Відомо, що індикатор інтервалу $[l; l+s]$ можна з довільною точністю за нормою простору L^1 наблизити нескінченно диферентційовними функціями з носієм в $(0; +\infty)$, тобто для довільного $\delta > 0$ існує пара нескінченно диферентційовних фінітних функцій $\chi_-(x)$, $\chi_+(x)$ з носіями в $(0; +\infty)$ така, що $\chi_-(x) \leq l_{[l; l+s]}(x) \leq \chi_+(x)$ і $\int_0^{\infty} |\chi_+(x) - \chi_-(x)| dx < \delta$. Звідси отримуємо, що

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow l}} \chi_{\pm} * R_\varepsilon(x) = e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \times \int_0^{\infty} \chi_{\pm}(y) dy$$

$$\text{і } \left| \int_0^{\infty} \chi_{\pm}(y) dy - s \right| < \delta, \text{ а тому}$$

$$R_\varepsilon([x-1-s; x-1]) = (l_{[l; l+s]} - \chi_-) * R_\varepsilon(x) + \\ + \chi_- * R_\varepsilon(x) \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow l}]{\varepsilon \rightarrow 0} s e^{-iM^{-1}D} M^{-1}, \text{ що доводить}$$

твердження теореми 1 за додаткової умови (7).

Щоб позбутися умови (7), поступимо аналогічно до [3]. Зафіксуємо $k > 0$, яке виберемо пізніше і нехай $U_\varepsilon(x) = e^{-k\varepsilon x} R_\varepsilon[x-s, x]$, $\bar{R}_\varepsilon(dy)$ – матриця відновлення, що відповідає матриці $\bar{V}_\varepsilon(dy) = e^{-k\varepsilon y} V_\varepsilon(dy)$, $\bar{\psi}_\varepsilon(dy)$ є матрицею варіацій, що відповідає матриці мір $\bar{\theta}_\varepsilon(dy)$ і $\bar{\Theta}_\varepsilon(dy) = e^{-k\varepsilon y} G_\varepsilon(dy)$. Легко бачити, що

$$U_\varepsilon(x) = \int_0^x e^{-k\varepsilon(x-y)} l_{[0,s]}(x-y) \bar{R}_\varepsilon(dy).$$

Покажемо, що матриці $\bar{\theta}_\varepsilon(dy)$ і $\bar{\psi}_\varepsilon(dy)$ задовольняють умови (1)-(7).

Дійсно, умови (1) та (2) виконуються. Розглянемо

$$\bar{V}_\varepsilon([0, \infty)) = \int_0^{\infty} e^{-k\varepsilon y} V_{ij}^\varepsilon(dy) = \\ = V_{ij}^\varepsilon([0, \infty)) - \int_0^{\infty} (1 - e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) = \\ = 1 - d_{ij}\varepsilon + o(\varepsilon) - \int_0^{\infty} k\varepsilon y V_{ij}^\varepsilon(dy) + \\ + \int_0^{\infty} (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy).$$

З (5) випливає, що $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} y V_{ij}^\varepsilon(dy) = m_i \delta_{ij}$, тому

$$\bar{V}_\varepsilon([0, \infty)) = 1 - \bar{d}_{ij}\varepsilon + o(\varepsilon) + \int_0^{\infty} (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy),$$

де $\bar{d}_{ij} = d_{ij} + km_i \delta_{ij}$. Оскільки підінтегральна функція монотонно зростаюча і невід'ємна, то

$$0 \leq \int_0^T (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) \leq \\ \leq (k\varepsilon T - 1 + e^{-k\varepsilon T}) V_{ij}^\varepsilon([0, \infty)),$$

$$0 \leq \int_T^{\infty} (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) \leq k\varepsilon \int_T^{\infty} y V_{ij}^\varepsilon(dy).$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) \leq \\ & \leq (kT - \frac{1 - e^{-k\varepsilon T}}{\varepsilon}) V_{ij}^\varepsilon([0, \infty)) + k \int_T^\infty y V_{ij}^\varepsilon(dy), \\ & \int_0^\infty (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) = \int_0^T (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy) + \\ & + \int_T^\infty (k\varepsilon y - 1 + e^{-k\varepsilon y}) V_{ij}^\varepsilon(dy). \end{aligned}$$

При фіксованому $T > 0$ маємо
 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (kT - \frac{1 - e^{-k\varepsilon T}}{\varepsilon}) V_{ij}^\varepsilon([0, \infty)) = 0$. За допомогою ви-
 бору $T > 0$, вираз $\int_T^\infty y V_{ij}^\varepsilon(dy)$ можна зробити як
 завгодно малим (див. (5)), а отже,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\delta_{ij} - V_{ij}^\varepsilon([0, \infty))) = \bar{d}_{ij}$, тобто виконується
 умова (3). Легко бачити, що з додатної визначе-
 ності матриці D випливає додатна визначеність
 матриці $\bar{D} = \{\bar{d}_{ij}\}$. Аналогічно перевіряється умо-
 ва (4) і ми маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\delta_{ij} - \bar{G}_{ij}^\varepsilon([0, \infty))) = \bar{c}_{ij} = c_{ij} + km_i \delta_{ij}.$$

Оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{G}_{ij}^\varepsilon(dx) = G_{ij}(dx)$, то вико-
 нуються умови (5) і (6). Завдяки умові $\inf_{i \in \mathbb{N}} m_i > 0$,
 можемо вибрати $k > 0$ таке, що
 $\inf_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^\infty \bar{d}_{ij} = \inf_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^\infty (d_{ij} + km_i) > 0$. Звідси бачимо, що
 $\bar{G}_\varepsilon(dx)$ задовольняють умову (7).

З доведеного вище випливає, що при $\varepsilon \rightarrow 0$,
 $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$ виконується
 $\limsup \| \bar{R}_\varepsilon([x, x+s]) \| < \infty$ і

$$\bar{R}_\varepsilon([x, x+s]) \rightarrow se^{-tM^{-1}\bar{D}} M^{-1}, \text{ де } \bar{D} = D + kM.$$

Звідси отримуємо

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow t}} \bar{R}_\varepsilon([x, x+s]) = se^{-kt} e^{-tM^{-1}D} M^{-1}.$$

Зауважимо, що

$$U_\varepsilon(x) = \bar{R}_\varepsilon([x-s, x]) - \int_{x-s}^x (1 - e^{-k\varepsilon(x-y)}) \bar{R}_\varepsilon(dy),$$

$$\| \int_{x-s}^x (1 - e^{-k\varepsilon(x-y)}) \bar{R}_\varepsilon(dy) \| \leq$$

$$\leq (1 - e^{-k\varepsilon s}) \| \bar{R}_\varepsilon([x-s, x]) \| \xrightarrow[\varepsilon x \rightarrow t]{\varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty} 0,$$

а отже, $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow t}} U_\varepsilon(x) = se^{-kt} e^{-tM^{-1}D} M^{-1}$. Оскільки

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x) &= e^{-k\varepsilon x} R_\varepsilon[x-s, x], \text{ то } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \\ \varepsilon x \rightarrow t}} R_\varepsilon([x-s, x]) = \\ &= e^{kt} se^{-kt} e^{-tM^{-1}D} M^{-1} = se^{-tM^{-1}D} M^{-1}, \text{ що доводить} \\ &\text{теорему 1.} \end{aligned}$$

Доведення теореми 2. Достатньо показати,
 що при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$ і для довільної
 числової безпосередньо інтегрованої функції

$$f_\varepsilon(x), \text{ для якої існує границя } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(x) dx = b,$$

$$\text{виконується } f_\varepsilon(x) * H_\varepsilon \rightarrow be^{-tM^{-1}D} M^{-1}.$$

Візьмемо $f_\varepsilon(x) \geq 0$ і покажемо спочатку, що

$$f_\varepsilon * R_\varepsilon(x) \rightarrow be^{-tM^{-1}D} M^{-1} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \varepsilon x \rightarrow t.$$

Аналогічно доведенню теореми 1 можна показати, що $\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \geq 0} R_\varepsilon([x, x+s]) < \infty$ і

$$R_\varepsilon([x, x+s]) \rightarrow se^{-tM^{-1}D} M^{-1} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \varepsilon x \rightarrow t.$$

Для $\delta > 0$ покладемо

$$f_\varepsilon^+(x) = \sup_{n\delta \leq y \leq (n+1)\delta} f_\varepsilon(y), n\delta \leq x \leq (n+1)\delta,$$

$$f_\varepsilon^-(x) = \inf_{n\delta \leq y \leq (n+1)\delta} f_\varepsilon(y), n\delta \leq x \leq (n+1)\delta.$$

З нерів-
 ності $f_\varepsilon^-(x) \leq f_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon^+(x)$ випливає, що
 $f_\varepsilon^- * R_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon * R_\varepsilon(x) \leq f_\varepsilon^+ * R_\varepsilon(x)$. Функції

$f_\varepsilon^+(x)$ і $f_\varepsilon^-(x)$ є сталими на інтервалах
 $(n\delta; (n+1)\delta)$, $n \in \mathbb{N}$, а отже

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f_\varepsilon^+(x-y) R_\varepsilon(dy) = \\ &= \sum_{0 \leq k < \frac{x}{\delta}} f_\varepsilon^+(k\delta) R_\varepsilon((x-k\delta-\delta; x-k\delta)) = \\ &= \sum_{0 \leq k < \frac{x}{\delta}} f_\varepsilon^+(k\delta) \delta e^{-tM^{-1}D} M^{-1} + \\ &+ \sum_{0 \leq k < \frac{x}{\delta}} f_\varepsilon^+(k\delta) (R_\varepsilon((x-k\delta-\delta; x-k\delta)) - \delta e^{-tM^{-1}D} M^{-1}). \end{aligned}$$

Позначимо через $\rho_k(\varepsilon, x, t)$ норму матриці

$$R_\varepsilon((x-k\delta-\delta; x-k\delta)) - \delta e^{-tM^{-1}D} M^{-1} \text{ і зауважимо,}$$

що за теоремою 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$

маємо $\rho_k(\varepsilon, x, t) \rightarrow 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$\sup_{k \geq 0} \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \geq 0} \rho_k(\varepsilon, x, t) < \infty.$$

З того, що $f_\varepsilon(x)$ є рівномірно безпосередньо інтегрованою за Ріманом, випливає

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k < \frac{x}{\delta}} f_\varepsilon^+(k\delta) \delta e^{-iM^{-1}D} M^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_\varepsilon^+(k\delta) \delta e^{-iM^{-1}D} M^{-1}.$$

Для довільного $m \in \mathbb{N}$, завдяки умові

$$\sup_{k \geq 0} \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \geq 0} \rho_k(\varepsilon, x, t) < \infty, \text{ маємо}$$

$$\sum_{0 \leq k < \frac{x}{\delta}} f_\varepsilon^+(k\delta) \rho_k(\varepsilon, x, t) \leq \sum_{k=0}^m f_\varepsilon^+(k\delta) \rho_k(\varepsilon, x, t) +$$

$$+ A \sum_{k=m}^{\infty} f_\varepsilon^+(k\delta),$$

де $A > 0$ – деяка стала.

Легко бачити, що $\sum_{k=0}^m f_\varepsilon^+(k\delta) \rho_k(\varepsilon, x, t) \rightarrow 0$,

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$. Оскільки функції $f_\varepsilon(x)$ є рівномірно безпосередньо інтегровані за

Ріманом, то величину $A \sum_{k=m}^{\infty} f_\varepsilon^+(k\delta)$ можна

зробити як завгодно малою за рахунок вибору числа m . Отже, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$ отримуємо

$$(f_\varepsilon^+ * R_\varepsilon(x) - \delta \sum_{n=0}^{\infty} f_\varepsilon^+(n\delta) e^{-iM^{-1}D} M^{-1}) \rightarrow 0.$$

Аналогічно,

$$(f_\varepsilon^- * R_\varepsilon(x) - \delta \sum_{n=0}^{\infty} f_\varepsilon^-(n\delta) e^{-iM^{-1}D} M^{-1}) \rightarrow 0.$$

Завдяки рівномірній безпосередній інтегрованості за Ріманом функції $f_\varepsilon(x)$, для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується

$$\delta \sum_{n=0}^{\infty} |f_\varepsilon^+(n\delta) - f_\varepsilon^-(n\delta)| < \delta. \text{ З очевидної нерівності}$$

$$\delta \sum_{n=0}^{\infty} f_\varepsilon^-(n\delta) \leq \int_0^x f_\varepsilon(x) dx \leq \delta \sum_{n=0}^{\infty} f_\varepsilon^+(n\delta) \text{ і з вище}$$

доведеного отримуємо ($\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$)

$$\limsup f_\varepsilon * R_\varepsilon(x) \leq (b + \delta) e^{-iM^{-1}D} M^{-1},$$

$$\liminf f_\varepsilon * R_\varepsilon(x) \geq (b - \delta) e^{-iM^{-1}D} M^{-1}.$$

Оскільки $\delta > 0$ – довільне, то при $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$x \rightarrow \infty \text{ і } \varepsilon x \rightarrow t \text{ маємо } f_\varepsilon * R_\varepsilon(x) \rightarrow b e^{-iM^{-1}D} M^{-1}.$$

Покажемо зараз, що при виконанні умови (7), $f_\varepsilon * H_\varepsilon(x) \rightarrow b e^{-iM^{-1}C} M^{-1}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$. Нехай $f_\varepsilon^+(x)$ та $f_\varepsilon^-(x)$, такі як вище. Аналогічно, як в [3], при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, $\varepsilon x \rightarrow t$ отримуємо

$$(f_\varepsilon^+ * H_\varepsilon(x) - \delta \sum_{n=0}^{\infty} f_\varepsilon^+(n\delta) e^{-iM^{-1}C} M^{-1}) \rightarrow 0.$$

Оскільки

$$f_\varepsilon * H_\varepsilon(x) = f_\varepsilon^+ * H_\varepsilon(x) - (f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon) * H_\varepsilon(x),$$

$$|(f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon) * H_\varepsilon(x)| \leq (f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon) * R_\varepsilon(x),$$

$$|(f_\varepsilon - f_\varepsilon^-) * H_\varepsilon(x)| \leq (f_\varepsilon - f_\varepsilon^-) * R_\varepsilon(x), \text{ то при}$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, x \rightarrow \infty, \varepsilon x \rightarrow t \text{ маємо}$$

$$\limsup |(f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon) * H_\varepsilon(x)| \leq b e^{-iM^{-1}D} M^{-1}. \text{ Звідси,}$$

$$\limsup |f_\varepsilon * H_\varepsilon(x) - \int_0^x f_\varepsilon(x) dx e^{-iM^{-1}C} M^{-1}| \leq$$

$\leq \delta |e^{-iM^{-1}C} M^{-1}| + \delta e^{-iM^{-1}D} M^{-1} \leq 2\delta e^{-iM^{-1}D} M^{-1}$, а завдяки довільності δ , отримуємо потрібне твердження.

Щоб позбутися умови (7), використаємо метод описаний при доведенні теореми 1.

$$\bar{z}_\varepsilon(x) = \bar{f}_\varepsilon(x) + \int_0^x G_\varepsilon(dy) \bar{z}_\varepsilon(x-y), \quad x \geq 0,$$

$$\bar{f}_\varepsilon(x) = (f_1^\varepsilon(x), \dots, f_n^\varepsilon(x), \dots)',$$

$$\bar{z}_\varepsilon(x) = (z_1^\varepsilon(x), \dots, z_n^\varepsilon(x), \dots)',$$

то теорема 2 дає асимптотичну поведінку розв'язку цієї системи.

Список використаних джерел

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т.1: Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
3. Куця П.П. Многомерные теоремы типа восстановления и их применения к регенерирующим случайным процессам // Дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1990. – 103 с.

Надійшла до редакції

УДК 681.3.062

Надія Д. Кахута*

Критерії ін'єктивності бінарних відношень

Розглядаються критерії ін'єктивності бінарних відношень та критерії ін'єктивності об'єднання ін'єктивних бінарних відношень.

Ключові слова: бінарне відношення, ін'єктивність, критерії ін'єктивності.

*E-mail: v.kahuta@infoplus.com.ua

Стаття присвячена критеріям ін'єктивності бінарних відношень, а також критеріям ін'єктивності об'єднання ін'єктивних бінарних відношень. Вибір саме цього об'єкту дослідження обумовлений, по-перше, його загальнозначністю та, по-друге, природним застосуванням в теорії реляційних баз даних при дослідженні табличних алгебр, побудованих на основі відомих реляційних алгебр Кодда [1-3; 4, підрозд. 1.3].

Властивості ін'єктивних відношень безпосередньо використовуються при дослідженні такої сигнатурної операції табличних алгебр як перейменування [4, підрозд. 2.14-2.15].

Робота продовжує цикл робіт [5-6], присвячених дослідженню загальнозначних теоретико-множинних конструкцій, які використовуються в теорії реляційних баз даних.

Головний результат роботи полягає в встановленні критерію ін'єктивності об'єднання ін'єктивних бінарних відношень за умови сумісності цих відношень (твердження 3).

Всі не означувані тут поняття та позначення використовуються в смислі саме робіт [5-6]. Наведемо тільки означення ін'єктивності: бінарне відношення U назовемо ін'єктивним, якщо для всіх елементів x, y, z виконується імплікація $\langle x, y \rangle \in U \& \langle z, y \rangle \in U \Rightarrow x = z$.

В [5, твердження 1] був відмічений простий зв'язок між функціональними та ін'єктивними відношеннями: відношення U – функціонально тоді і тільки тоді, коли обернене відношення U^{-1} ін'єктивно.

Для встановлення подальшого критерію ін'єктивності відношень знадобиться наступна лема.

Лема 1. Виконується твердження

$$\forall XY (X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (U[X] \cap U[Y] = \emptyset \Rightarrow X \cap Y = \emptyset))$$

Доведення. Розглянемо дві довільні множини

Nadiy D. Kakhuta*

Criteria of binary relations injectivity

The criteria of binary relations injectivity and the criteria of injectivity of injective binary relations union are considered.

Key Words: binary relation, injectivity, injectivity criteria.

X, Y , такі, що $X, Y \subseteq \pi_1^2 U$ та $U[X] \cap U[Y] = \emptyset$; покажемо, що тоді виконується рівність $X \cap Y = \emptyset$.

Оскільки $U[X \cap Y] \subseteq U[X] \cap U[Y]$ (згідно з [5, твердження 2, п. 2]) та $U[X] \cap U[Y] = \emptyset$ за припущенням, то $U[X \cap Y] = \emptyset$. Тоді згідно з критерієм порожності повного образу (п. 6 того ж твердження 2 з [5]) $X \cap Y \cap \pi_1^2 U = \emptyset$; звідси, оскільки за припущенням $X, Y \subseteq \pi_1^2 U$, випливає шукана рівність $X \cap Y = X \cap Y \cap \pi_1^2 U = \emptyset$. $\square$

Зробимо два загальних зауваження щодо доведеної леми: по-перше, прості приклади показують, що зняти обмеження на множини вигляду $X, Y \subseteq \pi_1^2 U$, взагалі кажучи, не можна (тобто не можна розширити область дії кванторів загальності, найпростіший приклад – це випадок порожнього відношення U); по-друге, як буде показано далі, імплікація леми $U[X] \cap U[Y] = \emptyset \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ обертається для ін'єктивних і тільки для ін'єктивних відношень (причому в даному випадку область дії кванторів можна розширити: множини X, Y довільні).

Всюди далі з метою спрощення позначень повні образи одноелементних множин вигляду $U[\{x\}]$ будемо позначати через $U[x]$.

Твердження 1 (критерії ін'єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

$$U \text{ – ін'єктивне відношення,} \quad (1)$$

$$\forall XY (X \cap Y = \emptyset \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \emptyset), \quad (2)$$

$$\forall xy (x \neq y \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \emptyset), \quad (3)$$

$$\forall XY (X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (U[X] \cap U[Y] = \emptyset \Rightarrow X \cap Y = \emptyset)), \quad (4)$$

$$\forall xy(x, y \in \pi_1^2 U \Rightarrow (U[x] \cap U[y] = \emptyset \Leftrightarrow x \neq y)) \quad (5)$$

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

Імплікація $(1) \Rightarrow (2)$ встановлюється від супротивного: нехай U ін'єктивне відношення, але існують множини X, Y , такі, що $X \cap Y = \emptyset$ та $U[X] \cap U[Y] \neq \emptyset$. Тоді існує елемент z , такий, що $z \in U[X] \cap U[Y]$; з означення повного образу випливає, що існують елементи x, y , такі, що $x \in X, y \in Y$ та $\langle x, z \rangle \in U, \langle y, z \rangle \in U$. Оскільки множини X, Y не перетинаються, то елементи x, y різні, а це суперечить ін'єктивності відношення U .

Імплікація $(2) \Rightarrow (3)$ тривіальна, оскільки, змістовно кажучи, в твердженні (3) область дії кванторів загальності з твердження (2) просто звужується на одноелементні множини.

Встановимо імплікацію $(3) \Rightarrow (4)$. Нехай виконується імплікація (3), розглянемо довільні множини X, Y , такі, що $X, Y \subseteq \pi_1^2 U$. Імплікація $U[X] \cap U[Y] = \emptyset \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$ виконується згідно з лемою 1 і тому залишається встановити лише обернену імплікацію $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \emptyset$. Далі доведення проводиться від супротивного аналогічно доведенню імплікації $(1) \Rightarrow (2)$.

Дійсно, нехай $X \cap Y = \emptyset$, але $U[X] \cap U[Y] \neq \emptyset$. Тоді існує елемент z , такий, що $z \in U[X] \cap U[Y]$; звідси випливає, що існують елементи x, y , такі, що $x \in X, y \in Y$ та $\langle x, z \rangle \in U, \langle y, z \rangle \in U$. Оскільки множини X, Y не перетинаються, то елементи x, y різні; отже згідно з твердженням (3) має місце рівність $U[x] \cap U[y] = \emptyset$. З іншого боку $z \in U[x] \cap U[y]$ – прийшли до протиріччя.

Імплікація $(4) \Rightarrow (5)$ тривіальна, оскільки, змістовно кажучи, в твердженні (5) область дії кванторів загальності з твердження (4) просто звужується на одноелементні множини (повністю аналогічно як при доведенні імплікації $(2) \Rightarrow (3)$).

Останню імплікацію $(5) \Rightarrow (1)$ встановимо від супротивного: нехай виконується твердження (5), але відношення U не є ін'єктивним. Тоді згідно з означенням існують елементи x, y, z , такі, що $\langle x, z \rangle \in U, \langle y, z \rangle \in U$, причому $x \neq y$. Звідси випливає, що $z \in U[x] \cap U[y]$, тобто останній перетин $U[x] \cap U[y]$ непорожній. Але

згідно з твердженням (5) та з огляду те, що $x \neq y$, виконується рівність $U[x] \cap U[y] = \emptyset$; отже прийшли до протиріччя. $\square$

Прокоментуємо доведені критерії ін'єктивності. Твердження (2) – “базовий” критерій ін'єктивності, твердження (3) отримується з (2) обмеженням області дії кванторів загальності на одноелементні множини; нарешті, якщо в твердженні (2) (відповідно (3)) обмежити область дії кванторів загальності підмножинами проєкції $\pi_1^2 U$ (відповідно елементами проєкції $\pi_1^2 U$), то імплікація цього твердження $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \emptyset$ (відповідно $x \neq y \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \emptyset$) обертається. Як зазначалося вище, для обернення імплікацій суттєве звуження області дії кванторів загальності.

Крім того, аналіз доведення твердження 1 та врахування леми 1 показує, що виконується і наступні критерії ін'єктивності відношень.

Твердження 1' (критерії ін'єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

U – ін'єктивне відношення,

$$\forall XY(X, Y \subseteq \pi_1^2 U \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset \Rightarrow U[X] \cap U[Y] = \emptyset)) \quad (4')$$

$$\forall xy(x, y \in \pi_1^2 U \Rightarrow (x \neq y \Rightarrow U[x] \cap U[y] = \emptyset)) \quad (5')$$

Доведення проводиться повністю аналогічно твердженню 1. $\square$

Твердження (4') простіше твердження (4), оскільки, по-перше, область дії кванторів загальності в ньому звужена, та, по-друге, еквівалентність замінена на одну імплікацію (обернена загальнозначна імплікація з формулювання леми 1 просто вилучена). Ці ж міркування застосовні і до твердження (5').

Очевидно, властивість ін'єктивності не зберігається при об'єднанні ін'єктивних відношень (аналогічно властивості функціональності при об'єднанні функціональних відношень, див., [6, лема 1]).

В наступному твердженні наведений критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень. При цьому будемо спиратися на зв'язок між функціональними на ін'єктивними відношеннями та на критерій функціональності об'єднання функціональних відношень в термінах відношення сумісності відношень $\approx$ ([6, лема 1, п. 1]).

Твердження 2 (критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних відношень). Нехай U_1, U_2 ін'єктивні відношення. Тоді виконується екви-

валентність: $U_1 \cup U_2$ ін'єктивно $\Leftrightarrow U_1^{-1} \approx U_2^{-1}$. $\square$

Доведення. Згідно з [5, твердження 1] відношення є ін'єктивним тоді і тільки тоді, коли обернене відношення є функціональним; крім того, згідно з [6, лема 1, п. 1] об'єднання двох функцій є функцією тоді і тільки тоді, коли ці функції сумісні. Отже, маємо ланцюжок еквівалентностей:

$$\begin{aligned} U_1 \cup U_2 \text{ ін'єктивно} &\Leftrightarrow (U_1 \cup U_2)^{-1} \text{ функціонально} \\ &\Leftrightarrow U_1^{-1} \cup U_2^{-1} \text{ функціонально} \\ &\Leftrightarrow U_1^{-1} \approx U_2^{-1}. \end{aligned}$$

В другому переході скористалися дистрибутивністю взяття оберненого відношення відносно об'єднань, в третьому – функціональністю відношень U_1^{-1}, U_2^{-1} (що випливає з ін'єктивності вихідних відношень). $\square$

З доведення останнього твердження випливає, що цей критерій по суті є переформулюванням критерію функціональності об'єднання функцій.

Спростимо критерій твердження 2 за рахунок додаткової умови сумісності ін'єктивних відношень, які об'єднуються. Для доведення спрощеного критерію знадобиться наступна лема.

Лема 2. Нехай U_1, U_2 сумісні відношення, покладемо $X \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^2 U_1 \cap \pi_1^2 U_2$. Тоді виконуються твердження

$$\forall Y (Y \subseteq X \Rightarrow U_1[Y] = U_2[Y]), \quad (6)$$

$$\forall Y (Y \subseteq X \Rightarrow U_1|Y = U_2|Y). \quad (7)$$

Доведення. Почнемо з твердження (6). Нехай Y довільна підмножина множини X (отже $Y = X \cap Y$). Застосовуючи рівність $(U|Z_1)[Z_2] = U[Z_1 \cap Z_2]$ ([5, твердження 6, п. 10]) та сумісність відношень U_1, U_2 (тобто рівність $U_1|X = U_2|X$), маємо ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} U_1[Y] &= U_1[X \cap Y] = (U_1|X)[Y] = \\ &= (U_2|X)[Y] = U_2[X \cap Y] = U_2[Y]. \end{aligned}$$

Встановимо твердження (7). Нехай знову Y довільна підмножина множини X . За означенням сумісності відношень виконується рівність $U_1|X = U_2|X$; візьмемо обмеження від обох частин останньої рівності за множиною Y , тоді маємо рівність $(U_1|X)|Y = (U_2|X)|Y$. Залишається використати рівності та

$(U_2|X)|Y = U_2|(X \cap Y) = U_2|Y$ ([5, твердження 6, п. 5] про композицію обмежень).

Отже шукана рівність $U_1|Y = U_2|Y$ доведена. $\square$

Встановлена лема має дуже просту змістовну інтерпретацію: оскільки відношення U_1, U_2 сумісні, тобто вони "ведуть себе однаконо" на множині X (яка є перетином проєкцій за першою компонентою цих відношень), то вказані відношення "ведуть себе однаконо" і на довільній підмножині множини X .

Сформулюємо спрощений критерій.

Твердження 3 (критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних відношень). Нехай U_1, U_2 ін'єктивні сумісні відношення (тобто $U_1 \approx U_2$). Тоді виконується еквівалентність

$$\begin{aligned} U_1 \cup U_2 \text{ ін'єктивно} &\Leftrightarrow \\ U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] &= \emptyset. \quad \square \end{aligned}$$

Доведення почнемо з необхідності. Отже, нехай об'єднання $U_1 \cup U_2$ ін'єктивно. Використовуючи дистрибутивність повного образу ([5, твердження 2, п. 2) та критерій порожності повного образу (п. 6 то ж самого твердження 2), маємо ланцюжок рівностей

$$\begin{aligned} (U_1 \cup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] &= \\ = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cup U_2[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] &= \\ = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2]. \end{aligned}$$

В останньому переході скористалися тим, що $U_2[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = \emptyset$, оскільки $\pi_1^2 U_2 \cap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2) = \emptyset$. Таким чином, маємо рівність

$$(U_1 \cup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] = U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2]. \quad (8)$$

Рівність

$$(U_1 \cup U_2)[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] \quad (9)$$

перевіряється повністю аналогічно (відношення U_1, U_2 просто міняються ролями).

Оскільки множини $\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2$ та $\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1$ не перетинаються, а відношення $U_1 \cup U_2$ ін'єктивно за припущенням, то згідно з критерієм ін'єктивності (твердження 1, формула (2)) маємо рівність

$$(U_1 \cup U_2)[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap \\ \cap (U_1 \cup U_2)[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \emptyset.$$

Використовуючи встановлені рівності (8) та (9), приходимо до шуканої рівності

$$U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \emptyset.$$

Зауважимо, що при доведенні необхідності сумісності відношень не використовувалась.

Доведемо достатність. Нехай U_1, U_2 ін'єктивні сумісні відношення та виконується рівність $U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \emptyset$; покажемо, що об'єднання $U_1 \cup U_2$ є ін'єктивним, спираючись на критерій ін'єктивності з твердження 1', а саме на формулу (4').

Почнемо з знаходження проєкції за першою компонентою відношення $U_1 \cup U_2$. Оскільки проєкція дистрибутивна відносно об'єднань, то $\pi_1^2(U_1 \cup U_2) = \pi_1^2 U_1 \cup \pi_1^2 U_2$. А тепер розглянемо дві довільні множини X, Y , такі, що $X, Y \subseteq \pi_1^2 U_1 \cup \pi_1^2 U_2$ та $X \cap Y = \emptyset$.

Очевидно, що $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, де $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} X \cap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2)$, $X_2 \stackrel{\text{def}}{=} X \cap \pi_1^2 U_1 \cap \pi_1^2 U_2$ та $X_3 \stackrel{\text{def}}{=} X \cap (\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1)$. Очевидно також, що множини X_1, X_2, X_3 не перетинаються, тобто йдеться про розбиття множини X .

Повністю аналогічно: очевидно, що $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$, де $Y_1 \stackrel{\text{def}}{=} Y \cap (\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2)$, $Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} Y \cap \pi_1^2 U_1 \cap \pi_1^2 U_2$ та $Y_3 \stackrel{\text{def}}{=} Y \cap (\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1)$; причому множини Y_1, Y_2, Y_3 не перетинаються; тобто знову йдеться про розбиття на цей раз множини Y .

Оскільки множини X, Y не перетинаються, то очевидно, що множини $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ формують розбиття об'єднання $X \cup Y$.

Знайдемо повний образ вигляду $(U_1 \cup U_2)[X]$. Використовуючи дистрибутивність повного образу відносно об'єднань, критерій порожності повного образу (з якого випливають рівності $U_2[X_1] = U_1[X_3] = \emptyset$) та рівність (6) леми 2 (а саме $U_1[X_2] = U_2[X_2]$), маємо ланцюжок рівностей

$$(U_1 \cup U_2)[X] = (U_1 \cup U_2)[X_1 \cup X_2 \cup X_3] = \\ = U_1[X_1] \cup U_2[X_1] \cup U_1[X_2] \cup U_2[X_2] \cup \\ \cup U_1[X_3] \cup U_2[X_3] = U_1[X_1] \cup U_1[X_2] \cup U_2[X_3].$$

Отже, встановлена рівність

$$(U_1 \cup U_2)[X] = U_1[X_1] \cup U_1[X_2] \cup U_2[X_3].$$

Аналогічно встановлюється рівність

$$(U_1 \cup U_2)[Y] = U_1[Y_1] \cup U_1[Y_2] \cup U_2[Y_3].$$

Залишається показати порожність перетину повних образів, використовуючи знайдені рівності; згідно з стандартними теоретико-множинними співвідношеннями, маємо ланцюжок рівностей:

$$(U_1 \cup U_2)[X] \cap (U_1 \cup U_2)[Y] = (U_1[X_1] \cup U_1[X_2] \cup \\ \cup U_2[X_3]) \cap (U_1[Y_1] \cup U_1[Y_2] \cup U_2[Y_3]) = (U_1[X_1] \cap \\ \cap U_1[Y_1]) \cup (U_1[X_1] \cap U_1[Y_2]) \cup (U_1[X_1] \cap \\ \cap U_2[Y_3]) \cup (U_1[X_2] \cap U_1[Y_1]) \cup (U_1[X_2] \cap \\ \cap U_1[Y_2]) \cup (U_1[X_2] \cap U_2[Y_3]) \cup (U_2[X_3] \cap \\ \cap U_1[Y_1]) \cup (U_2[X_3] \cap U_1[Y_2]) \cup (U_2[X_3] \cap U_2[Y_3]) = \\ = (U_1[X_1] \cap U_2[Y_3]) \cup (U_2[X_3] \cap U_1[Y_1]).$$

Вище використали рівності

$$U_1[X_1] \cap U_1[Y_1] = \emptyset, U_1[X_1] \cap U_1[Y_2] = \emptyset,$$

$$U_1[X_2] \cap U_1[Y_1] = \emptyset, U_1[X_2] \cap U_1[Y_2] = \emptyset, \\ U_1[X_2] \cap U_2[Y_3] = U_2[X_2] \cap U_2[Y_3] = \emptyset$$

та

$$U_2[X_3] \cap U_1[Y_2] = U_2[X_3] \cap U_2[Y_2] = \\ = \emptyset, U_2[X_3] \cap U_2[Y_3] = \emptyset,$$

які випливають, по-перше, з ін'єктивності відношень U_1, U_2 , по-друге, того факту, що множини $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ попарно не перетинаються, а також, по-третє, з формули (2). Крім того застосовувалась сумісність відношень, включення $X_2, Y_2 \subseteq X$ та рівність (6) з леми 2 (наприклад, рівність $U_1[X_2] \cap U_2[Y_3] = U_2[X_2] \cap U_2[Y_3]$ отримується саме так).

Отже, маємо рівність

$$(U_1 \cup U_2)[X] \cap (U_1 \cup U_2)[Y] = \\ (U_1[X_1] \cap U_2[Y_3]) \cup (U_2[X_3] \cap U_1[Y_1]).$$

Тепер врахуємо наступне включення (верхню оцінку останнього об'єднання)

$$(U_1[X_1] \cap U_2[Y_3]) \cup (U_2[X_3] \cap U_1[Y_1]) \subseteq \\ \subseteq U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1],$$

яке випливає з означень множин X_1, X_3, Y_1, Y_3 та з монотонності повного образу ([5, твердження 2, п. 1]). З цього включення та рівності

$U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \emptyset$, яка виконується за припущенням, впливає шукана рівність $(U_1 \cup U_2)[X] \cap (U_1 \cup U_2)[Y] = \emptyset$.

Зважаючи на довільність множин X, Y залишається застосувати критерій ін'єктивності відношень – формулу (4') з твердження 1'. $\square$

Як було зазначено в доведенні останнього твердження, рівність

$$U_1[\pi_1^2 U_1 \setminus \pi_1^2 U_2] \cap U_2[\pi_1^2 U_2 \setminus \pi_1^2 U_1] = \emptyset$$

є необхідною умовою ін'єктивності об'єднання ін'єктивних функцій. Але, як показує наступний простий приклад, зазначена рівність не є в загальному випадку достатньою умовою (тобто, зважаючи на твердження 3, ця рівність є достатньою умовою тільки за умови сумісності ін'єктивних відношень, що об'єднуються).

Розглянемо два відношення

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \} \text{ та}$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle \}, \text{ де елементи}$$

x_1, y_1, x_2, y_2 попарно різні (див. рис. 1, на якому жирні стрілки відповідають відношенню V).

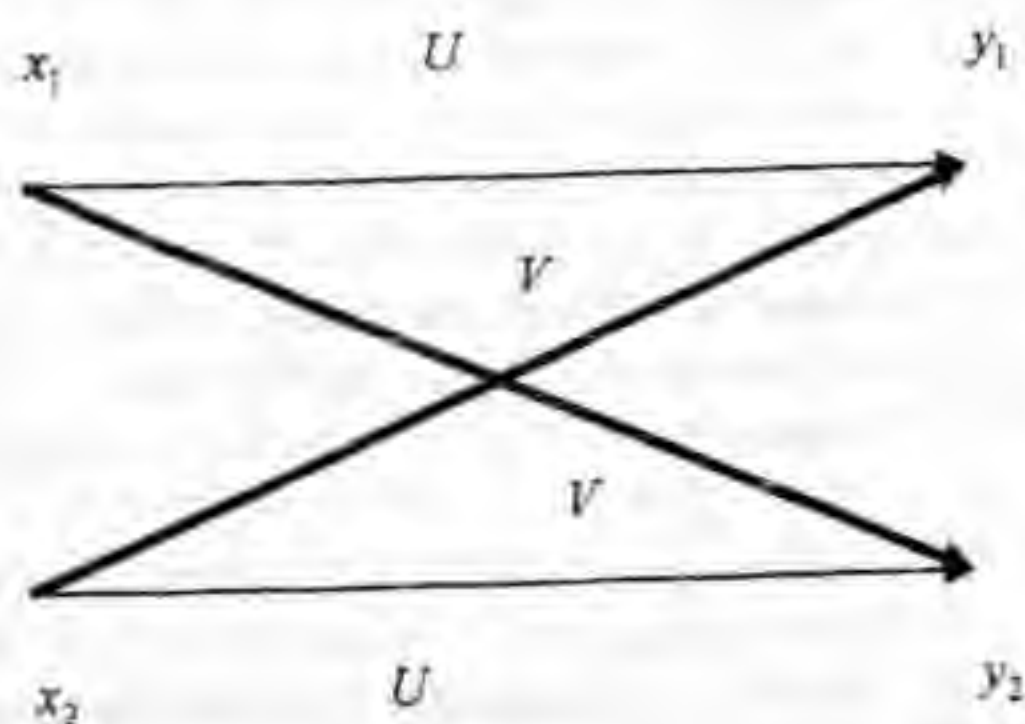


Рис. 1. Приклад несумісних ін'єктивних відношень, таких, що виконується рівність $U[\pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V] \cap V[\pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U] = \emptyset$, але їхнє об'єднання не є ін'єктивним

Очевидно, що самі відношення ін'єктивні, а їхнє об'єднання – ні. Так як ці відношення мають однакові проєкції за першою компонентою і повний образ зберігає порожню множину, то рівність $U[\pi_1^2 U \setminus \pi_1^2 V] \cap V[\pi_1^2 V \setminus \pi_1^2 U] = \emptyset$ тривіально виконується. Причина неін'єктивності об'єднання $U \cup V$ полягає в тому, що ці відношення несумісні.

З доведеного критерію безпосередньо впливає наслідок для функцій.

Наслідок 1 (критерій ін'єктивності об'єднання ін'єктивних сумісних функцій). Нехай f_1, f_2 ін'єктивні сумісні функції (тобто $f_1 \approx f_2$). Тоді виконується еквівалентність

$$\text{функція } f_1 \cup f_2 \text{ ін'єктивна} \Leftrightarrow f_1[\text{dom} f_1 \setminus \text{dom} f_2] \cap f_2[\text{dom} f_2 \setminus \text{dom} f_1] = \emptyset. \square$$

Саме цей критерій (для випадку функцій) був наведений в [4, підрозд. 1.3, твердження 1.3.3, п. 1]; зауважимо, що в [4] сумісність функцій була потрібна для забезпечення функціональності об'єднання (ін'єктивних) функцій.

Отже, можна зробити висновок, що твердження 3 є узагальненням для відношень пункту 1 твердження 1.3.3 з [4, підрозділ 1.3, с. 25]; причому твердження 3 з прикладом, наведеним після його доведення, висвітлює роль відношення сумісності відношень.

Наведемо ще один критерій ін'єктивності відношень.

Твердження 4 (критерій ін'єктивності відношень). Наступні твердження еквівалентні:

$$U \text{ – ін'єктивне відношення}, \quad (10)$$

$$\forall x \forall X (x \in X \Rightarrow U[x] \cap U[X] = \emptyset), \quad (11)$$

$$\forall x \forall X (x \in \pi_1^2 U \Rightarrow (x \in X \Leftrightarrow U[x] \cap U[X] = \emptyset)). \square \quad (12)$$

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(10) \Rightarrow (11) \Rightarrow (12) \Rightarrow (10)$. Імплікацію $(10) \Rightarrow (11)$ можна встановити безпосередньо від супротивного, але простіше скористатися формулою (2) твердження 1: дійсно, треба тільки використати тривіальну еквівалентність $x \in X \Leftrightarrow \{x\} \cap X = \emptyset$.

Встановимо імплікацію $(11) \Rightarrow (12)$: нехай виконується формула (11), розглянемо довільну множину X , довільний елемент x з проєкції $\pi_1^2 U$ та встановимо еквівалентність $x \in X \Leftrightarrow U[x] \cap U[X] = \emptyset$.

Імплікація $x \in X \Rightarrow U[x] \cap U[X] = \emptyset$ випливає з істинності (11), встановимо від супротивного обернену імплікацію $U[x] \cap U[X] = \emptyset \Rightarrow x \in X$. Дійсно, нехай $U[x] \cap U[X] = \emptyset$, але $x \in X$. Оскільки $x \in \pi_1^2 U$, то існує елемент y , такий, що $\langle x, y \rangle \in U$. Очевидно, що $y \in U[x] \cap U[X]$, що суперечить порожності цієї множини.

Нарешті, імплікацію $(12) \Rightarrow (10)$ перевіримо від супротивного: нехай виконується формула

(12), але відношення U не є ін'єктивним, тобто існують елементи x, z, y , такі, що $x \neq z$ і $\langle x, y \rangle, \langle z, y \rangle \in U$. Тоді очевидно, що $x \in \pi_1^2 U$, $x \notin \{z\}$ та $U[x] \cap U[\{z\}] \neq \emptyset$; а це суперечить формулі (12). $\square$

Застосуємо доведений критерій до функцій та безпосередньо отримуємо наступний добре відомий в літературі критерій ін'єктивності функцій (в обох частинах еквівалентності з (12) треба перейти до заперечень).

Наслідок 2 (критерій ін'єктивності функцій).
Наступні твердження еквівалентні:

f – ін'єктивна функція,

$$\forall x \forall X (x \in \text{dom} f \Rightarrow (x \in X \Leftrightarrow f(x) \in f[X])). \quad (13)$$

Зауважимо, що наведені критерії ін'єктивності відношень та функцій можна дещо спростити, вилучаючи в еквівалентностях загальнозначні імплікації; на цьому шляху еквівалентності формул (12), (13) переходять, відповідно, в імплікації нижченаведених формул (12'), (13').

$$\forall x \forall X (x \in \pi_1^2 U \Rightarrow (U[x] \cap U[X] \neq \emptyset \Rightarrow x \in X)) \quad (12')$$

$$\forall x \forall X (x \in \text{dom} f \Rightarrow (f(x) \in f[X] \Rightarrow x \in X)) \quad (13')$$

Наведемо ще декілька критеріїв ін'єктивності відношень.

Твердження 5 (критерії ін'єктивності відношень в термінах обмежень). Наступні твердження еквівалентні:

$$U \text{ – ін'єктивне відношення,} \quad (14)$$

$$\forall Z (U|Z \text{ – ін'єктивне відношення}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \forall Z (Z \text{ – скінченна множина} \Rightarrow \\ \Rightarrow U|Z \text{ – ін'єктивне відношення}). \end{aligned} \quad (16)$$

Доведення. Встановимо ланцюжок імплікацій $(14) \Rightarrow (15) \Rightarrow (16) \Rightarrow (14)$ та почнемо з першої. Нехай відношення U ін'єктивно, Z – довільна множина; покажемо, що обмеження $U|Z$ також ін'єктивно. Для цього скористаємось формулою (2) з твердження 1 (критерій ін'єктивності відношень). Отже нехай X, Y довільні множини, що не перетинаються; треба показати, що повні образи $(U|Z)[X]$ та $(U|Z)[Y]$ також не перетинаються.

Застосовуючи рівність $(U|Z_1)[Z_2] = U[Z_1 \cap Z_2]$ ([5, твердження 6,

п. 10]) маємо рівності $(U|Z)[X] = U[Z \cap X]$ та $(U|Z)[Y] = U[Z \cap Y]$; залишається врахувати, по-перше, ін'єктивність відношення U ; по-друге, той факт, що множини $Z \cap X$ і $Z \cap Y$ не перетинаються; та, по-третє, знову застосувати формулу (2). $\square$

Імплікація $(15) \Rightarrow (16)$ тривіальна, тому залишається перевірити імплікацію $(16) \Rightarrow (14)$; зробимо це від супротивного: нехай виконується формула (16), але відношення U не є ін'єктивним, тобто існують елементи x, z, y , такі, що $x \neq z$ та $\langle x, y \rangle, \langle z, y \rangle \in U$. Звідси випливає, що обмеження $U|\{x, z\}$ не є ін'єктивним всупереч припущенню (16). $\square$

Література

1. Редько В. Н., Буй Д. Б. К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №4. – С. 3-12.
2. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б. Реляционные алгебры: операции проекции и соединения // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №4. – С. 89-100.
3. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б. Реляционные алгебры: операции деления и переименования // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – №5. – С. 3-15.
4. Редько В. Н., Брона Ю. И., Буй Д. Б., Поляков С. А. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2001. – 198 с.
5. Кахута Н. Д., Буй Д. Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
6. Кахута Н. Д., Буй Д. Б. Властивості відношення конфінальності та устрій множини часткових функцій // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 125-135.

Надійшла до редакції

УДК 681.14

Коцовський В.М., асистент УжНУ

Нейромережі прямого поширення з комплексними вагами

В роботі розглядаються нейромережі з комплексними вагами. Наведений алгоритм навчання цих нейромереж, який базується на методі зворотного поширення похибки.

Ключові слова: нейрон, нейромережа, алгоритми навчання, алгоритм зворотного поширення.

*E-mail: cyber@mail.uzhgorod.ua

Нейромережі (НМ) – ефективний інструмент для розв'язування задач апроксимації функцій, прогнозування поведінки динамічних систем, класифікації множини об'єктів по кільком ознакам, розпізнавання образів, асоціативного пошуку та багатьох інших задач. На сучасний момент у нейроінформатиці розроблено багато підходів, які стосуються архітектури НМ з дійсними ваговими коефіцієнтами, вигляду функцій активації нейронів (неперервні або розривні порогового типу) та запропоновано цілий ряд алгоритмів навчання НМ. В даній роботі вводиться поняття комплексного нейрона з неперервно диференційовною функцією активації, розглядаються НМ, побудовані з таких елементів, та описується модифікація відомого алгоритму зворотного поширення для навчання комплексних НМ. При цьому комплексні НМ можуть бути використані як для розв'язування тих самих задач, що й звичайні НМ (із можливим зменшенням кількості входів і виходів мережі), так і для розв'язування задач із специфічними комплексними вхідними і вихідними даними (наприклад наближення функцій комплексної змінної).

Комплексний нейрон (КН) – функціональний елемент із n входами та одним виходом y , який обчислюється наступним чином:

$$y = f\left(\sum_{j=1}^n w_j z_j + w_0\right),$$

де комплексні числа $z_1, \dots, z_n$ – вхідні сигнали, $w_0, w_1, \dots, w_n$ – вагові комплексні коефіцієнти (коефіцієнт w_0 по аналогії до [3] можна назвати порогом КН), $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – нелінійна, неперервна разом із своїми частинними похідними функція, яка називається функцією активації. КН різними способами можна з'єднувати у НМ. Ми

V. M. Kotsovsky, assistant UzhNU

Feedforward neural networks with complex weights

Neural networks with complex weights have been studied in the paper. Learning algorithms based on backpropagation method has been given in the paper.

Key Words: neuron, neural network, learning algorithms, backpropagation.

обмежимося розглядом багат шарових НМ прямого поширення, тобто мереж, які задовольняють наступну умову: нейрони

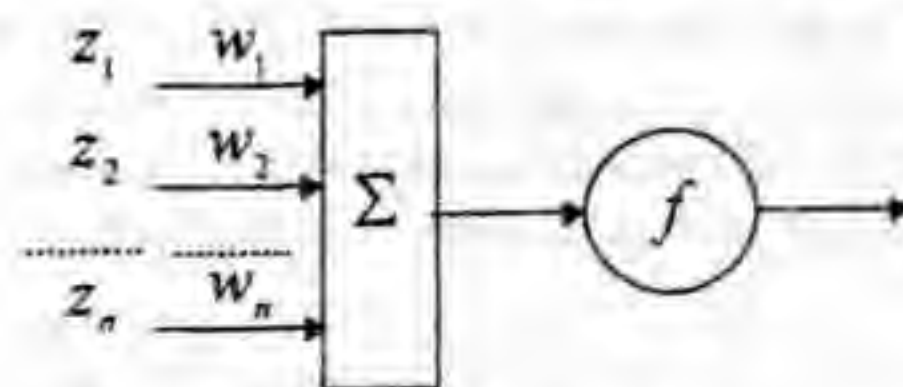


Рис.1. Комплексний нейрон.

кожного шару з'єднуються з нейронами попереднього та наступного шарів по принципу "кожний з кожним". Перший шар називається вхідним, внутрішні – прихованими, останній – вихідним. Робота НМ описується формулами:

$$y_{kl} = f\left(\sum_j w_{jkl} z_{jk} + w_{0kl}\right), \quad x_{k,l+1} = y_{kl},$$

де індекс j позначає номер вхідного нейрона, k – номер вихідного нейрона, l – номер шару, $z_{jk} = x_{jk} + i y_{jk}$ – значення j -го вхідного сигналу k -го нейрона в шарі l , $w_{jkl} = u_{jkl} + i v_{jkl}$ – значення j -го вагового коефіцієнта k -го нейрона в шарі l .

Багат шарова НМ обчислює вихідний вектор $F(z)$ на основі вхідного вектора z . Під алгоритмом навчання НМ з учителем будемо розуміти підбір параметрів мережі (вагових коефіцієнтів w_{jkl}) таким чином, щоб НМ ставила у відповідність вхідним векторам із множини $\{z^1, \dots, z^m\}$ відповідні їм вихідні вектори з множини $\{d^1, \dots, d^m\}$. Сукупність пар $\{(z^1, d^1), \dots, (z^m, d^m)\}$ називається навчальною множиною. Нехай f'_k – значення вихідного сигналу k -го нейрона в

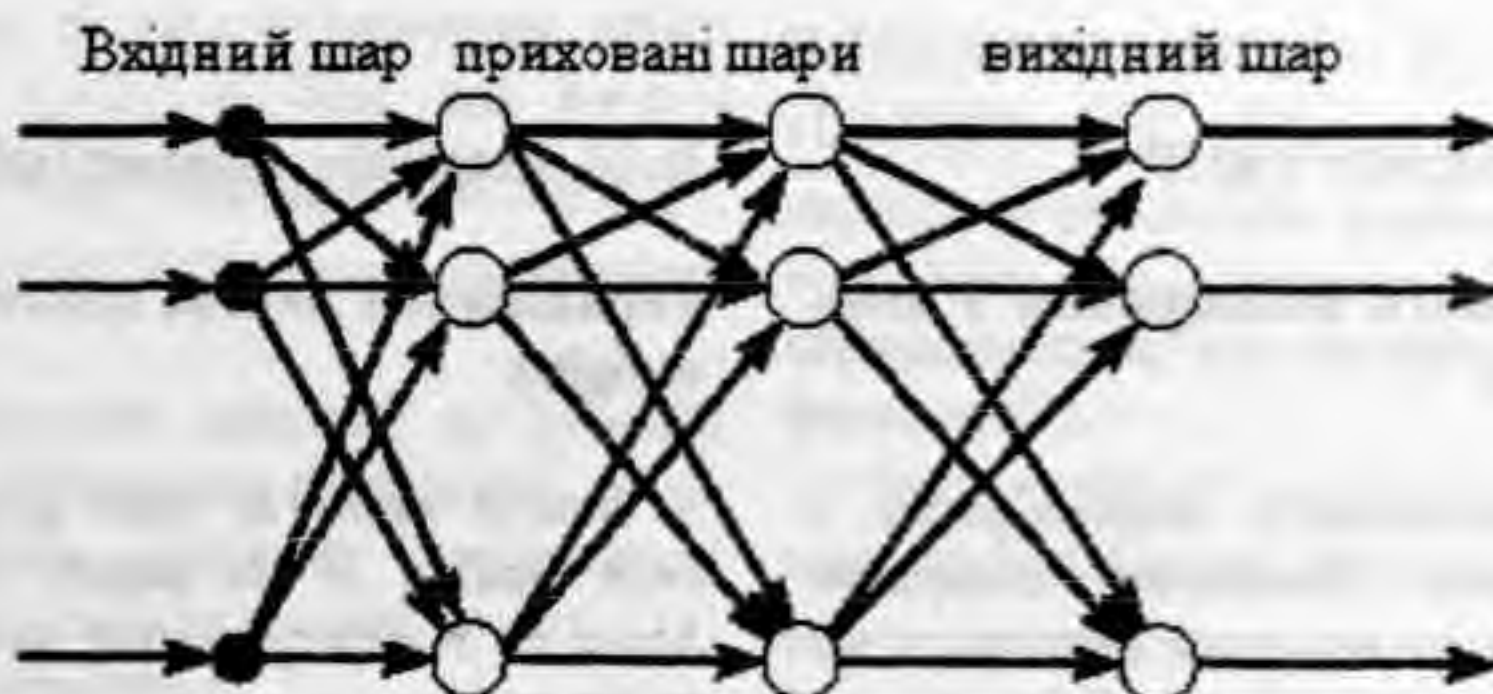


Рис. 2. Багатошарова НМ прямого поширення.

останньому (вихідному) шарі l у випадку, коли на вхід НМ подано вектор z^l . Під побудовою мережі будемо розуміти величину

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \sum_i |f_k^i - d_k^i|^2. \quad (1)$$

Будемо вважати, що $E = E(W) = E(U, V)$, де U – вектор, компонентами якого є дійсні частини всіх вагових коефіцієнтів НМ, V – вектор, компонентами якого є уявні частини всіх вагових

коефіцієнтів НМ. У процесі навчання на кожній ітерації будемо змінювати ваговий вектор у напрямку антиградієнта E :

$$\Delta W^r = -\eta_r \text{grad } E(U^r, V^r), W^{r+1} = W^r + \Delta W^r, \quad (2)$$

де r – номер ітерації.

Нехай $s_{kl}^i = \sum_j w'_{jkl} z'_{jkl} + w'_{0kl}$, $a_{kl}^i = \text{Re } s_{kl}^i$,

$b_{kl}^i = \text{Im } s_{kl}^i$, $f(z) = g(x, y) + i h(x, y)$. Запишемо компоненти градієнта по вагам вихідного шару:

$$\frac{\partial E}{\partial u_{jkl}} = \sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial g_{kl}^i} \left(\frac{\partial g_{kl}^i}{\partial a_{kl}^i} \frac{\partial a_{kl}^i}{\partial u_{jkl}} + \frac{\partial g_{kl}^i}{\partial b_{kl}^i} \frac{\partial b_{kl}^i}{\partial u_{jkl}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h_{kl}^i} \left(\frac{\partial h_{kl}^i}{\partial a_{kl}^i} \frac{\partial a_{kl}^i}{\partial u_{jkl}} + \frac{\partial h_{kl}^i}{\partial b_{kl}^i} \frac{\partial b_{kl}^i}{\partial u_{jkl}} \right) \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v_{jkl}} = \sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial g_{kl}^i} \left(\frac{\partial g_{kl}^i}{\partial a_{kl}^i} \frac{\partial a_{kl}^i}{\partial v_{jkl}} + \frac{\partial g_{kl}^i}{\partial b_{kl}^i} \frac{\partial b_{kl}^i}{\partial v_{jkl}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h_{kl}^i} \left(\frac{\partial h_{kl}^i}{\partial a_{kl}^i} \frac{\partial a_{kl}^i}{\partial v_{jkl}} + \frac{\partial h_{kl}^i}{\partial b_{kl}^i} \frac{\partial b_{kl}^i}{\partial v_{jkl}} \right) \right). \quad (4)$$

Наведемо розрахункові формули для частинних похідних у (3)-(4) (для спрощення запису не будемо вказувати у наступних формулах індекс l):

$$\frac{\partial E}{\partial g_{kl}} = g_{kl} - \text{Re } d_k, \quad \frac{\partial E}{\partial h_{kl}} = h_{kl} - \text{Im } d_k, \quad (5)$$

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_{jkl}} = x_{jkl}, \quad \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_{0kl}} = 1, \quad \frac{\partial b_{kl}}{\partial u_{jkl}} = y_{jkl}, \quad \frac{\partial b_{kl}}{\partial u_{0kl}} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial v_{jkl}} = -y_{jkl}, \quad \frac{\partial a_{kl}}{\partial v_{0kl}} = 0, \quad \frac{\partial b_{kl}}{\partial v_{jkl}} = x_{jkl}, \quad \frac{\partial b_{kl}}{\partial v_{0kl}} = 1. \quad (7)$$

Перейдемо тепер до вибору функції активації. Для дійсних НМ частіше за все застосовується логістична сигмоїда $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ або тангенс гіперболічний $\text{th } x$ (іноді з деякими додатковими параметрами). На жаль, якщо розглядати ці

функції як функції комплексної змінної, то вони є розривними, а тому не можуть бути використані для навчання комплексних НМ. Цих недоліків позбавлена раціональна сигмоїда $f(z) = \frac{z}{|z|+1}$.

Для неї маємо $f(z) = g(x, y) + i h(x, y)$, де

$$g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad h(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}. \quad \text{Слід}$$

зауважити, що значення, які приймає раціональна сигмоїда, лежать всередині одиничного кола з центром у початку координат. Крім того, раціональна сигмоїда пропорційно стискує дійсну і уявну частини вхідного аргументу, і має властивість підсилювати „слабкі” вхідні сигнали і послаблювати „сильні”. Використовуючи раціональну сигмоїду, отримаємо наступні формули для частинних похідних:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial a_{kl}} = \frac{b_{kl}^2 + |s_{kl}|}{(|s_{kl}|+1)^3}, \quad \frac{\partial h_{kl}}{\partial b_{kl}} = \frac{a_{kl}^2 + |s_{kl}|}{(|s_{kl}|+1)^3}, \quad \frac{\partial h_{kl}}{\partial a_{kl}} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial b_{kl}} = -\frac{a_{kl} b_{kl}}{|s_{kl}|(|s_{kl}|+1)^2}. \quad (8)$$

Значення похідних $\frac{\partial E}{\partial u_{jk}}$ і $\frac{\partial E}{\partial v_{jk}}$, розраховані по формулам (3)-(8) дозволяють обчислити корекції Δu_{jk} і Δv_{jk} для нейронів

останнього (зовнішнього) шару. Покажемо, як за їх допомогою можна обчислити корекції вагових коефіцієнтів інших шарів НМ. Для останнього шару маємо:

$$\frac{\partial E}{\partial x_{jk}} = \sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial g'_{ki}} \left(\frac{\partial g'_{ki}}{\partial a'_{ki}} \frac{\partial a'_{ki}}{\partial x_{jk}} + \frac{\partial g'_{ki}}{\partial b'_{ki}} \frac{\partial b'_{ki}}{\partial x_{jk}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h'_{ki}} \left(\frac{\partial h'_{ki}}{\partial a'_{ki}} \frac{\partial a'_{ki}}{\partial x_{jk}} + \frac{\partial h'_{ki}}{\partial b'_{ki}} \frac{\partial b'_{ki}}{\partial x_{jk}} \right) \right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial y_{jk}} = \sum_i \left(\frac{\partial E}{\partial g'_{ki}} \left(\frac{\partial g'_{ki}}{\partial a'_{ki}} \frac{\partial a'_{ki}}{\partial y_{jk}} + \frac{\partial g'_{ki}}{\partial b'_{ki}} \frac{\partial b'_{ki}}{\partial y_{jk}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h'_{ki}} \left(\frac{\partial h'_{ki}}{\partial a'_{ki}} \frac{\partial a'_{ki}}{\partial y_{jk}} + \frac{\partial h'_{ki}}{\partial b'_{ki}} \frac{\partial b'_{ki}}{\partial y_{jk}} \right) \right)$$

В останніх двох формулах частинні похідні $\frac{\partial E}{\partial g'_{ki}}$, $\frac{\partial E}{\partial h'_{ki}}$, $\frac{\partial g'_{ki}}{\partial a'_{ki}}$, $\frac{\partial g'_{ki}}{\partial b'_{ki}}$, $\frac{\partial h'_{ki}}{\partial a'_{ki}}$, $\frac{\partial h'_{ki}}{\partial b'_{ki}}$ вже розраховані за формулами (6)-(8). Інші частинні похідні мають такий вигляд

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_{jk}} = u_{jki}, \quad \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{jk}} = v_{jki}, \quad \frac{\partial a_{ki}}{\partial y_{jk}} = -v_{jki}, \quad \frac{\partial b_{ki}}{\partial y_{jk}} = u_{jki}.$$

Але частинні похідні по вхідних значеннях x_{jk} і y_{jk} для останнього шару співпадають по змісту з похідними функції похибки E по дійсній і уявній частинам відповідних виходів для попереднього шару. Тому

$$\frac{\partial E}{\partial g_{j,j-1}} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial x_{jk}}, \quad \frac{\partial E}{\partial h_{j,j-1}} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial y_{jk}}. \quad (9)$$

Формули (9) є аналогом (5) для попередніх шарів і забезпечують перехід від розрахунків координат градієнта поточного шару до розрахунків відповідних координат попереднього шару (метод швидкого обчислення градієнта). Отриманий алгоритм корекції вагових коефіцієнтів за формулами (2)-(9) є комплексною модифікацією

алгоритму зворотного поширення похибки, наведеного в [1].

При практичному використанні комплексної НМ постає питання вибору у (2) множника η_r (коефіцієнта швидкості навчання). Традиційні підходи до знаходження η_r , як розв'язку задачі одновимірної оптимізації є неприйнятними, оскільки вони вимагають численних обчислень похибки мережі E . Тому можна покласти $\eta_r = \eta$, де η – деяке наперед вибране число з відрізка $[0,01;1]$. Крім того, для вибору η_r можна запропонувати ті самі підходи, що і у роботі [3].

Навчання НМ із функцією помилки вигляду (1) вимагає використання значних об'ємів додаткової пам'яті (одне комплексне число на кожний параметр мережі). Тому для НМ із великою кількістю КН на практиці можна подавати вхідні вектори у випадковому порядку і обмежитися обчисленням градієнта помилки мережі E лише по поточному елементу (z', d') навчальної множини. В цьому випадку формули (3)-(4) набувають простішого вигляду:

$$\frac{\partial E}{\partial u_{jk}} = \frac{\partial E}{\partial g_{ki}} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial a_{ki}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_{jk}} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial b_{ki}} \frac{\partial b_{ki}}{\partial u_{jk}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h_{ki}} \left(\frac{\partial h_{ki}}{\partial a_{ki}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial u_{jk}} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial b_{ki}} \frac{\partial b_{ki}}{\partial u_{jk}} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v_{jk}} = \frac{\partial E}{\partial g_{ki}} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial a_{ki}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial v_{jk}} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial b_{ki}} \frac{\partial b_{ki}}{\partial v_{jk}} \right) + \frac{\partial E}{\partial h_{ki}} \left(\frac{\partial h_{ki}}{\partial a_{ki}} \frac{\partial a_{ki}}{\partial v_{jk}} + \frac{\partial h_{ki}}{\partial b_{ki}} \frac{\partial b_{ki}}{\partial v_{jk}} \right) \quad (11)$$

і розрахунки проводяться за формулами (2), (10)-(11), (5)-(9).

Слід зазначити, для навчання комплексних НМ можна використовувати різноманітні модифікації алгоритму зворотного поширення, подібні до тих, які наведені в [2-4] для дійсних НМ.

Список використаних джерел

1. Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J. Learning internal representations by error

propagation. // Parallel distributed processing, vol. 1, Cambridge, MA: MIT Press, 1986. с 318-362.

2. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: теория и практика. – М.: Мир, 1992.
3. Заенцев И. В. Нейронные сети: основные модели. – Воронеж: изд. ВГУ, 1999.
4. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. – Новосибирск: Наука, 1996.

Надійшла до редакції 15.05.2007

УДК 519.9

Анатолій В. Кузьмін*

Чисельне моделювання розповсюдження хвиль на поверхні ідеальної рідини

Для моделювання процесу виникнення і розповсюдження хвилі на поверхні водойма запропонований чисельний метод знаходження наближеного розв'язку. Нестационарна гранична задача з вільною поверхнею за допомогою використання теорії потенціалів зводиться до системи інтегро – диференціальних рівнянь вздовж контуру. Знаходження наближеного розв'язку здійснюється шляхом розв'язання СЛАР на послідовності часових кроків.

Ключові слова: вільна поверхня, поверхневі хвилі, потенціал подвійного шару, сингулярне інтегральне рівняння.

*E-mail: kuzmina@ukr.net

Anatoliy V Kuzmin

Numerical modulation of wave spread on the surface of ideal fluid

To modulate the process of onset and spread of the wave on the water surface the article shows the numerical method of finding an approximate solution. A non-stationary boundary problem with a free surface comes to the system of integro-differential equations along a contour with the help of the theory of potentials. The approximate solution can be found with the help of Linear Algebra Equation System on the sequence of time steps.

Key words: free surface, surface waves, the potential of a double layer, singular integral equation.

Постановка математичної задачі

Розглядається задача про утворення і розповсюдження на вільній поверхні ідеальної нестисливої рідини поверхневих хвиль за рахунок зміни конфігурації поверхні дна. Поверхневі хвилі великої амплітуди і великої швидкості розповсюдження виникають у зв'язку з землетрусами і представляють велику небезпеку при виході такої хвилі на мілководдя.

Фізична задача вивчається з використанням метода математичного моделювання, для якої формулюється математична модель та чисельний алгоритм знаходження наближеного розв'язку.

Розглянемо область на площині $\Omega(t)$, яка заповнена ідеальною нестисливою рідиною

$$\Omega(t) = \{x, y, -\infty < x < \infty, -h(x, t) < y < \xi(x, t)\}, \quad (1)$$

– $h(x, t)$ – рівняння нестационарної лінії дна (відома функція), в подальшому будемо позначати цю границю L_2 , $\xi(x, t)$ – рівняння вільної поверхні ідеальної рідини (підлягає знаходженню), в подальшому будемо позначати її L_1 . Враховуючи потенціальний характер руху рідини, сформулюємо таку нестационарну нелінійну граничну задачу:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(t), t > 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{h_t}{\sqrt{1 + h_x^2}} \Big|_{\mathbf{r} \in L_2}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + q \xi \Big|_{\mathbf{r} \in L_1} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla \Phi \Big|_{\mathbf{r} \in L_1}; \quad (5)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0; \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (7)$$

$\mathbf{r}(t)$ – радіус-вектор точки області в момент часу t , $\Phi(\mathbf{r}, t)$ – потенціал вектора швидкості рідини. З фізичної точки зору співвідношення (2) є рівнянням нерозривності, співвідношення (3) – гранична умова непротікання на поверхні дна, співвідношення (4) – умова Коші – Лагранжа для нестисливої рідини, рівняння (5) представляє собою закон руху вільної поверхні і одночасно виражає умову непротікання. Співвідношення (6) є початковими умовами для значення потенціалу і положення вільної границі L_1 , (7) – умова затухання потенціалу на нескінченності.

Задача (2)-(7) є нестационарною нелінійною початково-граничною задачею з невідомою границею і не має аналітичного розв'язку. В той же час у спрощеній, лінійній постановці, коли вільна поверхня має малі збурення, а поверхня

дна співпадає з віссю абсцис, ця задача є класичною і має аналітичний розв'язок [1,2]. Задача в лінійній нестационарній постановці з рухомим дном довільної форми розглядалася, зокрема, в [6].

Зведення граничної задачі до системи інтегро - диференціальних рівнянь

В подальших формулах будемо вільну поверхню L_1 задавати в параметричному вигляді $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $-\infty < s < \infty$, s - довжина дуги, яка відраховується від деякої фіксованої точки в додатньому та від'ємному напрямках.

Введемо наступні позначення:

$M_0 = (x_0, y_0)$; $M = (x, y)$ - фіксована та довільна (біжуча) точки області $\Omega(t)$ або границь області L_1 , L_2 .

$$\Phi(M_0, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{R_{M, M_0}} g_i(M, t) ds_M, \quad (8)$$

де $R_{M, M_0} = |M - M_0|$ - евклідова відстань між точками на площині, $g_i(M, t)$, $i = 1, 2$ - щільності потенціалу, які підлягають знаходженню. Враховуючи властивості потенціалу подвійного шару (8), функція $\Phi(M_0, t)$ задовольняє рівнянню Лапласа (2) та співвідношенню (7). Тобто, для знаходження щільностей

$g_i(M, t)$, $i = 1, 2$ та положення поверхні L_1 необхідно задовольнити співвідношення (3)-(5).

Використовуючи властивості потенціалу подвійного шару [4], запишемо граничне значення його градієнту $\nabla_- \Phi(M_0, t)$ та самого потенціалу $\Phi_-(M_0, t)$ зі сторони протилежної напрямку нормалі до поверхні L_1 :

$$\nabla_- \Phi(M_0, t) = -\frac{1}{2} \tau(M_0, t) g_{1, \tau}(M_0, t) + \overline{\nabla \Phi(M_0, t)}, \quad M_0 \in L_1, \quad (9)$$

$$\Phi_-(M_0, t) = -\frac{1}{2} g_1(M_0, t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{R_{M, M_0}} g_i(M, t) ds_M \quad M_0 \in L_1, \quad (10)$$

В (9) $g_{1, \tau}(M_0, t)$ - похідна від щільності g_1 по дотичному напрямку (фактично по довжині дуги) в точках вільної поверхні. $\overline{\nabla \Phi(M_0, t)}$ - пряме

значення градієнта потенціалу на поверхні L_1 , яке може бути обчислене у вигляді:

$$\overline{\nabla \Phi(M_0, t)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{L_i} g_i(M, t) d\left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{M, M_0}} - \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R_{M, M_0}}\right), \quad (11)$$

У співвідношенні (10) другий доданок є прямим значенням потенціалу подвійного шару і має цілком визначене неперервне значення [4] у кожній точці поверхні L_1 .

Тоді співвідношення (3) з використанням (8) буде мати такий вигляд:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \int_{L_1} \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{R_{M,M_0}} g_i(M,t) ds_M = \frac{h_t(M_0,t)}{\sqrt{1+h_x^2(M_0,t)}} \Big|_{M_0 \in L_2}, \quad (3')$$

тобто представляє собою лінійне інтегральне рівняння першого роду з гіперсингулярним ядром.

Співвідношення (4) матиме вигляд:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial g_1(M_0,t)}{\partial t} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} \frac{\partial}{\partial n_M} \ln \frac{1}{R_{M,M_0}} \frac{\partial g_i(M,t)}{\partial t} ds_M + qy_0 + \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \mathbf{T}(M_0,t) g_{1,\tau}(M_0,t) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{L_1} g_i(M,t) d \left(i \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{M,M_0}} - j \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{M,M_0}} \right) \right|^2 = 0 \quad (4')$$

і представляє собою нелінійне інтегродиференціальне рівняння з гіперсингулярним ядром.

Співвідношення (5) фактично трансформується у співвідношення

$$\frac{d\mathbf{T}(M_0,t)}{dt} = \overline{\nabla \Phi(M_0,t)} \quad M_0 \in L_1. \quad (5')$$

Розв'язки відповідних інтегральних рівнянь відносно щільностей потенціалу

розглядаються в класі функцій, які задовольняють умові: $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g_i(s) = 0$, що відповідає фізичному змісту задачі [3].

Побудова чисельного методу

Введення сітки

Границю

$L_1 = \{x = x(s,t), y = y(s,t), -\infty < s, \infty\}$ в будь-який момент часу t представимо сукупністю точок $M_k = (x_k = x(s_k,t), y_k = y(s_k,t))$ та $M_{l+0.5} = (x_{l+0.5} = x(s_{l+0.5},t), y_{l+0.5} = y(s_{l+0.5},t))$, де $s_{\pm k \pm 1} = \pm s_{\pm k} \pm \Delta s_{\pm k}$, $s_{l+0.5} = s_l + 0.5 \Delta s_l$, $0 \leq k \leq N_1$, $-N_1 \leq l \leq N_1 - 1$, $s_0 = 0$.

Границю $L_2 = \{y = h(x,t), -\infty < x < \infty\}$ в будь-

який момент часу представимо сукупністю точок $\tilde{M}_k = (\tilde{x}_k, \tilde{h}_k = h(\tilde{x}_k))$, та

$\tilde{M}_{l+0.5} = (\tilde{x}_{l+0.5}, \tilde{h}_{l+0.5} = h(\tilde{x}_{l+0.5}))$, де $\tilde{x}_{\pm k \pm 1} = \tilde{x}_{\pm k} \pm \Delta \tilde{x}_{\pm k}$, $\tilde{x}_{l+0.5} = \tilde{x}_l + 0.5 \Delta \tilde{x}_l$, $0 \leq k \leq N_2$, $-N_2 \leq l \leq N_2 - 1$.

Апроксимація градієнта потенціалу

Для апроксимації прямого значення градієнту потенціалу (11) застосуємо квадратурну формулу:

$$\overline{\nabla \Phi(M_{k+0.5}, t_j)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} g_1(M_{n+0.5}, t_j) \int_{L_1} d \left(i \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{M,M_{k+0.5}}} - j \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R_{M,M_{k+0.5}}} \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} g_2(\tilde{M}_{n+0.5}, t_j) \int_{L_2} d \left(i \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{\tilde{M},M_{k+0.5}}} - j \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R_{\tilde{M},M_{k+0.5}}} \right). \quad (12)$$

Інтеграли в (12) можна обчислити точно і записати їх у вигляді [3,5]:

$$\omega_{kn}^1 = \int_{L_{M_n M_{n+1}}}^1 d\left(i \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{M, M_{k+0.5}}} - j \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R_{M, M_{k+0.5}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(i \left(\frac{y_{k+0.5} - y_{n+1}}{R_{M_{n+1} M_{k+0.5}}^2} - \frac{y_{k+0.5} - y_n}{R_{M_{n+1} M_{k+0.5}}^2} \right) - j \left(\frac{x_{k+0.5} - x_{n+1}}{R_{M_{n+1} M_{k+0.5}}^2} - \frac{x_{k+0.5} - x_n}{R_{M_{n+1} M_{k+0.5}}^2} \right) \right), \quad (13)$$

$$\omega_{kn}^2 = \int_{L_{\tilde{M}_n \tilde{M}_{n+1}}}^2 d\left(i \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{R_{\tilde{M}, M_{k+0.5}}} - j \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{R_{\tilde{M}, M_{k+0.5}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(i \left(\frac{y_{k+0.5} - \tilde{y}_{n+1}}{R_{\tilde{M}_{n+1} M_{k+0.5}}^2} - \frac{y_{k+0.5} - \tilde{y}_n}{R_{\tilde{M}_{n+1} M_{k+0.5}}^2} \right) - j \left(\frac{x_{k+0.5} - \tilde{x}_{n+1}}{R_{\tilde{M}_{n+1} M_{k+0.5}}^2} - \frac{x_{k+0.5} - \tilde{x}_n}{R_{\tilde{M}_{n+1} M_{k+0.5}}^2} \right) \right). \quad (14)$$

Таким чином, використовуючи загальноприйняті позначення, (12) можна записати у вигляді:

$$\overline{\nabla \Phi_k} = \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} \omega_{kn}^1 g_{1,n+0.5} + \sum_{n=-N_2}^{N_2-1} \omega_{kn}^2 g_{2,n+0.5}, \quad k = \overline{-N_1, N_1 - 1}. \quad (15)$$

**Обчислення положення точок вільної
границі**

Позначимо $\hat{M}_n = (\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ положення
точки $M_k = (x_k, y_k)$ в наступний момент часу

$t_{j+1} = t_j + \Delta t_j$. Тоді співвідношення (5') буде
мати вигляд:

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}(\hat{M}_k) - \mathbf{r}(M_k)}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla \Phi(M_{k+0.5}, t_j)} + \overline{\nabla \Phi(M_{k+1.5}, t_j)}}{2}, \quad k = \overline{-N_1 + 1, N_1 - 1} \quad (16)$$

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}(\hat{M}_{-N_1}) - \mathbf{r}(M_{-N_1})}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla \Phi(M_{-N_1+0.5}, t_j)}}{2}, \quad (17)$$

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}(\hat{M}_{N_1}) - \mathbf{r}(M_{N_1})}{\Delta t_j} = \frac{\overline{\nabla \Phi(M_{N_1-0.5}, t_j)}}{2}$$

Точку $M_0 = (x_0, y_0)$ прийемо за точку відліку
довжини дуги $s = 0$.

Тоді значення параметру довжини дуги, що
відповідають новому положенню границі можна
обчислити:

$$\hat{s}_{\pm k \pm 1} = \hat{s}_{\pm k} \pm \sqrt{(\hat{x}_{\pm k \pm 1} - \hat{x}_{\pm k})^2 + (\hat{y}_{\pm k \pm 1} - \hat{y}_{\pm k})^2}, \quad k = \overline{0, N_1 - 1}, \quad \hat{s}_0 = 0. \quad (18)$$

Якщо $\Delta \hat{s}_k = \hat{s}_{k+1} - \hat{s}_k > \omega$, $k = \overline{-N_1, N_1}$, то з
використанням, наприклад, сплайн –
апроксимації здійснюється вибір нової сітки на

вільній границі. ω - максимально можливий крок
сітки.

**Апроксимація граничного співвідношення
на оні.**

Врахуємо, що на кожній лінійній частині
контуру L_i , $i = 1, 2$, який з'єднує сусідні точки

цього контуру, одиничний вектор нормалі може
бути записаний у вигляді: $\vec{n}_k = (y_{s,k}, -x_{s,k})$, де

$$y_{s,k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta s_k}, \quad x_{s,k} = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta s_k}.$$

Апроксимуємо співвідношення (3'):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_2}^{N_2-1} \Omega_{k,n}^2 \hat{g}_{2,n} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_2}^{N_2-1} \Omega_{k,n}^1 g_{1,n} = \frac{h_{t,k}}{\sqrt{1+h_{x,k}}}, \quad k = \overline{-N_2, N_2-1} \quad (19)$$

$$\text{Де } \Omega_{k,n}^1 = \frac{1}{2\pi} \left(\nabla \int_{L_{M_n, M_{n+1}}^1} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\ln \frac{1}{R_{M, \tilde{M}_{k+0.5}}} \right) ds_M, \mathbf{n}_{\tilde{M}_{k+0.5}} \right),$$

$$\Omega_{k,n}^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\nabla \int_{L_{\tilde{M}_n, \tilde{M}_{n+1}}^2} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\ln \frac{1}{R_{\tilde{M}, \tilde{M}_{k+0.5}}} \right) ds_M, \mathbf{n}_{\tilde{M}_{k+0.5}} \right),$$

$L_{M_n, M_{n+1}}^i$ - відрізок прямої, що з'єднує точки M_n та M_{n+1} контуру $L_i, i = 1, 2$.

Враховуючі формули (13), (14), останні інтеграли запишемо у вигляді:

$$\Omega_{k,n}^1 = \frac{1}{2\pi} \left(\tilde{y}_{s,k} \left(\frac{\tilde{y}_{k+0.5} - y_{n+1}}{R_{M_{n+1}, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} - \frac{\tilde{y}_{k+0.5} - y_n}{R_{M_n, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} \right) + \tilde{x}_{s,k} \left(\frac{\tilde{x}_{k+0.5} - x_{n+1}}{R_{M_{n+1}, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} - \frac{\tilde{x}_{k+0.5} - x_n}{R_{M_n, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} \right) \right), \quad (20)$$

$$\Omega_{k,n}^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\tilde{y}_{s,k} \left(\frac{\tilde{y}_{k+0.5} - \tilde{y}_{n+1}}{R_{\tilde{M}_{n+1}, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} - \frac{\tilde{y}_{k+0.5} - \tilde{y}_n}{R_{\tilde{M}_n, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} \right) + \tilde{x}_{s,k} \left(\frac{\tilde{x}_{k+0.5} - \tilde{x}_{n+1}}{R_{\tilde{M}_{n+1}, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} - \frac{\tilde{x}_{k+0.5} - \tilde{x}_n}{R_{\tilde{M}_n, \tilde{M}_{k+0.5}}^2} \right) \right). \quad (20')$$

Апроксимація нелінійного співвідношення на вільній границі

Врахуємо, що одиничний вектор дотичної на вільній границі має вигляд:

$\tau_k = (x_{s,k}, y_{s,k})$. Запишемо апроксимацію похідної по дотичному напрямку від щільності потенціалу, враховуючі обернення останньої в нуль у крайніх точках сітки:

$$g_{1,s,k+0.5} = \begin{cases} \frac{2g_{1,-N_1+0.5}}{\Delta s_{-N_1+1}}, & k = -N_1 + 0.5 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{g_{1,n+1.5} - g_{1,n+0.5}}{(\Delta s_{n+2} + \Delta s_{n+1})} + \frac{g_{1,n+0.5} - g_{1,n-0.5}}{(\Delta s_{n+1} + \Delta s_n)} \right), & k = n + 0.5. \\ -\frac{2g_{1,N_1-2}}{\Delta s_{N_1}}, & k = N_1 - 0.5 \end{cases} \quad (21)$$

Апроксимуємо граничні значення градієнта потенціалу та граничне значення потенціалу подвійного шару з сторони протилежної нормалі

в точках сітки $M_{k+0.5}$ вільної поверхні L_1 , які запишемо у вигляді:

$$\nabla_- \Phi_k = -\frac{1}{2} \tau_k g_{1,s,k+0.5} + \overline{\nabla \Phi(M_{k+0.5}, t_j)} \quad (22)$$

$$\Phi_-(M_{k+0.5}, t_j) = -\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{L_i} g_i(M, t_j) \frac{(x(s) - x_{k+0.5})y'_s(s) - (y(s) - y_{k+0.5})x'_s(s)}{(x(s) - x_{k+0.5})^2 + (y(s) - y_{k+0.5})^2} ds - \frac{1}{2} g_1(M_{k+0.5}, t_j) \quad (23)$$

Інтеграл (23) апроксимуємо квадратурною формулою:

$$\Phi(M_{k+0.5}, t_j) = \sum_{n=-N_1}^{N_1-1} g_{i,n+0.5} \int_{L_{M_n, M_{n+1}}} \frac{(x(s) - x_{k+0.5})y'_s(s) - (y(s) - y_{k+0.5})x'_s(s)}{(x(s) - x_{k+0.5})^2 + (y(s) - y_{k+0.5})^2} ds =$$

$$\sum_{n=-N_1}^{N_1-1} g_{i,n+0.5} a_{k,n}^{(1)} \quad (24)$$

При обчисленні інтегралів у (24), врахуємо, що дуга $L_{M_n, M_{n+1}}^i$ є відрізок прямої лінії, що з'єднує точки M_n та M_{n+1} .

Враховуючи, що

$$x(s) = x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{s_{n+1} - s_n} (s - s_n), \quad x'_s(s) = \frac{x_{n+1} - x_n}{s_{n+1} - s_n}$$

$$y(s) = y_n + \frac{y_{n+1} - y_n}{s_{n+1} - s_n} (s - s_n), \quad y'_s(s) = \frac{y_{n+1} - y_n}{s_{n+1} - s_n} \quad (25)$$

маємо, що інтеграли в (24) представляють собою інтеграли від дробово-раціональної функції і у випадку, коли $k \neq n$ ці інтеграли можна записати у вигляді:

$$a_{k,n}^{(1)} = \int_{s_n}^{s_{n+1}} \frac{(x_n - x_{k+0.5})y_{s,n} - (y_n - y_{k+0.5})x_{s,n}}{(x_n - x_{k+0.5} + (s - s_n)x_{s,n})^2 + (y_n - y_{k+0.5} + (s - s_n)y_{s,n})^2} ds, \quad (26)$$

$$a_{k,n}^{(2)} = \int_{\tilde{x}_n}^{\tilde{x}_{n+1}} \frac{(h_n - y_{k+0.5})}{(x - x_{k+0.5})^2 + (h_n - y_{k+0.5} + (x - x_n)h_{s,n})^2} dx. \quad (27)$$

Для контурів L_1 та L_2 відповідно.

У випадку, коли $k = n$, сингулярний інтеграл $a_{k,n}^{(1)} = 0$.

Таким чином граничне значення потенціалу подвійного шару на вільній границі L_1 апроксимується наступним виразом:

$$-0.5 \frac{\hat{g}_{1,k+0.5} - g_{1,k+0.5}}{\tau_j} - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=-N_i}^{N_i-1} a_{k,n}^{(i)} \frac{\hat{g}_{i,n+0.5} - g_{i,n+0.5}}{\tau_i} +$$

$$0.5 |\nabla_- \Phi_k|^2 + q y_{k+0.5} = 0, \quad k = -N_1, N_1 - 1 \quad (28)$$

Алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі

- На момент часу $t_j, j = \overline{0, J}$ відомим є положення точок контуру $L_1 : (x_n, y_n, s_n), n = \overline{-N_1, N_1}$, контуру $L_2 : (x_n, h_n = h(x_n)), n = \overline{-N_2, N_2}$, та значення щільностей потенціалу $g_{i,k+0.5}, k = \overline{-N_i, N_i - 1}$.

- Значення $\hat{g}_{2,k+0.5}, k = \overline{-N_2, N_2 - 1}$,

обчислюються з СЛАР (19).

- Значення $\hat{g}_{1,k+0.5}, k = \overline{-N_1, N_1 - 1}$, обчислюються з СЛАП (28).

- Нове положення точок контуру $\hat{L}_1 : (\hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{s}_n), n = \overline{-N_1, N_1}$, знаходимо з використання формул (16)–(18).

- Обчислення граничного значення потенціалу подвійного шару та граничного значення його градієнту здійснюється за формулами (24)–(27) та (13)–(15) відповідно.

- Попередні кроки дозволяють знайти усі невідомі величини на момент часу t_{j+1} .

Висновки

Результати чисельних експериментів, проведених з використанням запропонованого чисельного алгоритму засвідчують його ефективність, з точки зору кількості обчислень та адекватне відображення процесу виникнення і розповсюдження поверхневої хвилі.

Крок інтегрування по просторовій та часовій змінним обирався з виходячи з умов точності.

Неявний характер алгоритму (знаходження шільностей з СЛАР) відчутних обмежень стійкості на крок по часовій змінній не накладав.

Обчислення інтегралів (26), (27) та розв'язування СЛАР здійснювалось з заданою точністю з використанням системи комп'ютерної математики MAPLE 10

Список використаних джерел

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. – Москва, Наука, 1977. – 816 с.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – Москва, Наука, 1973. – 416 с.
3. *Довгий С.А., Лифанов И.К.* Методы решения интегральных уравнений. – Киев, Наукова думка, 2002. – 344 с.
4. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – Москва, Государственное издательство технико – теоретической литературы, 1953. – 415 с.
5. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва, ТОО Янус, 1995. – 520 с.
6. *Кузьмін А.В.* Моделювання хвильового руху на поверхні ідеальної рідини у випадку імпульсної зміни поверхні дна. Київ. Одинадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 18-20 травня 2006, с. 166.

Надійшла до редколегії 31.08.07

УДК 517.988

Малишева Т.М.

Інтерполяційні формули в $L_2(0,T)$, що є асимптотично точними на поліномах

Для поліномів Вольтерра побудовано інтерполянти типу Ерміта та Абеля-Гончарова, отримано оцінки точності в разі точно та збурено заданих інтерполяційних умов, виконано апробацію результатів на тестових прикладах.

Ключові слова: поліном Вольтерра, інтерполянт, диференціал Гамо, точність, гільбертів простір.

*E-mail: malysheva.t@gmail.com

Нехай X, Y – гільбертові простори (X – сепарабельний), Π_n – множина операторних поліномів $P_n: X \rightarrow Y$ степеня n

$$\Pi_n = \{P_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n\},$$

де $L_0 \in Y$, $L_kx^k: X \rightarrow Y$ – k -й операторний степінь, отриманий з k -лінійної неперервної симетричної операторної форми

$L_k(v_1, \dots, v_k): X^k \rightarrow Y$, коли $v_1 = \dots = v_k = x$,

$k = \overline{1, n}$, $e_1, e_2, \dots, e_m$ – перші m елементів

ортонормального базису в X , $m \geq n$. В [1-4] для

диференціального оператора $F: X \rightarrow Y$

побудовано інтерполяційні формули типу Ерміта в одному вузлі та Абеля-Гончарова вигляду

$$P_{m,n}(x; F) = \sum_{k=0}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m a_{i_1, \dots, i_k}(F)(x, e_{i_1}) \dots (x, e_{i_k}), \quad (1)$$

де $a_{i_1, \dots, i_k}(F) \in Y$ – коефіцієнти, симетричні відносно своїх індексів, що визначаються однозначно з інтерполяційних умов, $(\cdot)$ –

$$P_2(x(\cdot), t) = K_0(t) + \int_0^T K_1(t, z_1)x(z_1)dz_1 + \int_0^T \int_0^T K_2(t, z_1, z_2)x(z_1)x(z_2)dz_1dz_2, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

де $x \in L_2(0, T)$, а $K_p(t, z_1, \dots, z_p)$, $p = 0, 1, 2$, – неперервна, симетрична відносно змінних $z_1, \dots, z_p$, інтегрована з квадратом в області $\Omega_p = [0, T] \times \dots \times [0, T]$ функція, що називається ядром p -го порядку. Для якої

$$\{e_i\}_{i=1}^\infty = \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi z}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi z}{T}, \dots, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mz}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mz}{T}, \dots -$$

Malysheva T.M.

Interpolation formulas in $L_2(0,T)$ that are asymptotically accurate on polynomials

Hermite and Abel-Goncharov type interpolants are constructed, the accuracy ratings under exact and disturbed interpolation conditions are obtained, the approbation of results are realized on test examples for Volterra polynomials.

Key Words: Volterra polynomial, interpolant, Gateaux differential, accuracy, Hilbert space.

скалярний добуток в X . Доведено, що будь-який інтерполянт структури (1) з однозначно визначеними коефіцієнтами асимптотично інваріантний відносно багаточленів відповідного степеня та у випадку інтерполювання поліноміального оператора всі інтерполянти структури (1) співпадають. Отримано оцінки точності інтерполяційних формул для поліноміальних та диференційованих операторів в умовах точно та збурено заданої вихідної інформації, що дозволяє на практиці використовувати такі інтерполянти для наближення відповідних класів операторів.

В даній роботі у випадку $n=2$, $m \geq n$, розглянуто побудову та аналіз точності інтерполянтів Ерміта в одному вузлі та типу Абеля-Гончарова структури (1) на прикладі поліноміального оператора Вольтерра. Нехай

$X = Y = L_2(0, T)$, $(u, v) = \int_0^T u(z)v(z)dz$ – скалярний

добуток в X , $P_1: X \rightarrow X$, $P_2 \in \Pi_2$, – операторний поліном Вольтерра

$$\|K_p\| = \left(\int_0^T \dots \int_0^T K_p^2(t, z_1, \dots, z_p) dz_1 \dots dz_p dt \right)^{1/2}.$$

$K_p(t, z_1, \dots, z_p) = 0$, при $z_i > t$, $i = \overline{1, p}$, ядра K_p невідомі. Нехай

ортонормальний базис в $L_2(0, T)$. Очевидно, що, задавши значення m , ми визначаємо перші $(2m+1)$ базисні елементи. З урахуванням степеня структури (1) має вигляд

$$P_{2m+1,2}(x; P_2) = a_0(P_2) + \sum_{i=1}^{2m+1} a_i(P_2) \int_0^T x(z) e_i(z) dz + \sum_{i,j=1}^{2m+1} a_{ij}(P_2) \int_0^T x(z) e_i(z) dz \int_0^T x(z) e_j(z) dz, \quad m \geq 2. \quad (3)$$

Розглянемо побудову та оцінимо точність інтерполянта Ерміта $P_{2m+1,2}(x; P_2)$, що задовольняє інтерполяційним умовам

$$\begin{aligned} P_{2m+1,2}(0; P_2) &= P_2(0), \quad P'_{2m+1,2}(0; P_2) e_{i_1} = P'_2(0) e_{i_1}, \\ P''_{2m+1,2}(0; P_2) e_{i_2} e_{i_1} &= P''_2(0) e_{i_2} e_{i_1}, \\ i_1, i_2 &= \overline{1, 2m+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $P_2^{(k)}(0) e_{i_k} \dots e_{i_1}$, $k = 0, 1, 2$, – диференціал Гато

k -го порядку оператора P_2 в нулі за напрямками $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$. Згідно наведеної в [1] формули для визначення коефіцієнтів такого інтерполянта,

$$a_{i_1 \dots i_k}(P_n) = \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(0) e_{i_k} \dots e_{i_1}, \quad k = \overline{0, n}, \quad \text{при } n=2$$

$$\text{маємо: } a_0(P_2) = P_2(0), \quad a_i(P_2) = P'_2(0) e_i,$$

$$a_{ij}(P_2) = \frac{1}{2} P''_2(0) e_j e_i. \quad \text{Звідси, отримуємо}$$

інтерполянт Ерміта (3) для P_2 (2)

$$P_{2m+1,2}(x; P_2) = P_2(0) + \sum_{i=1}^{2m+1} P'_2(0) e_i \int_0^T x(z) e_i(z) dz + \sum_{i,j=1}^{2m+1} \frac{1}{2} P''_2(0) e_j e_i \int_0^T x(z) e_i(z) dz \int_0^T x(z) e_j(z) dz, \quad (5)$$

$$\text{де, } P_2(0) = K_0(t), \quad P'_2(0) e_i = \int_0^T K_1(t, z_1) e_i(z_1) dz_1,$$

$$P''_2(0) e_j e_i = 2! \int_0^T \int_0^T K_2(t, z_1, z_2) e_i(z_1) e_j(z_2) dz_1 dz_2.$$

Перейдемо до аналізу точності інтерполяційної формули Ерміта (5). Згідно [1] точність ермітового інтерполянта $P_{m,n}$ в метриці Y оцінюється нерівністю

$$\|P_n - P_{m,n}\|_Y \leq \sum_{k=l}^n \|L_k\| \left((\|x\| + \varepsilon_m(x))^k - \|x\|^k \right), \quad (6)$$

де $\|L_k\|$ – традиційна норма k -лінійного оператора, $\varepsilon_m^2(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} (x, e_i)^2$, $\|x\|^2 = (x, x)$.

$$\text{Згідно [1]} \quad \frac{1}{k!} P_2^{(k)}(0) v_k \dots v_1 = L_k(v_1, \dots, v_k),$$

$$(P, Q)_H = \sum_{k=0}^n \int \dots \int \left(\frac{1}{k!} P^{(k)}(0) h_k \dots h_1, \frac{1}{k!} Q^{(k)}(0) h_k \dots h_1 \right) \mu(dh_k) \dots \mu(dh_1)$$

та нормою $\|P\|_H = (P, P)_H^{1/2}$, де $P, Q \in H$. Згідно [1] точність наближення полінома P_n інтерполянтом Ерміта (1) в метриці H оцінюється за формулою

$$\|P_n - P_{m,n}\|_H < \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 \|L_k\|^2 (Tr B)^k \right]^{1/2} q^{m/2}, \quad (9)$$

$p = 0, 1, 2$, тоді неважко перевірити, що

$$\|L_p\| \leq \|K_p\|, \quad p = 0, 1, 2. \quad (7)$$

З (6), (7) для $P_{2m+1,2}$ (5), коли $n = 2$, маємо

$$\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_Y \leq$$

$$\leq \varepsilon_{2m+1}(x) (\|K_1\| + 2\|K_2\| \|x\|) + \varepsilon_{2m+1}^2(x) \|K_2\| \quad (8)$$

Для подальшого викладення введемо гауссову міру μ на X , перший момент якої рівний

$$\text{нулю, а ядерний оператор } Bx = \sum_{i=1}^{\infty} q^i(x, e_i) e_i,$$

$q \in (0, 1)$, є кореляційним оператором цієї міри, де e_i – власні елементи, а q^i – власні значення.

Нехай H – гільбертів простір поліноміальних операторів $P_n: X \rightarrow X$ зі скалярним добутком

$$\text{де } Tr B = \sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q}, \quad q \in (0, 1). \quad \text{З (7), (9), коли } n=2 \text{ отримуємо оцінку}$$

$$\begin{aligned} \|P_2 - P_{2m+1,2}\|_H &< \\ &< q^{m+1/2} (Tr B)^{1/2} (\|K_1\|^2 + 4\|K_2\|^2 Tr B)^{1/2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Знайдемо оцінку точності наближення P_2 (2)

інтерполянт типу Ерміта $\tilde{P}_{2m+1,2}$ в метриці H у випадку збурено заданих диференціалів Гато оператора P_2

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2^{(k)}(0)e_{i_k}e_{i_j} &= P_2^{(k)}(0)e_{i_k}e_{i_j} + \delta_{i_k \dots i_j}, \\ \delta_{i_k \dots i_j} &\in Y = X, \|\delta_{i_k \dots i_j}\|_X \leq \delta, \\ i_j &= \overline{1, 2m+1}, j = \overline{1, k}, k = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

Згідно [3] точність наближення поліному P_n

$$\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} (TrB)^{1/2} (\|K_1\|^2 + 4\|K_2\|^2 TrB)^{1/2} + \delta \frac{TrB+2}{2}. \quad (12)$$

Наслідок 1. Точність інтерполявання в сенсі оцінки (12) не покращується при

$$m > \log_q \frac{\delta(TrB+2)^{1/2}}{\sqrt{TrB(\|K_1\|^2 + 4\|K_2\|^2 TrB)}} - \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Як зазначено вище, для поліноміального оператора всі інтерполяційні формули структури (1) з однозначно визначеними коефіцієнтами співпадають. Тому для $P_2(x(\cdot), \cdot)$ (2) інтерполянт типу Абеля-Гончарова, що задовольняє інтерполяційним умовам

$$\begin{aligned} P_{2m+1,2}(0; P_2) &= P_2(0), \quad P_{2m+1,2}'(e_1; P_2)e_i = P_2'(e_1)e_i, \\ P_{2m+1,2}''(e_2; P_2)e_i e_j &= P_2''(e_2)e_i e_j, \quad i, j = \overline{1, 2m+1}, \end{aligned}$$

співпадає з побудованим інтерполянтом Ерміта в одному вузлі (5), а його точність оцінюється (8), (10). Оцінимо точність наближення P_2 (2) інтерполяційною формулою типу Абеля-Гончарова $\tilde{P}_{2m+1,2}$ в разі збурено

$$\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} (TrB)^{1/2} (\|K_1\|^2 + 4\|K_2\|^2 TrB)^{1/2} + (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 TrB + \alpha_2^2 (TrB)^2 / 4)^{1/2}, \quad (16)$$

$$\text{де } \alpha_0 = \delta_0 + \delta_1 + \frac{3}{2}\delta_2, \alpha_1 = \delta_1 + \delta_2, \alpha_2 = \delta_2.$$

Наслідок 2. Точність наближення в сенсі оцінки (16) не покращується при

$$m > \frac{1}{2} \log_q \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 TrB + \alpha_2^2 (TrB)^2 / 4}{\|K_1\|^2 TrB + 4\|K_2\|^2 (TrB)^2} - \frac{1}{2}. \quad (17)$$

$$P_2(x) = K_0 + \int_0^T K_1(z_1)x(z_1)dz_1 + \int_0^T \int_0^T K_2(z_1, z_2)x(z_1)x(z_2)dz_1 dz_2, \quad (18)$$

де $x \in L_2(0, T)$, ядра $K_p(z_1, \dots, z_p)$ – невідомі, $x(z) = z^2$, ядра $K_p(z_1, \dots, z_p)$ задамо у вигляді

$$\|K_p\| = \left(\int_0^T \dots \int_0^T K_p^2(z_1, \dots, z_p) dz_1 \dots dz_p \right)^{1/2}, \quad p = 0, 1, 2. \quad \text{В} \quad K_0 = 0, K_1(z_1) = \frac{z_1}{T\sqrt{T}}, K_2(z_1, z_2) = \frac{z_1 z_2}{2(T\sqrt{T})^2}. \quad (19)$$

якості вхідних функцій виберемо $x(z) = z$.

інтерполянт Ерміта $\tilde{P}_{m,n}$ визначається за формулою $\|P_n - \tilde{P}_{m,n}\|_H < \|P_n - P_{m,n}\|_H + \delta S_{n+1}^{1/2}$, де

$$\|P_n - P_{m,n}\|_H \text{ оцінено в (9), } S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(TrB)^{k-1}}{((k-1)!)^2}.$$

Для P_2 (2) оцінка $\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_H$ подана в (10),

$$S_2^{1/2} = \frac{TrB+2}{2}. \text{ Таким чином,}$$

заданих диференціалів Гато оператора P_2 (2)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2^{(k)}(e_k)e_{i_k} \dots e_{i_j} &= P_2^{(k)}(e_k)e_{i_k} \dots e_{i_j} + \delta_{i_k \dots i_j}, \\ \delta_{i_k \dots i_j} &\in Y = X, \|\delta_{i_k \dots i_j}\|_X \leq \delta_k, \\ i_j &= \overline{1, 2m+1}, j = \overline{1, k}, k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Згідно [4] для $P_n \in \Pi_n$ точність інтерполяційної формули типу Абеля-Гончарова $\tilde{P}_{m,n}$ оцінюється за формулою

$$\|P_n - \tilde{P}_{m,n}\|_H < \|P_n - P_{m,n}\|_H + S_n^{1/2}, \quad (15)$$

де $\|P_n - P_{m,n}\|_H$ оцінено виразом (9), а для $n = 2$ –

$$\begin{aligned} \text{формулою (10), } S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k^2}{(k!)^2} (TrB)^k, \quad \alpha_k = \delta_k + \\ &+ \frac{\alpha_{k+1}}{n} + \dots + \frac{\alpha_n}{(n-k)!}, \quad k = n-1, \dots, 0, \quad \alpha_n = \delta_n. \end{aligned}$$

Із (10), (15) маємо

Проведемо тестові розрахунки з побудови та аналізу точності інтерполяційних формул. Аналітичні та обчислювальні операції виконуються в системі MATHEMATICA 4.1, Wolfram Research, Inc. Нехай $P_2: L_2(0, T) \rightarrow R$ – функціональний поліном Вольєрра

Інтерполянт $P_{2m+1,2}$ (3), асимптотично точний на поліномах, будемо за формулою (5), враховуючи, що $P_2(0) = K_0$, $P_2'(0)e_i = \int_0^T K_1(z_1)e_i(z_1)dz_1$, $P_2''(0)e_i e_j = 2! \int_0^T \int_0^T K_2(z_1, z_2) \times \times e_i(z_1)e_j(z_2)dz_1 dz_2$.

Значення цих інтегралів обчислюємо аналітично в системі MATHEMATICA 4.1. На основі (8), (10), (19) точність інтерполяційної формули $P_{2m+1,2}$ в метриках просторів $Y=R$ та H визначається за формулами

$$\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_R = |P_2 - P_{2m+1,2}| < \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\|x\| \right) \varepsilon_{2m+1}(x) + \frac{1}{6} \varepsilon_{2m+1}^2(x), \quad (20)$$

де $\varepsilon_{2m+1}^1(x) = \frac{2}{T} \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\int_0^T x(z) \sin \frac{2\pi k z}{T} dz \right)^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\int_0^T x(z) \cos \frac{2\pi k z}{T} dz \right)^2 \right]$, для $x(z) = z$ $\|x\| = T\sqrt{T/3}$, для $x(z) = z^2$, $\|x\| = T^2\sqrt{T/5}$.

$$\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(1 + \frac{TrB}{3} \right)}, \quad 0 < q < \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Таблиця 1

Результати тестових розрахунків

$T = 2\pi$, $q = 0.2$; $x(z) = z$, $P_2(x) = 19,0304$; $x(z) = z^2$, $P_2(x) = 330,759$							
m	$P_{2m+1,2}$		$ P_2 - P_{2m+1,2} $ теор.		$ P_2 - P_{2m+1,2} $ факт.		$\ P_2 - P_{2m+1,2}\ _H$
	$x(z) = z$	$x(z) = z^2$	$x(z) = z$	$x(z) = z^2$	$x(z) = z$	$x(z) = z^2$	
2	17,1107	281,757	8,8657	247,933	1,9197	49,002	0,00537484
3	17,6407	295,147	7,40902	205,67	1,3897	35,612	0,00107497
10	18,5588	318,593	4,14531	113,215	0,471681	12,1663	$1,37596 \cdot 10^{-8}$

Із (12), (21) для P_2 (18) точність інтерполянта Ерміта $\tilde{P}_{2m+1,2}$ в разі збурено заданих інтерполяційних умов (11) в метриці H оцінюється за формулою $\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H <$

$$< q^{m+1/2} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(1 + \frac{TrB}{3} \right)} + \delta \frac{TrB + 2}{2}.$$

Враховуючи (13), точність інтерполювання в

$$\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(1 + \frac{TrB}{3} \right) + \left(\left(\delta_0 + \delta_1 + \frac{3}{2}\delta_2 \right)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2 TrB + \delta_2^2 (TrB)^2 / 4 \right)^{1/2}}$$

На основі (17) точність інтерполювання в сенсі даної оцінки не покращується при

$$m > \frac{1}{2} \log_q \left[\frac{\left(\left(\delta_0 + \delta_1 + \frac{3}{2}\delta_2 \right)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2 TrB + \frac{1}{4}\delta_2^2 (TrB)^2 \right)}{\left(\frac{TrB}{3} \left(1 + \frac{TrB}{3} \right) \right)} \right] - \frac{1}{2}.$$

Таблиця 2

Результати тестових розрахунків оцінки $\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H$ при $T = 2\pi$, $q = 0.2$.

m	Інтерполяція типу Ерміта	Інтерполяція типу Абеля-Гончарова
	$\delta = 0,000001$	$\delta_0 = 0,000001$, $\delta_1 = 0,000002$, $\delta_2 = 0,000003$,
2	0,00537596	0,00538275

3	0,00107609	0,00108288
10	$1,13876 \cdot 10^{-6}$	$7,92834 \cdot 10^{-6}$
Значення m , починаючи з якого оцінка точності інтерполювання не покращується		
8		7

Розглянемо оператор $P_2: L_2(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$ точний на поліномах, також будемо за формулою (5). Значення інтегралів обчислюємо аналітично в системі MATHEMATICA 4.1. Оцінимо точність отриманої інтерполяційної формули в метриках $L_2(0, T)$ та H . На основі (8), (10), (22)

$$K_p(t, z_1, \dots, z_p) = \frac{1}{p!} \frac{t - z_1}{T\sqrt{T}} \dots \frac{t - z_p}{T\sqrt{T}}, \quad p = 1, 2. \quad (22)$$

Інтерполянт $P_{2m+1,2}(x; P_2)$ (3), асимптотично

$$\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_{L_2(0,T)} \leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{3}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{T}{7}} \|x\| \right) \varepsilon_{2m+1}(x) + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{T}{7}} \varepsilon_{2m+1}^2(x),$$

де $\|x\|$, $\varepsilon_{2m+1}^2(x)$ для $x(z) = z$ та $x(z) = z^2$ визначені в (20). В метриці H

$$\|P_2 - P_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} \sqrt{T} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \frac{TrB}{3} \right)}. \quad (23)$$

Таблиця 3

Результати тестових розрахунків

$T = 2\pi$; $q = 0.2$; $x(z) = z$, $P_2(x(\cdot), t) = \frac{t^2}{12\sqrt{2}\pi^{3/2}} + \frac{t^6}{576\pi^3}$; $x(z) = z^2$, $P_2(x(\cdot), t) = \frac{t^4}{24\sqrt{2}\pi^{3/2}} + \frac{t^8}{2304\pi^3}$					
m	$\ P_2 - P_{2m+1,2}\ _{L_2(0,T)}$, теор.		$\ P_2 - P_{2m+1,2}\ _{L_2(0,T)}$, факт.		$\ P_2 - P_{2m+1,2}\ _H$
	$x(z) = z$	$x(z) = z^2$	$x(z) = z$	$x(z) = z^2$	
2	8,79295	237,374	2,1126	35,9226	0,00662439
3	7,35296	196,953	1,50045	25,1137	0,00132488
10	4,12047	108,475	0,492973	8,02078	$1,69584 \cdot 10^{-8}$

Отримаємо оцінки точності інтерполянта Ерміта $\tilde{P}_{2m+1,2}$, що задовольняє збуреним інтерполяційним умовам (11). Виберемо постійні в часі збурення $\delta_{ij \dots jk} = A_{ij \dots jk} \in L_2(0, T)$,

$$\|\delta_{ij \dots jk}\|_X^2 = \int_0^T A_{ij \dots jk}^2 dt = A_{ij \dots jk}^2 T < A^2 T,$$

де

$$A = \max_{\substack{ij \dots jk, \\ k=0,1,2}} \{A_{ij \dots jk}\}.$$

$$\|\delta_{ij \dots jk}\|_X < A\sqrt{T} = \delta. \quad (24)$$

Підставляючи (32), (24) в (12) та (13) для P_2 (2) с ядрами (22) маємо

$$\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} \sqrt{T} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \frac{TrB}{3} \right)} + A\sqrt{T} \frac{TrB+2}{2},$$

а точність інтерполювання в сенсі даної оцінки не покращується при

$$m > \log_q \left(\frac{A\sqrt{T} \frac{TrB+2}{2}}{\sqrt{T} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \frac{TrB}{3} \right)}} \right) - \frac{1}{2}.$$

Оцінимо точність інтерполянта типу Абеля-Гончарова $\tilde{P}_{2m+1,2}$ в разі збурено заданих інтерполяційних умов (14). Як і раніше, $\delta_{ij \dots jk} = A_{ij \dots jk} \in L_2(0, T)$.

$$A_k = \max_{ij \dots jk} \{A_{ij \dots jk}\}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Позначимо

Неважко

помітити, що оцінка (24) перетворюється в

$$\|\delta_{ij \dots jk}\|_X < A_k \sqrt{T} = \delta_k,$$

$$A_k = \max_{ij \dots jk} \{A_{ij \dots jk}\}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (25)$$

Підставляючи (23), (25) в (16), (17) маємо

$$\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H < q^{m+1/2} \sqrt{T} \sqrt{\frac{TrB}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \frac{TrB}{3} \right)} + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 TrB + \frac{1}{4} \alpha_2^2 (TrB)^2},$$

Точність інтерполювання в сенсі даної оцінки не покращується при де $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ визначені формулами (16), (44).

$$m > \frac{1}{2} \log_q \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \text{Tr} B + \alpha_2^2 (\text{Tr} B)^2 / 4}{T \frac{\text{Tr} B}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \frac{\text{Tr} B}{3} \right)} - \frac{1}{2},$$

Таблиця 4

Результати тестових розрахунків оцінки $\|P_2 - \tilde{P}_{2m+1,2}\|_H$ при $T = 2\pi$, $q = 0.2$.

m	Інтерполяція типу Ерміта $\delta = 0,000001$	Інтерполяція типу Абеля-Гончарова $\delta_0 = 0,000001, \delta_1 = 0,000002, \delta_2 = 0,000003,$
2	0,00662721	0,00663431
3	0,0013277	0,0013348
10	$2,83692 \cdot 10^{-6}$	$9,93642 \cdot 10^{-6}$
Значення m , починаючи з якого оцінка точності інтерполювання не покращується		
7		7

Таким чином, в даній роботі для поліномів Вольтерра другого степеня в просторі $L_2(0, T)$ побудовано інтерполяційні формули типу Ерміта та Абеля-Гончарова. Такі інтерполянти є єдиними, простими за конструкцією побудови та асимптотично (в сенсі зростання числа вузлів інтерполювання) зберігають багаточлен відповідного степеня. Знайдено оцінки точності інтерполянтів в разі точно заданої вихідної інформації. Це дозволяє визначити необхідне значення m для досягнення заданої точності та не вимагати його нескінченного зростання. Також оцінено точність інтерполянтів за умов збурено заданої інтерполяційної інформації. Визначено мінімальне значення числа m , перевищення якого не покращує отриману раніше оцінку. Проведено апробацію отриманих результатів на конкретних прикладах вхідних функцій та ядер оператора. Тестові розрахунки з побудови та визначення точності інтерполяційних формул експериментально підтвердили задовільну точність інтерполювання, простоту побудови отриманих інтерполянтів та доцільність їх застосування на практиці.

Список використаних джерел

1. Хлобистов В.В., Поповичева Т.Н. Об интерполяционном приближении дифференцируемых операторов в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, №4. – С. 554-565.
2. Хлобистов В.В., Каптур О.Ф., Малишева Т.М. Про множину операторних інтерполянтів, гранично

- інваріантних щодо поліномів // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №2. – С. 246-252.
3. Хлобистов В.В., Малишева Т.М. Про оцінки точності, інтерполювання диференційованих операторів в гільбертовому просторі в разі збурених значень їх диференціалів // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №3. – С. 270-277.
4. Малишева Т.М. Про точність інтерполювання та збіжність послідовності інтерполянтів, асимптотично точних на поліномах в гільбертовому просторі // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2006. – №4. – С. 191-199.
5. Пупков К.И., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448с.

Надійшла до редколегії 18.06.07

УДК 519.21

Мартиненко І.А.*, аспірантка.

Обчислення точного рівня значущості довірчого інтервалу Вільсона для невідомої ймовірності.

В роботі обчислено точне значення рівня значущості довірчого інтервалу Вільсона для невідомої ймовірнісної події у класичній схемі Бернуллі. Знайдені усі точки розриву функції, що описує рівень значущості довірчого інтервалу у залежності від невідомої ймовірності.

Ключові слова: довірчий інтервал для невідомої ймовірності, схема Бернуллі, рівень значущості довірчого інтервалу, довірчі межі.

*E-mail: martia@rambler.ru

Вступ.

Довірчий інтервал Вільсона для невідомої ймовірності є найбільш поширеним та найбільш простим для визначення довірчих меж для цієї ймовірності, що має певний рівень значущості. На жаль наближений рівень значущості цього інтервалу не відповідає його справжньому рівню значущості, оскільки він залежить від невідомої ймовірності і може коливатися у досить широких межах. В цій роботі ми опишемо алгоритм підрахунку точного рівня значущості та дамо його точні значення для наближеного 5-ти відсоткового рівня.

1. Визначення точного значення рівня значущості інтервалу Вільсона.

Розглянемо випадкову подію:

$$p \in \left(\frac{hn + \frac{1}{2}g^2 - g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2}; \frac{hn + \frac{1}{2}g^2 + g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2} \right) \quad (1)$$

де h - частота, n - кількість випробувань, та g може набувати значення 2 або 3; цей довірчий інтервал має назву інтервал Вільсона [1]. Назвемо подію (1) A_p , її ймовірність позначимо $\varphi(p)$, тобто $\varphi(p) = p(A_p)$; обчислення точного

I. A. Martynenko, postgraduate student.

The computation of the significance level of Willson confidential interval for unknown probability.

The exact meaning of the significance level of Willson confidential interval for unknown probabilistic evidence in the Bernulli scheme has been computed in this paper. All points of discontinuity for the function of significance level of the confidential interval for unknown probability had been found.

Key words: confidential interval for unknown probability, Bernoulli scheme, significance level of confidential interval.

значення $\varphi(p)$ для інтервалу Вільсона буде метою цього розділу.

Подію A_p подамо у вигляді нерівності:

$$\frac{hn + \frac{1}{2}g^2 - g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2} \leq p \leq \frac{hn + \frac{1}{2}g^2 + g\sqrt{h(1-h)n + \frac{1}{4}g^2}}{n + g^2} \quad (2)$$

яка після простих перетворень набуває вигляду

$$\frac{2kn + ng^2 - g\sqrt{4kn(n-k) + n^2g^2}}{2n(n + g^2)} \leq p \leq \frac{2kn + ng^2 + g\sqrt{4kn(n-k) + n^2g^2}}{2n(n + g^2)} \quad (3)$$

Після розв'язання нерівності (3) відносно k ми отримаємо пару

$$\begin{cases} k_1(p) = np - g\sqrt{np(1-p)} \\ k_2(p) = np + g\sqrt{np(1-p)} \end{cases} \quad (4)$$

таких, що при $k_1(p) \leq k \leq k_2(p)$ виконується нерівність (3) для довільної $p \in [0;1]$.

Додамо також, що $k_1(p)$ та $k_2(p)$ на проміжку $[0;1]$ мають точки екстремуму,

це

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n+g^2}}; p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n+g^2}} \quad (5)$$

для $k_1(p)$ та $k_2(p)$ відповідно.

Покладемо $k_1 = [k_1(p)] + 1$, $k_1 = k_1(p)$ якщо $k_1(p)$ - ціле, та, оскільки на проміжку $[0; \frac{g^2}{n+g^2}]$ $k_1(p) \leq 0$, покладемо $k_1 = 0$ на . Аналогічно, покладемо $k_2 = [k_2(p)]$, $k_2 = k_2(p)$, якщо $k_2(p)$ ціле, та на проміжку $[\frac{n}{n+g^2}; 1]$ оскільки $k_2(p) \geq n$, ми покладемо $k_2 = n$.

Лема 1. На проміжку $[0; \frac{g^2}{n+g^2}]$ k_1 є стала величина, а на проміжку $(\frac{g^2}{n+g^2}; 1]$ зростає. Також на проміжку $[0; \frac{n}{n+g^2}]$ k_2 зростає, а на проміжку $(\frac{n}{n+g^2}; 1]$ є сталою.

Розглянемо тепер шукану функцію

$$\varphi(p) = \sum_{k: p_1 < p < p_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (6)$$

яка після перетворень (3) та (4) буде виглядати

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1(p)}^{k_2(p)} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (7)$$

Очевидно, що оскільки k_1 та k_2 змінюються в залежності від p , вигляд $\varphi(p)$ змінюється в залежності від p . Для того, щоб точно визначити вигляд $\varphi(p)$ розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} k_1(p) = i; i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} k_2(p) = j; j = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (9)$$

Розв'язком систем рівнянь (8) та (9) будуть множини (10) та (11) відповідно, де

$$\left\{ p_i^1 = \frac{2ni + g^2n + g\sqrt{g^2n^2 + 4ni(n-i)}}{2(n^2 + g^2n)} \right\}; i = \overline{0, n} \quad (10)$$

та

$$\left\{ p_j^2 = \frac{2nj + g^2n - g\sqrt{g^2n^2 + 4nj(n-j)}}{2(n^2 + g^2n)} \right\}; j = \overline{0, n} \quad (11)$$

Позначимо $P^* = \{P_1 \cup P_2\}$, де $P_1 = \{p_i^1\}_{i=0}^n$,

$k_1(p_i^1) = i$ та $P_2 = \{p_j^2\}_{j=0}^n : k_2(p_j^2) = j$. Спочатку впорядкуємо множину $P = \{P \cup P\}$ за зростанням, нова впорядкована множина $P_1^* = \{p_r\}_{r=0}^{2n}$ буде належати відрізьку $[0; 1]$, та $k_1(p) \leq k_2(p)$ при однакових p .

Лема 2. Для кожного $p_r \in P_1^*$ існує таке $i: p_r = p_i^1$ або $j: p_r = p_j^2$.

Наслідок 1. $P_1 \subset P_1^*$ та $P_2 \subset P_1^*$.

Наслідок 2. $P_1 \cup P_2 = P_1^*$

Лема 3. Нехай довільні $i, i+1, j, j+1$ належать відрізьку $[0, n]$, тоді існують $p_i^1; p_{i+1}^1 \in P_1$ та $p_j^2; p_{j+1}^2 \in P_2$, причому на проміжку $(p_i^1; p_{i+1}^1]$ нижня межа сумування для функції $\varphi(p)$ є

$$k_1 = i+1, \text{ якщо } p_i^1 > \frac{g^2}{n+g^2}, \text{ та } k_1 = 0 \text{ у}$$

протилежному випадку; а на проміжку $[p_j^2; p_{j+1}^2)$ верхня межа сумування для функції $\varphi(p)$ є

$$k_2 = j, \text{ якщо } p_j^2 < \frac{n}{n+g^2}, \text{ та } k_2 = n \text{ у}$$

протилежному випадку.

Позначимо $P_1^*(\tau) = \{p_r \in P_1^* : p_r < \tau\}$ та

$$P_1(\tau) = \{p \in P_1 : p < \tau\}; P_2(\tau) = \{p \in P_2 : p < \tau\}.$$

Нехай

$$\overline{p}_1(\tau) = \max(P_1(\tau)) = \{p(\tau) \in P_1(\tau) : \forall p \in P_1(\tau) p < p(\tau)\}$$

$$\overline{p}_2(\tau) = \max(P_2(\tau)) = \{p(\tau) \in P_2(\tau) : \forall p \in P_2(\tau) p < p(\tau)\}$$

Зазначимо ще, що $p_0 = 0$ $p_0 \in P_1^*$ та $p_{2n} = 1$;

$p_{2n} \in P_1^*$ є такими, що водночас належать P_1 та P_2 .

Алгоритм знаходження функції $\varphi(p)$ має такий вигляд.

1. В точці 0 $k_1(p) = 0$, $k_2(p) = 0$, тому покладемо $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ та $\varphi(p) = C_n^0 p^0 (1-p)^n$.

2. Очевидно, що $p_0 = 0$, $p_0 \in P_1^*$, та оберемо за $p_1 \in P_1^*$ найменшу ненульову точку множини P_1^* .

2.1 Якщо $p_1 \in P_1$, тоді на проміжку $(p_0, p_1]$

$$k_1 = 0 \text{ та } k_2 = 0, \text{ і } \varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

2.2 Якщо $p_1 \in P_2$, тоді на проміжку $(p_0, p_1]$

$$k_1 = 0 \text{ та } k_2 = 0, \text{ і } \varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

3. Візьмемо дві довільних точки $p_r, p_{r+1} \in P_1^*$, та розглянемо такі випадки.

3.1 Якщо $p_r \in P_1$ та $p_{r+1} \in P_1$, оберемо

$$\overline{p}_2(\tau) = \max(P_2(\tau)), \text{ обчислимо } k_1 = [k_1(p_r)] + 1, \text{ та}$$

$$k_2 = [k_2(\overline{p}_2(\tau))], \text{ тоді на проміжку } (p_r, p_{r+1})$$

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

3.2 Якщо $p_r \in P_1$ та $p_{r+1} \in P_2$, та оберемо

$$\overline{p}_2(\tau) = \max(P_2(\tau)), k_1 = [k_1(p_r)] + 1, \text{ та}$$

$$k_2 = [k_2(\overline{p}_2(\tau))], \text{ тоді на проміжку } (p_r, p_{r+1})$$

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

3.3 Якщо $p_r \in P_2$ та $p_{r+1} \in P_1$, то оберемо

$$\overline{p}_1(\tau) = \max(P_1(\tau)), \text{ обчислимо } k_1 = [k_1(\overline{p}_1(\tau))] + 1$$

$$\text{і } k_2 = [k_2(p_r)], \text{ тоді на проміжку } [p_r, p_{r+1})$$

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

3.4 Якщо $p_r \in P_2$ та $p_{r+1} \in P_2$, то оберемо

$$\overline{p}_1(\tau) = \max(P_1(\tau)), \text{ обчислимо } k_1 = [k_1(\overline{p}_1(\tau))] + 1$$

$$\text{і } k_2 = [k_2(p_r)], \text{ тоді на проміжку } [p_r, p_{r+1})$$

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

4. В точці $p = 1$ $k_1(1) = n$ та $k_2(1) = n$, тоді

$$\varphi(p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ де за визначенням } k_1 = n$$

та $k_2 = n$.

Дослідимо поведінку функції $\varphi(p)$ на відрізку $[0, 1]$.

Теорема 1. Елементи множини P_1^* є точками розриву функції $\varphi(p)$ на відрізку $[0, 1]$, крім

точок $p = 0$ та $p = 1$, в яких функція $\varphi(p)$ є неперервною справа та зліва відповідно.

Розглянемо тепер додаткові властивості елементів множини P_1^* . Для цього сформулюємо таке твердження.

Лема 4. Нехай довільні $i: i = \overline{0; n}$ та $j: j = \overline{0; n}$ є такими, що $i + j = n$. Тоді виконується рівність $p_i^1 + p_j^2 = 1$ (12).

Користуючись тепер лемою 3 та лемою 4, а також алгоритмом доведемо таке твердження.

Теорема 2. Функція $\varphi(p)$ є симетричною відносно точки $p = 1/2$, тобто

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - \overline{p}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2} + \overline{p}\right).$$

2. Обчислення точного вигляду функції $\varphi(p)$.

Визначимо тепер, як виглядає $\varphi(p)$ при різних значеннях n та g .

Оскільки $\varphi(p)$ є симетричною функцією відносно точки $1/2$, то наведені приклади є лише частковим описанням функції на проміжку $[0; 0.5]$.

В Таблиці №1 представлений вигляд функції $\varphi(p)$ при $n = 10$ та $g = 2$

Вигляд функції $\varphi(p)$ Таблиця 1.

Інтервали	k_1	k_2
(0; 0.0174)	0	0
[0.0174; 0.0554)	0	1
[0.0554; 0.1056)	0	2
[0.1056; 0.1652)	0	3
[0.1652; 0.2327)	0	4
[0.2327; 0.2857]	0	5
(0.2857; 0.3080)	1	5
[0.3080; 0.3913)	1	6
[0.3913; 0.4112]	1	7
(0.4112; 0.4839)	2	7
[0.4839; 0.5]	2	8

Таким самим чином, у вигляді Таблиці №2, ми можемо представити функцію рівня значущості $\varphi(p)$, коли $n = 10$ та $g = 3$.

Вигляд функції $\varphi(p)$ Таблиця 2.

Інтервали	k_1	k_2
(0;0.0092)	0	0
[0.0092;0.0323)	0	1
[0.0323;0.0654)	0	2
[0.0654;0.1069)	0	3
[0.1069;0.1559)	0	4
[0.1559;0.2122)	0	5
[0.2122;0.2760)	0	6
[0.2760;0.3481)	0	7
[0.3481;0.4303)	0	8
[0.4303;0.4737]	0	9
(0.4737;0.5)	1	9

Аналогічно ми представляємо в Таблиці 3 вигляд функції $\varphi(p)$ при $n=20$ та $g=2$

Вигляд функції $\varphi(p)$ Таблиця 3.

Інтервали	k_1	k_2
(0;0.0086)	0	0
[0.0086;0.0272)	0	1
[0.0272;0.0513)	0	2
[0.0513;0.0792)	0	3
[0.0792;0.1100)	0	4
[0.1100;0.1433)	0	5
[0.1433;0.1667)	0	6
(0.1667;0.1787)	1	6
[0.1787;0.2160)	1	7
[0.2160;0.2414]	1	8
(0.2414;0.2551)	2	8
[0.2551;0.2959)	2	9
[0.2959;0.3061]	2	10
(0.3061;0.3384)	3	10
[0.3384;0.3653]	3	11
(0.3653;0.3826)	4	11
[0.3826;0.4208]	4	12
(0.4208;0.4287)	5	12
[0.4287;0.4733]	5	13
(0.4733;0.4766)	6	13
[0.4766;0.5234]	6	14

Аналогічно ми представляємо в Таблиці 4 вигляд функції $\varphi(p)$ при $n=20$ та $g=3$

Вигляд функції $\varphi(p)$ Таблиця 4.

Інтервали	k_1	k_2
(0;0.0046)	0	0
[0.0046;0.0160)	0	1
[0.0160;0.0320)	0	2
[0.0320;0.0516)	0	3
[0.0516;0.0742)	0	4
[0.0742;0.0993)	0	5
[0.0993;0.1268)	0	6
(0.1268;0.1564)	0	7
[0.1564;0.1879)	0	8
[0.1879;0.2215)	0	9
[0.2215;0.2569)	0	10
[0.2569;0.2943)	0	11
[0.2943;0.3103]	0	12
(0.3103;0.3337)	1	12
[0.3337;0.3747]	1	13
(0.3747;0.3752)	2	13
[0.3752;0.4190)	2	14
[0.4190;0.4323]	2	15
(0.4323;0.4654)	3	15
[0.4654;0.4853]	3	16
(0.4853;0.5147)	4	16

3. Висновки.

Наведені у роботі результати показують, що рівень значущості класичного довірчого інтервалу Вільсона коливаються в широких межах, тому при обчисленні цього рівня необхідно замінити невідому ймовірність p її частотою h і обчислити рівень значущості за допомогою формули (7) при проведенні всіх кроків алгоритму.

Список використаних джерел.

1) Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский, Курс теории вероятностей и математической статистики. – Москва: Наука, 1965

Надійшла до редколегії 21.06.2007

УДК 519.21

Нікітін А.В. к.ф.-м.н., доцент

Стійкість у середньому квадратичному стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода зі сталими коефіцієнтами у гільбертовому просторі

Одержані умови стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями у гільбертовому просторі.

Вступ.

Асимптотичні задачі для стохастичних диференціальних рівнянь виникали і розв'язувалися одночасно з виникненням теорії стохастичних диференціальних рівнянь, оскільки засновник цієї теорії Й.І. Гіхман розглядав задачі про асимптотичну поведінку як первинні. Самі стохастичні диференціальні рівняння будувалися Й.І. Гіхманом для того, щоб можна було не тільки строго сформулювати асимптотичні задачі, але й їх розв'язувати.

Можна виділити такі напрямки дослідження асимптотичних властивостей динамічних систем з випадковими збуреннями:

- 1) дослідження поведінки динамічної системи при $t \rightarrow +\infty$;
- 2) дослідження системи, що залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$ при його прямуванні до 0;
- 3) дослідження системи при одночасному прямуванні ε до 0, а t до $+\infty$.

При розгляді асимптотичної поведінки динамічної системи при $t \rightarrow +\infty$ дослідників цікавить стабілізація цієї системи. Терміном "стабілізація" системи можна характеризувати деяку закономірність, яка притаманна поведінці системи.

Найбільш грубим характером такої стабілізації є обмеженість за ймовірністю, з якої впливає ергодичність динамічної системи. Ця властивість найбільш точно характеризує поведінку системи на проміжку $[0, +\infty)$.

При вивченні поведінки динамічних систем на $[0, +\infty)$ природньо виникають

Nikitin A.V. cand.phys.-math., docent

Stability in the mean square of Ito-Skorohod stochastic differential equations with constant factors in Space of Gilbert

Conditions of stability of solutions of the stochastic differential equations with poisson perturbations in Space of Gilbert are received.

*E-mail: nik_tol@rambler.ru

питання про асимптотичну стійкість цих систем в околі стану рівноваги чи її нестійкість. Для стохастичних систем при певних припущеннях із стійкості впливає асимптотична стійкість. Особливу зацікавленість представляють собою лінійні системи, для яких фазова нульова точка є єдиною точкою рівноваги. Такі системи або стійкі, або нестійкі, при цьому система або прямує до безмежності, або осцилює.

Перенесення результатів, що стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на безмежновимірний випадок далеко не тривіальне. Вивчення стохастичних лінійних систем призвело до поняття стохастичної підгрупи, яке ввів А.В. Скороход. Середньоквадратична стійкість розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь пов'язана зі стійкістю вже не випадкових підгруп у банаховому просторі лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі.

Дана робота продовжує ці дослідження і присвячена аналізу стійкості систем стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями у гільбертовому просторі у нескінченновимірному випадку.

Мета.

Метою роботи є подальше дослідження стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

Основний результат.

Нехай X – сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком (x, y) і нормою $|x|$. На імовірнісному просторі (Ω, F, P) з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\} \subset F$ розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_t = X_t A dt + \sum_{k=1}^{\infty} (X_t B_k dW_k(t) + \int_U C_k(u) X_t \tilde{V}_k(dt, du)), \quad (1)$$

де $A, B_k, C_k(u)$ – необмежені лінійні оператори, які визначені на деякій щільній в X множині D , причому для $x \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k x|^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k(u) x|^2 < \infty,$$

$W_k(t)$ – незалежні між собою вінерівські процеси, $\tilde{V}_k(dt, du)$ – незалежні між собою центровані пуассонівські міри (вінерівські процеси і пуассонівські міри узгоджені з потоком F_t).

Рівняння (1) розв'язується при заданій початковій умові X_0 , незалежній від $\{W_k, k = 1, 2, \dots\}$ і $\{\tilde{V}_i, i = 1, 2, \dots\}$. Нас цікавитиме випадок, коли рівняння (1) має розв'язок, що володіє другим моментом. Зауважимо, що розв'язком цього рівняння вважається такий сильний операторний процес X_t , для якого при $x \in D$ функція $X_t x$ має стохастичний диференціал, що співпадає з результатом дії на x правої частини (1).

Розглянемо сильні однорідні стохастичні півгрупи U_t^s з другими моментами. Введемо позначення для півгруп перших та других моментів:

$$M_t = M U_t^0, V_t(C) = M U_t^{0*} C U_t^0.$$

Відносно стохастичної півгрупи покладемо виконаною одну з властивостей неперервності:

а) півгрупа U_t^0 сильно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M |U_t^0 x - x|^2 = 0;$$

б) півгрупа U_t^0 рівномірно неперервна в середньому квадратичному, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq 1} M |U_t^0 x - x|^2 = 0.$$

Умові а) задовольняють розв'язки рівняння (1). Умова б) еквівалентна умові

$$\lim_{t \rightarrow 0} M \|V_t(I) - I\| = 0.$$

Через $Q(H)$ позначатимемо твірний оператор півгрупи $V_t(H)$:

$$Q(H) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [V_t(H) - H],$$

де границя операторів вважається слабкою.

Зокрема, якщо стохастична півгрупа породжується рівнянням (1), то $Q(H)$ задається формулою

$$Q(H) = A^* H + H A + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^* H B_k + \int_U C_k^*(u) H C_k(u) \Pi(du)) \quad (2)$$

Якщо H входить в область визначення твірного оператора Q , то справедливі рівняння:

$$\frac{d}{dt} V_t(H) = Q(V_t(H)) = V_t(Q(H)). \quad (3)$$

Означення 1. Стохастична півгрупа U_t^s називається рівномірно асимптотично стійкою в середньому квадратичному, якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq 1} M |U_t^0 x|^2 = 0, \quad (4)$$

$$M |U_t^0 x|^2 = (V_t(I)x, x).$$

Співвідношення (4) еквівалентне умові $\|V_t(I)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Оскільки

$$V_{t+s}(I) = V_t(V_s(I)),$$

$$\|V_{t+s}(I)\| \leq V_t(\|V_s(I)\| I) \leq \|V_s(I)\| \|V_t(I)\|,$$

то з рівномірної асимптотичної стійкості в середньому квадратичному випливає експоненціальна стійкість в середньому квадратичному, тобто існує таке $\alpha > 0$, що

$$\|V_t(I)\| \leq \frac{I}{\alpha} \exp\{-\alpha t\}. \quad (5)$$

Теорема 1. Нехай стохастична півгрупа задовольняє умові б). Наступні твердження еквівалентні:

1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V_t(I)\| = 0$;

2) існує додатний оператор H , який має обмежений обернений, для якого $Q(H) \leq \alpha H$, $\alpha > 0$;

3) для всіх $x \in X$ $\int_0^\infty (V_t(I)x, x) dt < \infty$.

Якщо виконаною є одна з цих умов, то $P_x\{\lim_{t \rightarrow \infty} |U_t^0 x| = 0\} = 1$.

Доведення. З твердження 1) випливає твердження 3) на підставі оцінки (5). Якщо виконане твердження 2), то

$$\frac{d}{dt} V_t(H) = V_t(Q(H)) \leq -\alpha V_t(H)$$

і, значить,

$$V_t(H) \leq \exp\{-\alpha t\} H, \|V_t(H)\| \leq \exp\{-\alpha t\} \|H\|.$$

Оскільки при деякому $\delta > 0$ $\delta I \leq H$, то

$$\|V_t(I)\| \leq \frac{1}{\delta} \|V_t(H)\| \leq \frac{\|H\|}{\delta} \exp\{-\alpha t\}.$$

Отже, з твердження 2) випливає твердження 1). Залишається показати, що з твердження 3) випливає твердження 2). Покладемо

$$C = \int_0^\infty V_t(I) dt.$$

Очевидно, що C – симетричний невід'ємний оператор. З умови б) випливає, що існує таке $\delta > 0$, що при $t < \delta$ $\|V_t(I) - I\| < 1/2$ і, значить,

$$V_t(I) \geq \frac{1}{2} I. \text{ Тому}$$

$$C \geq \int_0^\delta V_t(I) dt \geq \frac{\delta}{2} I.$$

Далі з урахуванням нерівності (5),

$$Q(H) = \int_0^\infty Q(V_t(I)) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} V_t(I) dt = -I.$$

Отже,

$$Q(H) = -I \leq -\frac{1}{\|H\|} H.$$

Нехай виконана умова 2). Тоді $\exp\{\alpha t\}(CU_t^0 x, U_t^0 x)$ є супермартингалом:

$$\text{якщо } F_t - \text{потік } \sigma - \text{алгебр, породжених } U_t^0, \text{ то}$$

$$M[\exp\{\alpha(t+h)\}(CU_{t+h}^0 U_t^0 x, U_{t+h}^0 U_t^0 x) / F_t] =$$

$$= \exp\{\alpha(t+h)\}(V_h(H) U_t^0 x, U_t^0 x) =$$

$$= e^{\alpha t} (CU_t^0 x, U_t^0 x) +$$

$$+ e^{\alpha t} \int_0^h \frac{d}{du} e^{\alpha u} (V_u(C) U_t^0 x, U_t^0 x) du = e^{\alpha t} (U_t^0 x, U_t^0 x) +$$

$$+ e^{\alpha t} \int_0^h ([aV_u(C) + V_u(Q(C))] U_t^0 x, U_t^0 x) e^{\alpha u} du =$$

$$= e^{\alpha t} (CU_t^0 x, U_t^0 x) +$$

$$+ e^{\alpha t} \int_0^h (V_u(aC + Q(C)) U_t^0 x, U_t^0 x) e^{\alpha u} du \leq$$

$$\leq e^{\alpha t} (CU_t^0 x, U_t^0 x).$$

(ми використали нерівність $aC + Q(C) \leq 0$).

Тому, $e^{\alpha t} (CU_t^0 x, U_t^0 x)$ - величина обмежена та $(CU_t^0 x, U_t^0 x) = 0(e^{-\alpha t})$. Оскільки $C > \delta I$ при деякому $\delta > 0$, то

$$|U_t^0 x|^2 = 0(e^{-\alpha t}). \text{ Теорему доведено.}$$

Висновки.

Отже, отримано умови стійкості розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

Список використаних джерел

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.

Надійшла до редакції 05.09.2007

УДК 004.7

Романюк С.І., Цикунов В.С., Шевченко В.П.*,
к.ф.-м.н., доц.

Програмні та апаратні засоби побудови комп'ютерної мережі факультету

Розглянуто основні завдання та функціональні особливості комп'ютерної мережі факультету, архітектурні, технічні та інформаційні особливості її побудови, сервіси та послуги, які підтримуються такою мережею.

Ключові слова: комп'ютерна мережа, архітектура, програмне та апаратне забезпечення, мережні сервіси.

Romanyuk S.I., Tsykunov V.S., Shevchenko V.P.,
c.ph.-m.s., as.prof.

Software and hardware tools for faculty computer network creation

Main tasks, functional features, architecture, technical and informational characteristics of the structure, network services for faculty computer network construction are considered.

Key Words: computer network, architecture, software, hardware, network services.

*E-mail: ats@univ.kiev.ua, bool@unicyb.kiev.ua, vpsh@unicyb.kiev.ua

Вступ.

Доступ освітніх закладів до інформаційних ресурсів та сучасних видів сервісу глобальних телекомунікаційних комп'ютерних мереж є одним з найважливіших факторів освітнього прогресу на сучасному етапі. Рівень розвитку телекомунікаційних мереж сфери освіти та науки в багатьох випадках визначає поступ освітніх закладів в багатьох стратегічних напрямках. Перші експерименти по створенню комп'ютерних мереж на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка було розпочато ще на початку 80-х років [1].

Комп'ютерна мережа факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка створювалась і розвивалась паралельно з розвитком мережних засобів обчислювальної техніки: від великих і середніх ЕОМ до сучасної персональної техніки. За цей час кілька разів змінювались комп'ютерні платформи, елементна база, мережеві технології. Сьогодні факультетська мережа об'єднує біля 200 персональних комп'ютерів 9 кафедр, 6 лабораторій, 12 комп'ютерних класів, адміністративних та господарських служб, 8 серверів, обчислювальний кластер (11 вузлів).

Мережа факультету базується на структурованій кабельній системі, основу якої становлять канали 100 Мбіт, підключені за топологією "Зірка" до центрального гігабітного комутатору. Вихід у зовнішній забезпечується через два канали: 100 Мбіт і 256Кбіт.

На факультеті функціонує ряд загальнофакультетських сервісів: пошта, фін-

архів, веб-сервер, служба DNS і т.д., а також сервіси, що надаються окремими кафедрами, лабораторіями й викладачами через свої власні сайти, організовані студентами й випускниками сайти, форуми, архіви й списки розсилання.

Функціональна структура комп'ютерної мережі факультету

Аналіз інформаційних потоків факультету та шляхів розв'язання аналогічних проблем в інших країнах, зокрема Росії, [2] показав, що комп'ютерна мережа повинна забезпечувати такі напрямки діяльності факультету:

- **Навчальний** - до нього відносяться всі процеси, що пов'язані з освітнім процесом студентів та аспірантів.
- **Науковий** - пов'язаний з проведенням наукових досліджень, обміном науковою інформацією тощо.
- **Адміністративний** - забезпечує організаційну підтримку навчальної, наукової та інших видів діяльності факультету.
- **Технічний** - спрямований на підтримку та розвиток технічної бази інформаційно-обчислювальних систем, мережевої інфраструктури, енергетичних систем тощо.

Потреби в інформаційних і обчислювальних сервісах, що входять до технічного блоку, пов'язані з необхідністю забезпечення ефективного керування інформаційною системою (ІС) факультету. У рамках цього блоку розглядаються наступні потреби:

- Віддалений моніторинг стану мережного устаткування, віддалене його конфігурування.

- Моніторинг стану мережі, у тому числі зовнішніх каналів.
- Робота із заявками користувачів щодо факультетських сервісів.
- Моніторинг і адміністрування комп'ютерів у класах.

Основне завдання інформаційно-обчислювального сектору (ІОС) – створення й підтримка ефективної, безпечної, надійної й недорогої в обслуговуванні системи для забезпечення розвитку факультету.

Основні вимоги до інформаційної інфраструктури факультету:

- **Скорочення вартості.** Вартість використання обчислювальних і інформаційних ресурсів складається із двох складових: початкових витрат на закупівлю техніки, розробку й впровадження й поточні витрати на обслуговування й модернізацію техніки й мережної інфраструктури, підтримку й модернізацію програмного забезпечення (ПЗ), навчання користувачів, усунення технічних проблем періоду використання і т.п.

- **Забезпечення безпеки й надійності.** При проектуванні ІС повинні бути враховані вимоги безпеки й надійності. Для побудови ІС повинні використовуватися перевірені з точки зору безпеки й надійності архітектури, стандарти, технології.

Основні факультетські сервіси та послуги для різних груп користувачів, які забезпечуються технічною інфраструктурою:

1. **Віддалений і бездротовий доступ до мережі факультету.** Сервіс дозволяє користувачам, по-перше, підключати свої мобільні й стаціонарні системи до факультетської мережі, перебуваючи будинку на території, а по-друге, дозволяє віддаленим користувачам (з дому, з мережі іншої організації, через мобільні точки входу в Інтернет) працювати так, ніби вони перебувають у факультетській мережі.

2. **Забезпечення функціонування факультетської мережі.** Сервіс забезпечує функціонування факультетської мережі, основних серверів, зв'язок внутрішньої мережі з Інтернетом, доступ до електронних бібліотек.

3. **Система резервного копіювання даних із серверів.** Сервіс дозволяє робити резервні копії даних із серверів, що працюють у факультетській мережі, управляти резервними копіями, відновлювати з них дані.

Потреби користувачів в обчислювальних та інформаційних ресурсах

Головна діяльність інформаційно-обчислювального сектору (ІОС) факультету сконцентрована на наступних напрямках: навчальному, науковому та адміністративному.

Телекомунікаційна інфраструктура в освітній сфері повинна забезпечувати вільний та ефективний доступ студентів та викладачів до освітніх порталів, електронних бібліотек, інших інформаційних ресурсів. Потреби в інформаційних і обчислювальних ресурсах, що необхідні різним користувачам в рамках **навчального блоку**, пов'язані з підтримкою й підвищенням ефективності викладання й навчання, підвищенням ефективності комунікації між викладачами, студентами та адміністрацією, підвищенням зручності роботи викладачів, студентів та адміністрації, наданням додаткових можливостей для навчання, залученням абітурієнтів, підвищенням привабливості навчання. Це включає в себе:

- Спілкування між студентами з поточних навчальних питань.
- Підтримка спільної роботи над навчальними проектами.
- Доступ до лабораторного устаткування й обчислювальних ресурсів факультету для виконання практичних завдань, курсових і дипломних робіт.
- Підвищення зручності роботи з електронною бібліотекою факультету. Доступ до електронних версій учбово-методичних матеріалів з поточних дисциплін. Формування архіву навчальних матеріалів і дистанційних курсів.
- Оповіщення про зміни в розкладі, доступ до поточного розкладу.
- Спілкування й підтримка спільної роботи між викладачами, забезпечення доступу викладачів до матеріалів, що розроблені їхніми колегами.
- Контроль за навчальною активністю студентів.
- Підготовка навчальних матеріалів, завдань, практичних вправ і лабораторних робіт.
- Підготовка навчально-методичних матеріалів в електронній формі.
- Доступ до навчально-методичних матеріалів з аудиторій та з мобільних пристроїв.
- Підтримка взаємодії з викладачами інших факультетів і ВНЗ.

Потреби в інформаційних і обчислювальних послугах, що необхідні в рамках **наукового блоку**, пов'язані з підвищенням ефективності

наукових досліджень, зменшенням витрат, залученням партнерів із промисловості, державних структур та фондів.

- Обговорення наукових проблем (механізми форуму, «whiteboard», конференції й т.д.).

- Доступ до відкритої частини електронного архіву публікацій, навчальних і наукових матеріалів.

- Доступ до опису поточних та завершених наукових проектів, проведених на факультеті.

- Доступ до електронних бібліотек:

- до зовнішніх закритих електронних бібліотек.

- до зовнішніх відкритих електронних бібліотек.

- до факультетської електронної бібліотеки.

- Доступ до інформації про дослідження, що ведуться на факультеті, і проектах, що завершилися.

- Доступ до резюме викладачів, студентів і аспірантів.

- Організація доступу до обчислювальних і інформаційних ресурсів факультету.

- Оформлення публікацій в електронних наукових виданнях, участь у міжнародних грантах та проектах.

Потреби в інформаційних і обчислювальних сервісах, що необхідні в рамках адміністративно-блоку пов'язані з необхідністю забезпечення ефективного керування факультетом

- Контроль якості бізнес-процесів факультету у відповідності зі своїми повноваженнями й зі своєю зоною відповідальності

- Стратегічне керування на основі показників якості

- Забезпечення доступу всім категоріям користувачів до відкритих адміністративних документів і звітів факультету.

- Архів офіційних документів факультету.

- Створення й поширення розкладу занять

Фізична структура мережі факультету

Стационарна кабельна система факультету кібернетики має топологію «зірка» та дворівневу структуру [3]. При прокладенні кабельної системи використовувались кабелі UTP категорії 5e.

Топологія мережі повторює організаційну структуру факультету, що дає змогу ефективного керування кабельною системою та забезпечення необхідного рівня відмовостійкості.

Центром мережі є «Центр обробки даних» (ЦОД) до якого сходяться кабелі з усіх організаційних підрозділів факультету (кафедр;

деканату, служб та навчальних комп'ютерних класів).

На кінці більшості кабелів першого рівня знаходяться комутатори або повторювачі, що дають змогу надати підключення до мережі необхідній кількості споживачів кожного підрозділу.

Кабельна система дає змогу побудувати локальну мережу пропускною здатністю до 1 Гігабіт/сек.

Мережеве обладнання, яке використовується для забезпечення необхідної пропускної спроможності мережі це - активні комутатори та повторювачі пропускною здатністю 10М/с, 100 М/с та 1 Г/с.

Більша частина мережі побудована на активному мережевому обладнанні Allied Telesyn. В центрі «зірки» розташований керований комутатор потужністю 48 портів. Доступ до серверів у «демілітаризованій» (закритій) зоні забезпечений 12 портовим комутатором пропускної здатності 1 Г/с. Кафедри, служби та навчальні класи підключаються до кабельної мережі від ЦОД за допомогою комутаторів з різною кількістю портів (рис.1).

Застосування та специфікація серверів. Функціонування головних сервісів мережі факультету кібернетики забезпечують 8 серверів різної потужності під керування операційних систем Windows Server, FreeBSD та Linux. Сервери розташовані у двох 19" стійках в «Центрі обробки даних». Детальне застосування та специфікації серверів подані на рисунку 2.

Загальні вимоги до інформаційної системи факультету

Основні вимоги до інформаційної інфраструктури факультету стосовно ПЗ наступні:

- Ліцензійна чистота. При проектуванні систем кількість потрібних ліцензій повинна не мінімізуватись, а визначатись на основі фінансово-економічного аналізу запропонованих рішень.

- Доступність для користувачів і простота освоєння. Усі компоненти ІС повинні бути повністю документовані й містити докладний опис інтерфейсів і логіки. У свою чергу, всі зв'язки компонентів, що утворюють ІС, також повинні бути повністю описані й документовані.

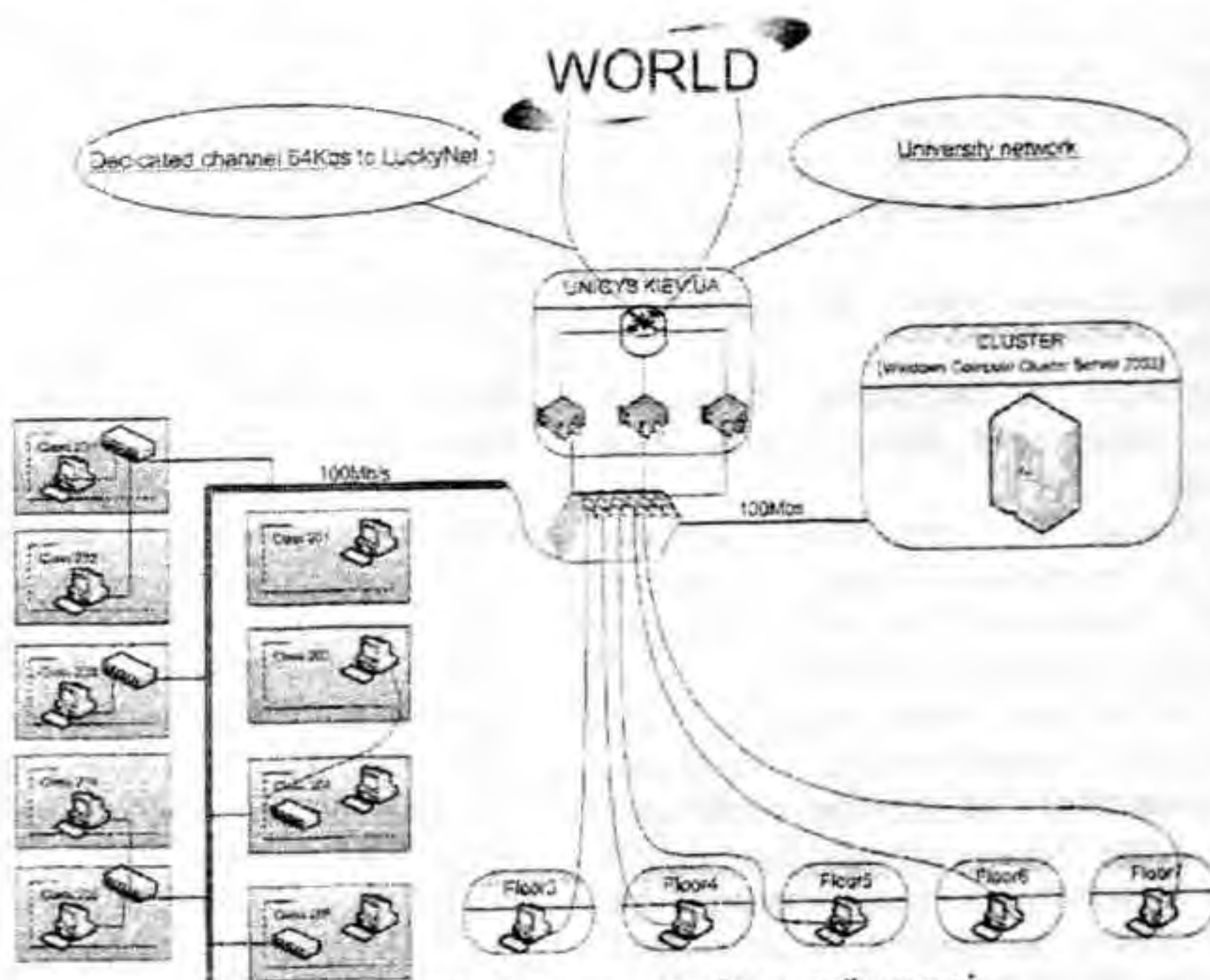


Рис.1. Загальна схема комп'ютерної мережі

- Інтеграція різних інформаційних систем між собою. ІС повинна бути побудована так, щоб існуючі системи могли легко взаємодіяти між собою.

Необхідні інформаційно-обчислювальні послуги

До основних факультетських сервісів та послуг для різних груп користувачів слід віднести:

1. **Транспорт для доставки повідомлень користувачам.** Сервіс призначений для доставки належним чином інформаційних та інших повідомлень користувачам. Цей сервіс передбачає реалізацію наступних підсистем:

- Поштовий сервіс.
- Сервіс планування часу й організації спільної роботи.

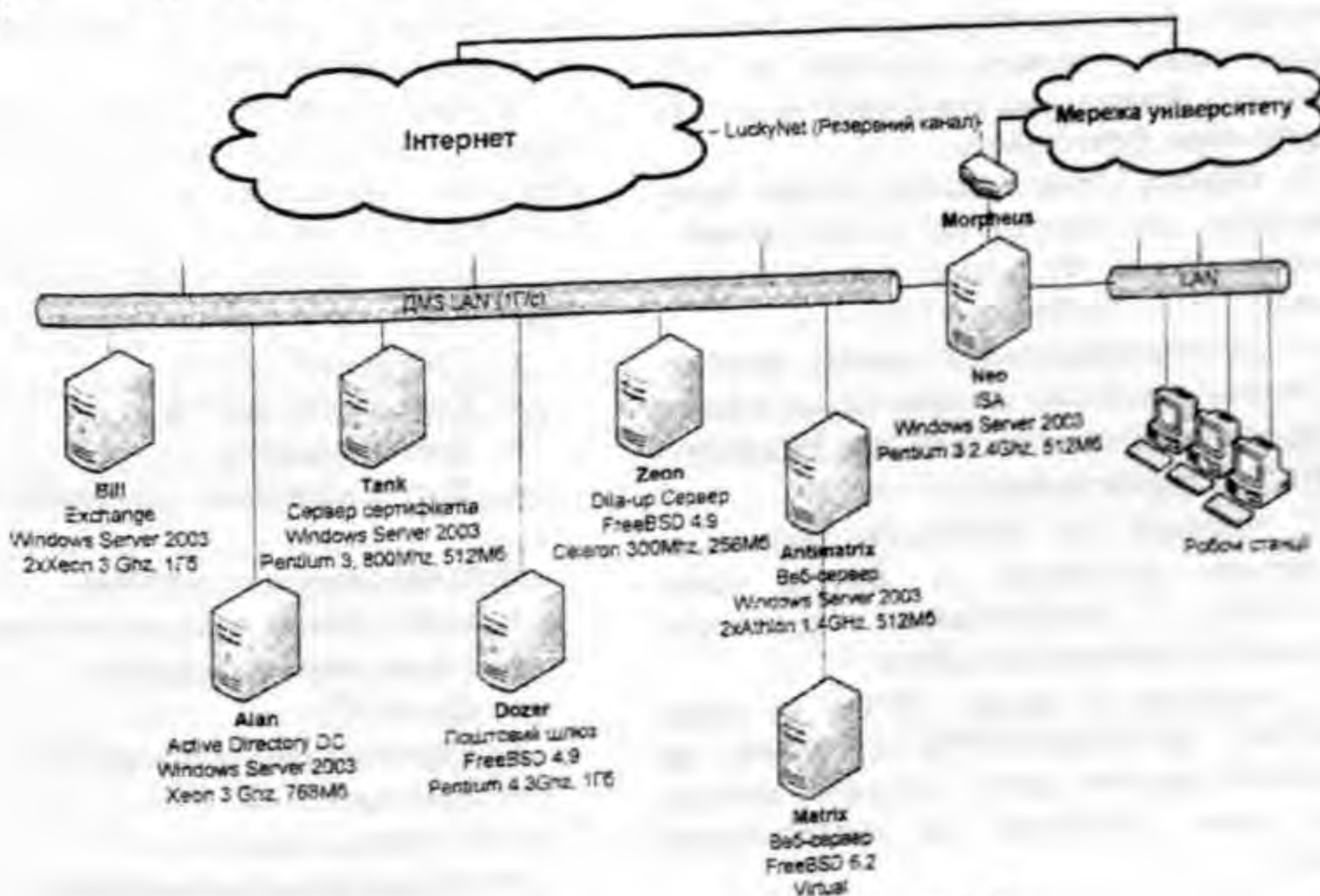


Рис.2 Застосування та специфікація серверів

- Сервіс системи миттєвого обміну повідомленнями.

2. **Електронна бібліотека.** Сервіс надає користувачу єдину точку доступу до факультетських бібліотечних ресурсів і забезпечує:

- Автоматизацію роботи із традиційною бібліотекою.
- Зберігання й оновлення навчальних матеріалів в електронній формі з рубрикацією по предметах.
- Зберігання й оновлення наукових матеріалів в електронній формі - статей, монографій, студентських курсових і дипломів, дисертацій, факультетських збірників і т.д.

- Доступ до інших електронних бібліотек.

3. **Надання користувачам надійного файлового сховища** для зберігання особистої інформації. Користувачам повинна бути надана можливість зберігати на одному із серверів факультету необхідну їм інформацію. Ця інформація повинна зберігатися надійно, тобто із забезпеченням дублювання і резервного копіювання. Це дозволить уникнути зберігання інформації на ненадійних персональних комп'ютерах (ПК) і дозволить знизити вартість аміністрування ПК.

4. **Пошук по факультетських ресурсах.** Сервіс дозволяє централізовано, з використанням однієї точки доступу, шукати інформацію по факультетським інформаційним ресурсам з урахуванням рівня доступу користувача. Крім системи пошуку по ключових словах, сервіс повинен містити в собі рубрикатор. Важливо, що для користувача точка входу повинна бути єдиною.

5. **Портал.** Сервіс є єдиною точкою входу й основою для доступу до інших систем і сервісів факультету таких як: форуми, календарі, вікі, документи й т.д.

6. **Дистанційне (електронне) навчання**, як особливий вид доступу до освітніх та інформаційних джерел повинно забезпечувати комплекс технологій:

- навчання за допомогою навчально-методичних комплектів та завдань (кейс-технологія з використанням друкованих матеріалів та електронних носіїв);
- навчання в режимі off-line на основі поштових протоколів (POP3 та IMAP4), що передбачає ведення архіву, тестуючої системи, бази даних, бібліотеки та диспетчеризації пошти;

- навчання в режимі on-line на основі протоколів HTTP та FTP, які дозволяють використати інтерактивні технології навчання.

Реалізовані сервіси дозволяють викладачам створювати й викладати дистанційні курси, у тому числі з використанням механізму віртуальних лабораторій, відслідковувати діяльність студентів у рамках дистанційного курсу, збирати статистику. Студенти за допомогою цього сервісу можуть проходити дистанційні курси, спілкуватися з викладачем і асистентами, виконувати самостійні роботи.

7. **Методична підтримка користувачів.** Організація роботи комп'ютерної мережі вимагає цілого ряду організаційних заходів, які, насамперед, повинні забезпечити правильне користування обладнанням, програмним забезпеченням та ресурсами мережі. Тому надзвичайно важливим фактором стала підготовка та поширення методичних матеріалів та інструкцій для користувачів, проведення семінарів для викладачів та співробітників, підтримка відповідних навчальних курсів для студентів.

Програмна реалізація інформаційної системи факультету

Мережа факультету має наступну логічну структуру. Локальна мережа відділена від зовнішнього світу (Інтернет та мережі університету) мережним екраном. Усі сервери знаходяться у демілітаризованій зоні і захищені від локальної мережі та зовнішнього світу мережним екраном (рис.3).

Функції пристрою, що розмежовує сегменти мережі, публікує сервіси та забезпечує доступ віддалених користувачів відіграє Microsoft Internet Security and Acceleration Server 2004.

Сервери надають користувачам наступні первинні сервіси та сервіси підтримки:

- Електронної пошти
- Колективної роботи
- Доступ в мережу
- Доступ в Інтернет з локальної мережі

Поточні сервіси та служби:

- Сервіс обміну повідомленнями
- Сервіс зберігання файлів
- Сервіс FTP
- Сервіс віддаленого доступу
- Веб-сервіс
- Служба каталогу
- Служба резервування даних
- Служба сертифікатів

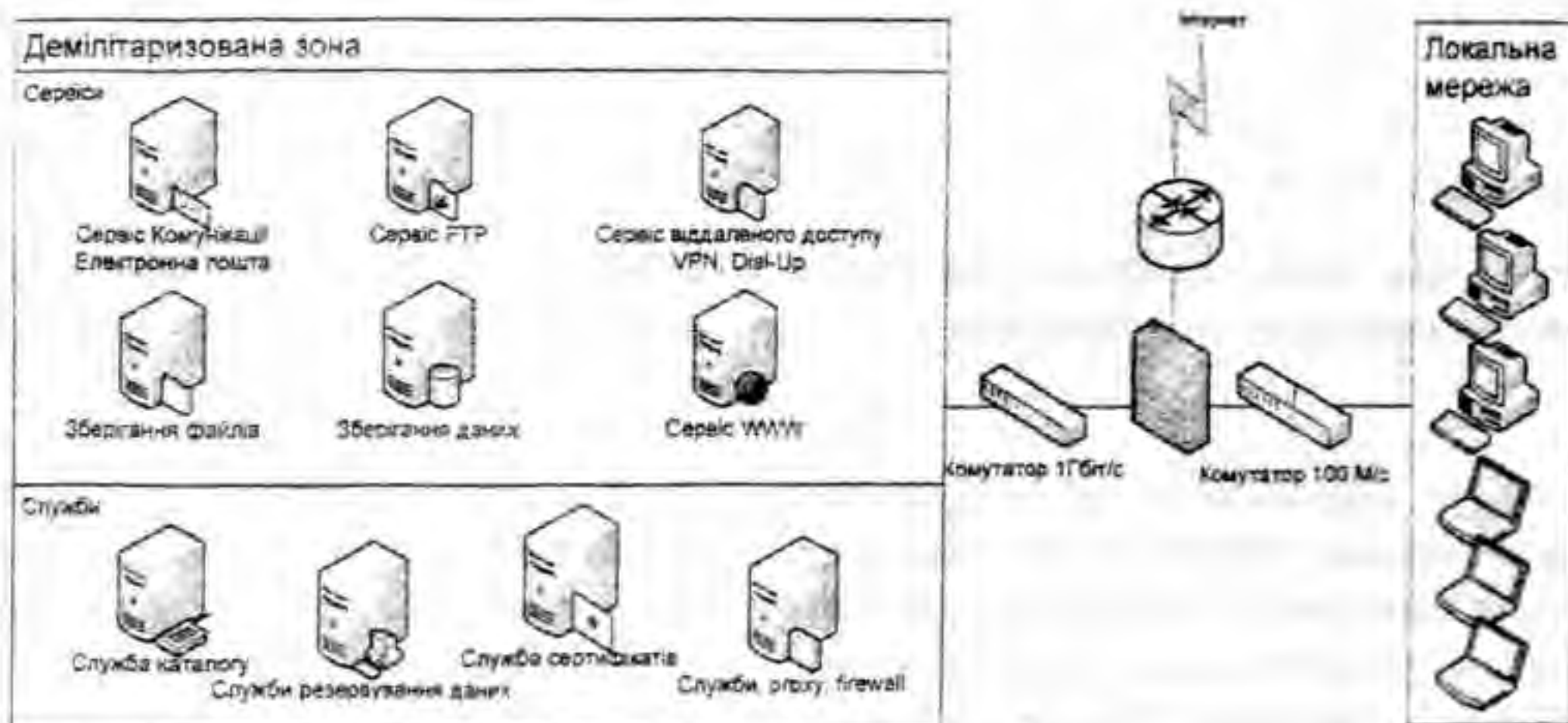


Рис.3 Логічна схема мережі

Висновки. Створення системи доступу до інформаційних ресурсів телекомунікаційних мереж може здійснюватись на базі різноманітних програмно-технічних засобів та каналів зв'язку, економічна доцільність використання яких повинна визначатися в кожному конкретному випадку з урахуванням географічного розташування, чисельності користувачів, профілю закладу. Проведений аналіз потреб користувачів факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка дав змогу сформулювати необхідний перелік сервісів та послуг, що мають надаватися інформаційно-обчислювальним сектором. Найбільш важливими є потреби стабільної базової інфраструктури, сервісів обміну повідомленнями та порталу.

Аналіз поточного стану розвитку інформаційної системи університету виявив наявність базової інфраструктури та найбільш необхідних сервісів: обмін повідомленнями, доступ до сховища файлів, веб-сайти та підключення віддалених користувачів. Наявна інфраструктура ефективно забезпечує поточні та перспективні потреби користувачів.

Аналіз поточного стану базової інфраструктури виявив основні системні вимоги та технічні потреби користувачів. Насамперед, це забезпечення надійності робочих місць та каналів зв'язку, можливість архівування даних, наявність бездротового доступу, висока швидкість трафіку, як всередині мережі, так і з зовнішнім світом. Досвід експлуатації мережі показав, що для корпоративної мережі такого масштабу оптимальною є дворівнева мережа, у якій на верхньому рівні знаходиться ЦОД (серверний та комутаційний вузол), на другому

– комутаційне обладнання або сервери кафедр, служб, комп'ютерних класів, точки бездротового доступу, а вже під ними – робочі станції. Відповідно зв'язкова мережа повинна забезпечувати, принаймні, десятикратне збільшення швидкості обміну з підвищенням рівня мережі.

Список використаних джерел

1. Tretyak Oleg V., Shevchenko Volodymyr P. Kiev University Network – Goals and Principles. Proceedings of AFCEA Europe Seminar "The Information Technology Contribution to the Building of a Safe Regional Environment" Section 2. "Information Technologies – Technical Assessment". - Kiev, 1998. - P.28-31.
2. Герасимов В.В., Гугель Ю.В., Курмышев Н.В., Сигалов А.В. Система образовательных порталов России: анализ телекоммуникационной инфраструктуры, общие требования к аппаратным платформам, технические аспекты размещения // Сб. статей "Образовательные порталы России". Вып. 1. Научн. ред. В.В. Радаев. - М.: Технопечать, 2004. - С. 25-129.
3. Таненбаум Э.С. Компьютерные сети. Изд.4, СПб: Питер, 2007. - 992 с.

Надійшла до редколегії 29.01.2007

УДК 519.9

Россохата Н.О., к. ф.-м. н.

FD-метод для задачі трансмісії на власні значення з потенціалом з простору L_1

В роботі розглядається задача трансмісії на власні значення з потенціалом з простору $L_1(\Omega)$. Для знаходження наближеного розв'язку застосовано чисельно-аналітичний FD-метод, який забезпечує швидкість збіжності не гіршу за геометричну прогресію. Доведено, що з ростом порядкового номера власного значення швидкість збіжності прямує до постійної величини.

Ключові слова: FD-метод, задачі трансмісії на власні значення, швидкість збіжності.

Вступ

В роботах [1-3] за допомогою чисельно-аналітичного FD-методу вивчалась задача трансмісії на власні значення. Оцінки швидкості збіжності методу отримані за умови, що потенціал належить просторові $L_\infty(\Omega)$. Однак в багатьох задачах, що виникають на практиці, коефіцієнти диференціального рівняння належать більш слабким просторам. Зокрема, в задачах слошингу та нанотехнологій коефіцієнти належать просторам $L_1(\Omega)$ [4-6]. Дана робота присвячена застосуванню FD-методу для знаходження наближеного розв'язку задачі трансмісії на власні значення з потенціалом з простору $L_1(\Omega)$. Робота побудована наступним чином. В розділі 1 наведена постановка задачі та алгоритм знаходження чисельного розв'язку на основі FD-методу [7]. В розділі 2 досліджено властивості власних функцій задачі трансмісії з потенціалом з $L_1(\Omega)$. В розділі 3 доведена теорема про швидкість збіжності FD-методу.

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну задачу трансмісії на

Rossokhata N.O., k. ph.-m. n.

FD-method for eigenvalue transmission problem with potential in space L_1

We consider the eigenvalue transmission problem with potential in space $L_1(\Omega)$. To find approximate solution, we apply numerical-analytical FD-method which convergence rate is not worse than that one of a geometric series. It is proved that the convergence rate tends to the constant with the growth of ordinal number for trial eigenvalue.

Key words: FD-method, eigenvalue transmission problem, convergence rate.

власні значення

$$\frac{d^2 u_i(x)}{dx^2} + (\lambda - q_i(x))u_i(x) = 0,$$

$$q_i \geq 0, \quad q_i \in L_1(\Omega_i), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_1(0) = u_2(1) = 0,$$

$$\frac{du_i(x^{(1)})}{dx} = r[u(x^{(1)})], \quad r > 0,$$

де $\Omega_1 = (0, x^{(1)})$, $\Omega_2 = (x^{(1)}, 1)$, $[f(x^{(1)})] = f_2(x^{(1)}) - f_1(x^{(1)})$ - стрибок функції в точці $x^{(1)}$.

Згідно FD-методу [7] чисельний розв'язок задачі (1) шукатимемо у вигляді:

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^m \lambda_n^{(j)}, \quad u_{ni} = \sum_{j=0}^m u_{ni}^{(j)}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

$\lambda_n^{(0)}(\bar{q})$ та $u_{ni}^{(0)}(\bar{q})$ ($i = 1, 2$) - власні значення і відповідні власні функції базової задачі трансмісії з кусково-постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2 u_{ni}^{(0)}(x)}{dx^2} + (\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \bar{q}_i(x))u_{ni}^{(0)}(x) = 0,$$

$$x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} u_{n1}^{(0)}(0) &= u_{n2}^{(0)}(1) = 0, \\ \frac{du_{ni}^{(0)}(x^{(1)})}{dx} &= \tau[u_n^{(0)}(x^{(1)})], \\ \|u_n^{(0)}\|_{0,2} &= 1, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\bar{q}_i(x)$ - кусково-стала апроксимація функції $q_i(x)$, а $\|\cdot\|_{p,q}$ - позначення норми в просторі $W_q^p(\Omega_1) \times W_q^p(\Omega_2)$, $(\cdot, \cdot)_{p,q} = \sum_{i=1}^2 (\cdot, \cdot)_{p,q(\Omega_i)}$.

Поправка власних функцій $u_{ni}^{(j+1)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) є точним розв'язком неоднорідної задачі трансмісії

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{ni}^{(j+1)}}{dx^2} + (\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \bar{q}_i(x)) u_{ni}^{(j+1)} &= -F_{ni}^{(j+1)}(x) = \\ \sum_{s=0}^j \lambda_n^{(j+1-s)} u_{ni}^{(s)}(x) + (q_i(x) - \bar{q}_i(x)) u_{ni}^{(j)}(x), \end{aligned}$$

$x \in \Omega_i$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} u_{n1}^{(j+1)}(0) &= u_{n2}^{(j+1)}(1) = 0, \\ \frac{du_{ni}^{(j+1)}(x^{(1)})}{dx} &= \tau[u_n^{(j+1)}(x^{(1)})], \\ (u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)})_{0,2} &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

А поправку власних значень $\lambda_n^{(j+1)}$ знаходимо з умови

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(j+1)} &= \lambda_n^{(j+1)}(\bar{q}) = \\ ((q(x) - \bar{q}(x)) u_n^{(j)}, u_n^{(0)})_{0,2} \end{aligned} \quad (5)$$

2. Властивості власних функцій задачі трансмісії.

Доведемо, що нормовані в $L_2(\Omega)$ власні функції задачі (1) рівномірно обмежені.

Теорема 1. Якщо $q_i \in L_1(\Omega_i)$, то для нормованих в $L_2(\Omega)$ власних функцій задачі (1) справедливі оцінки

$$\|u_n\|_{0,\infty} \leq c_1(q), \quad \|u_n\|_{1,\infty} \leq c_2(q) \sqrt{\lambda_n}, \quad (6)$$

де постійні $c_1(q)$ і $c_2(q)$ не залежать від n .

Доведення. Скористаємось технікою аналогічною роботам [8-10]. Домноживши рівняння (1) на нормовану в $L_2(\Omega)$ власну

функцію $u_n(x)$, отримаємо вираз для λ_n

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \left(\frac{du_{ni}(x)}{dx} \right)^2 dx + \\ \tau[u_n(x^{(1)})]^2 + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} q_i(x) u_{ni}^2(x) dx &= \\ \|u_n\|_{1,2}^2 + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} q_i(x) u_{ni}^2(x) dx, \end{aligned}$$

звідки

$$\|u_n\|_{1,2}^2 \leq \lambda_n. \quad (7)$$

Спочатку розглянемо випадок $x \in (0, x^{(1)})$. Домноживши рівняння (1) на $\frac{du_{n1}}{dx}$ та проінтегрувавши по x від 0 до $x \in (0, x^{(1)})$, отримаємо рівність

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_{n1}(x)}{dx} \right)^2 + \lambda_n (u_{n1}(x))^2 &= \\ \left(\frac{du_{n1}(0)}{dx} \right)^2 + 2 \int_0^x q_1(t) u_{n1}(t) \frac{du_{n1}(t)}{dt} dt. \end{aligned}$$

Скориставшись (7) і оцінюючи праву частину останньої рівності аналогічно роботі [10], прийдемо до нерівності

$$\begin{aligned} \|u_{n1}\|_{0,\infty(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \lambda_n \|u_{n1}\|_{1,\infty(\Omega_1)}^2 &\leq \\ \leq \lambda_n \left(\frac{8}{x^{(1)}} + 69x^{(1)} \|q_1\|_{0,1(\Omega_1)}^2 \right), \end{aligned}$$

з якої отримаємо оцінки

$$\|u_{n1}\|_{0,\infty(\Omega_1)} \leq c_1(q_1), \quad (8)$$

$$\|u_{n1}\|_{1,\infty(\Omega_1)} \leq c_2(q_1) \sqrt{\lambda_n},$$

де

$$c_1(q_1) = \sqrt{\frac{16}{x^{(1)}} + 138x^{(1)} \|q_1\|_{0,1(\Omega_1)}^2} \quad (9)$$

і

$$c_2(q_1) = \sqrt{\frac{8}{x^{(1)}} + 69x^{(1)} \|q_1\|_{0,1(\Omega_1)}^2} \quad (10)$$

Аналогічним чином для $x \in (x^{(1)}, 1)$ отримаємо оцінки

$$\|u_{n2}\|_{0,\infty(\Omega_2)} \leq c_1(q_2), \quad (11)$$

$$\|u_{n2}\|_{1,\infty(\Omega_2)} \leq c_2(q_2) \sqrt{\lambda_n},$$

де

$$c_1(q_2) = \sqrt{\frac{16}{1-x^{(1)}} + 138(1-x^{(1)}) \|q_2\|_{0,1(\Omega_2)}^2} \quad (12)$$

і

$$c_2(q_2) = \sqrt{\frac{8}{1-x^{(1)}} + 69(1-x^{(1)}) \|q_2\|_{0,1(\Omega_2)}^2} \quad (13)$$

$$\sqrt{\frac{8}{1-x^{(1)}} + 69(1-x^{(1)})\|q_2\|_{0,1(\Omega_2)}^2}$$

Таким чином, з оцінок (8)-(13) отримаємо оцінки (6), де

$$c_1(q) = \left(\frac{16}{\min\{x^{(1)}, 1-x^{(1)}\}} + 138 \max\{x^{(1)}\|q_1\|_{0,1(\Omega_1)}, \right. \quad (14)$$

$$\left. (1-x^{(1)})\|q_2\|_{0,1(\Omega_2)}\} \right)^{1/2},$$

$$c_2(q) = \left(\frac{8}{\min\{x^{(1)}, 1-x^{(1)}\}} + 69 \max\{x^{(1)}\|q_1\|_{0,1(\Omega_1)}, \right. \quad (15)$$

$$\left. (1-x^{(1)})\|q_2\|_{0,1(\Omega_2)}\} \right)^{1/2}.$$

Теорема 1 доведена.

3. Оцінка швидкості збіжності FD-методу.

Має місце наступний результат про збіжність чисельного розв'язку (2), отриманого за допомогою FD-методу (3)-(5), до точного розв'язку задачі (1).

Теорема 2. а). Для порядкового номера n , що задовольняє умові

$$q_n(0) = \frac{16\|q\|_{0,1}}{\sqrt{\min\{x^{(1)}, 1-x^{(1)}\}}} \times \left(\frac{x^{(1)}}{r} + \frac{c(x^{(1)}, r, n)}{\pi(2n+1)} \right) < 1, \quad (16)$$

чисельний розв'язок $(\lambda_n^{(0)}(0), u_n^{(0)}(x))$ FD-методу (3)-(5) збігається до відповідного розв'язку $(\lambda_n, u_n(x))$ задачі (1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником $q_n(0)$, який визначається за формулою (16).

б). Якщо для порядкового номера n одночасно виконуються умови

$$c_3(n, \bar{q}) = (c_1^2(\bar{q}) + 1) \times \|\bar{q}\|_{0,1} \left(\frac{x^{(1)}}{r} + \frac{c(x^{(1)}, r, n)}{\pi(2n+1)} \right) < 1, \quad (17)$$

$$q_n(\bar{q}) = \frac{c_1(\bar{q})c(x^{(1)}, r, n)}{1 - c_3(n, \bar{q})} \|q - \bar{q}\|_{0,1} < 1, \quad (18)$$

то чисельний розв'язок $(\lambda_n^{(0)}(\bar{q}), u_n^{(0)}(x))$ FD-методу (3)-(5) збігається до відповідного розв'язку $(\lambda_n, u_n(x))$ задачі (1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником $q_n(\bar{q})$, який визначається за формулою (18).

в). Для порядкового номера n власного значення, для якого не виконуються умови а) і б), функцію $\bar{q}(x)$ виберемо таким чином, щоб

$$n(\bar{q}) = 4c_1^2(\bar{q}) \left(\frac{1}{\pi^2 \left(1 - \frac{\lambda_n^{(0)}(\bar{q})}{\lambda_{n+1}^{(0)}(\bar{q})} \right)} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \lambda_p^{(0)}(\bar{q})} \right) \|q - \bar{q}\|_{0,1} \leq 1. \quad (19)$$

Тоді чисельний розв'язок $(\lambda_n^{(0)}(\bar{q}), u_n^{(0)}(x))$ FD-методу (3)-(5) збігається до відповідного розв'язку $(\lambda_n, u_n(x))$ задачі (1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником $q_n(\bar{q})$, що визначається за формулою (19).

В усіх випадках мають місце оцінки

$$\|u_n^{(0)} - u_n\| \leq \alpha_{m+1} \frac{q_n^{m+1}}{1 - q_n}, \quad (20)$$

$$|\lambda_n^{(0)} - \lambda_n| \leq c_1(\bar{q}) \|q - \bar{q}\|_{0,\infty} \frac{q_n^m}{1 - q_n},$$

$$\text{де } \alpha_m = 2 \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}.$$

Доведення. Щоб довести твердження а) і б), перепишемо задачу (4) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{ni}^{(j+1)}(x)}{dx^2} + \lambda_n^{(0)}(0) u_{ni}^{(j+1)}(x) = \\ (\lambda_n^{(0)}(0) - \lambda_n^{(0)}(\bar{q}_i) + \bar{q}_i(x)) u_{ni}^{(j+1)}(x) - F_{ni}^{(j+1)}(x), \\ u_{n1}^{(j+1)}(0) = u_{n2}^{(j+1)}(1) = 0, \\ \frac{du_{ni}^{(j+1)}(x^{(1)})}{dx} = r[u_n(x^{(1)})], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тоді, скориставшись рівністю $\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \lambda_n^{(0)}(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) dt$, розв'язок неоднорідної задачі (4) можна записати у вигляді

$$u_{n1}^{(j+1)}(x) = c_n^{(j+1)} \sin \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)} x - \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(x-\xi)}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}} \times \left[\left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) dt - \bar{q}_1(\xi) \right) u_{n1}^{(j+1)}(\xi) + F_{n1}^{(j+1)}(\xi) \right] d\xi,$$

$$u_{n2}^{(j+1)}(x) = c_n^{(j+1)} \varphi_n \sin \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(1-x) - \int_0^{x^{(1)}} \left[\frac{\sin \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(x-\xi)}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}} + \frac{\cos \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(x^{(1)}-x) \cos \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(x^{(1)}-\xi)}{r} \right] \times \left[\left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) dt - \bar{q}_1(\xi) \right) u_{n1}^{(j+1)}(\xi) + F_{n1}^{(j+1)}(\xi) \right] d\xi - \int_{x^{(1)}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(x-\xi)}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}} \times \left[\left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) dt - \bar{q}_2(\xi) \right) u_{n2}^{(j+1)}(\xi) + F_{n2}^{(j+1)}(\xi) \right] d\xi,$$

де $c_n^{(j+1)}$ визначається з умови $(u_n^{(j+1)}, u_n^{(0)}) = 0$, а φ_n з [1]

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\cos \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}x^{(1)}}{\cos \sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}(1-x^{(1)})}, & x^{(1)} \neq \frac{2k+1}{2(n+k+1)}, \\ (-1)^{n-k}, & x^{(1)} = \frac{2k+1}{2(n+k+1)}. \end{cases}$$

Щоб оцінити $\frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q})$, скористаємось технікою з [10]. Розглянемо допоміжну задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{ni}(x, t\bar{q}) + (\lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) - t\bar{q}_i(x)) u_{ni}(x, t\bar{q}) = 0, \quad \text{де}$$

$$u_{n1}(0, t\bar{q}) = u_{n2}(1, t\bar{q}) = 0,$$

$$\frac{\partial u_{ni}(x^{(1)}, t\bar{q})}{\partial x} = r[u_n(x^{(1)}, t\bar{q})],$$

$$\|u_n(t\bar{q})\|_{0,2} = 1,$$

продиференціювавши яку по t отримаємо відповідну неоднорідну задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_{ni}(x, t\bar{q})}{\partial t} \right) + (\lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) - t\bar{q}_i(x)) \frac{\partial u_{ni}(x, t\bar{q})}{\partial t} =$$

$$\left(\bar{q}_i(x) - \frac{d\lambda_n^{(0)}(t\bar{q})}{dt} \right) u_{ni}(x, t\bar{q}),$$

$$\frac{\partial u_{n1}(0, t\bar{q})}{\partial t} = \frac{\partial u_{n2}(1, t\bar{q})}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_{ni}(x^{(1)}, t\bar{q})}{\partial x \partial t} = r \left[\frac{\partial u_n(x^{(1)}, t\bar{q})}{\partial t} \right].$$

З умови розв'язності неоднорідної задачі, отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \left(\bar{q}_i(x) - \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) \right) (u_{ni}(x, t\bar{q}))^2 dx = 0. \quad \text{З (5) отримаємо}$$

звідки

$$0 \leq \frac{d}{dt} \lambda_n^{(0)}(t\bar{q}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \bar{q}_i(x) (u_{ni}(x, t\bar{q}))^2 dx$$

$$\leq \|\bar{q}\|_{0,1} c_1^2(t\bar{q}) \leq \|\bar{q}\|_{0,1} c_1^2(\bar{q}).$$

Використовуючи останню нерівність, прийдемо до оцінки

$$\begin{aligned} (1 - c_3(n\bar{q})) \|u_n^{(j+1)}\|_{0,\infty} &\leq \\ &\leq c_4(x^{(1)}, r, \bar{q}, \lambda_n^{(0)}(0)) \|q - \bar{q}\|_{0,1} \times \\ &\times \sum_{p=0}^j \|u_n^{(j-p)}\|_{0,\infty} \|u_n^{(p)}\|_{0,\infty}, \\ c_4(x^{(1)}, r, \bar{q}, \lambda_n^{(0)}(0)) &= \\ c_1(\bar{q}) \left[\frac{x^{(1)}}{r} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}} (4 - x^{(1)} + \right. \\ \left. 3\varphi_n((x^{(1)})^2 + 2(1 - x^{(1)})^2) + \right. \\ \left. \varphi_n^2(x^{(1)} + 2) \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Отже, за виконання умови (17) отримаємо

$$\begin{aligned} \|u_n^{(j+1)}\|_{0,\infty} &\leq M_n(\bar{q}) \|q - \bar{q}\|_{0,1} \times \\ &\times \sum_{p=0}^j \|u_n^{(j-p)}\|_{0,\infty} \|u_n^{(p)}\|_{0,\infty}, \end{aligned}$$

де

$$M_n(\bar{q}) = \frac{c_4(x^{(1)}, r, \bar{q}, \lambda_n^{(0)}(0))}{1 - c_3(n, \bar{q})}.$$

Тоді згідно Лема 3.1 з [7]

$$\|u_n^{(j+1)}\|_{0,\infty} \leq \alpha_j (4M_n(\bar{q}))^j \quad (22)$$

$$|\lambda_n^{(j)}(\bar{q})| \leq$$

$$\|q - \bar{q}\|_{0,1} \|u_n^{(j-1)}\|_{0,\infty} \|u_n^{(0)}\|_{0,\infty} \leq \quad (23)$$

$$\leq c_1(\bar{q}) \|q - \bar{q}\|_{0,1} (4M_n(\bar{q}))^{j-1} \alpha_{j-1}.$$

Останні нерівності означають, що за виконання умови $q_n(\bar{q}) < 1$ послідовності (2) збігаються до точного розв'язку задачі (1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником $q_n(\bar{q})$. Оскільки в роботі [1] було показано, що $\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)} = \frac{\pi(2n+1)}{2(1-x^{(1)})} + O(\frac{1}{n})$, то в формулу (21) можна підставити $\frac{\pi(2n+1)}{2(1-x^{(1)})}$ замість $\sqrt{\lambda_n^{(0)}(0)}$, що і доводить твердження б) і оцінки (20). Щоб довести твердження а), досить в формулу (21) підставити $\bar{q}(x) \equiv 0$ і врахувати, що $c_3(n, 0) = 0$.

Для тих власних значень, для яких не виконуються умови тверджень а) або б), представимо розв'язок неоднорідної задачі (4) у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x) = - \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} \frac{(F_n^{(j+1)}, u_p^{(0)})}{\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \lambda_p^{(0)}(\bar{q})} u_p^{(0)}(x)$$

і оцінимо $\|u_n^{(j+1)}\|_{0,\infty}$ аналогічно тому, як це зроблено в роботі [10]. В результаті прийдемо до оцінок (22),(23), де $M_n(\bar{q})$ визначається за формулою (19), що і доводить твердження в). Теорема 2 доведена.

Наслідок. 3 Теорема 2 впливає, що для потенціалу з L_1 , у випадку умов трансмісії швидкість збіжності FD-методу з ростом порядкового номера власного значення не покращується, як у випадку задачі Штурма-Ліувілля, а прямує до постійної величини $\alpha(\bar{q}) = \frac{4c_1(\bar{q})x^{(1)}\|q-\bar{q}\|_{0,1}}{r-x^{(1)}\|\bar{q}\|_{0,1}(c_1^2(\bar{q})+1)}$, і відповідно, $\alpha(0) = \frac{4c_1(0)x^{(1)}\|q\|_{0,1}}{r}$.

Список використаних джерел

1. V.L. Makarov, N.O. Rossokhata, B.I. Bandyrskii. Functional-discrete method with high order of accu-

racy for the eigenvalue transmission problem. Comput. Math. Appl. Math., v.4 (2004), pp.324-349.

2. V.L. Makarov, N.O. Rossokhata, B.I. Bandyrskii. Functional-discrete method to solve eigenvalue transmission problem with periodic boundary conditions. Comput. Math. Appl. Math., v.5 (2005), pp.201-220.

3. Н.О. Россохата. Дослідження задачі трансмісії на власні значення за допомогою FD-методу. Вісник Київського університету, 2005, N4, Прийнята до друку.

4. Barnes D.C. Extremal problems for eigenvalues with applications to buckling, vibration and sloshing. SIAM J. Math. Anal., v.16 (1985), N2, pp.341-357.

5. Datta S. Nanoscale device modeling: the Green's function method. Superlattices and Microstructures, v.28 (2000), N4, pp.253-278.

6. Venugopal R., Ren Z., Datta S., Lundstrom M., Jovanovic D. Simulating quantum transport in nanoscale transistors: real versus mode-space approaches. J. Appl. Phys., v.92 (2002), N7, pp. 3730-3739.

7. V.L.Makarov. FD-method: the exponential rate of convergence. J. Math. Sci., v.104 (1997), N6, pp.1648-1653.

8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. - М.: Гостехиздат, 1953, т.1. - 476с.

9. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.:Наука, 1971, - 553с.

10. Макаров В.Л., Россохата Н.О. Оцінки швидкості збіжності FD-методу для задачі Штурма-Ліувілля з потенціалом з простору L_1 . Збірник праць Інституту математики НАН України, т.1 (2005), 3, с.201-216.

Надійшла до редакції 15.11.2006

УДК 514.17

Рубльов Б.В., Сьоміна О.С.,
Шарманська В.Б.

Побудова дискретизованого зображення з різним рівнем дискретизації та апроксимації межі фігури на площині

В статті вивчається метод побудови дискретизованого зображення фігур на площині та його властивості. Запропоновано алгоритм побудови ламаної, яка апроксимує межу фігури.

Ключові слова: дискретизоване зображення, межа фігури, апроксимація межі, геометричні алгоритми.

В наш час особливо важливе значення мають швидкі обробки зображень, особливо для випадку евклідової площини. Дуже рідко можна очікувати, що подібне зображення буде задано в структурованому вигляді. Найчастіше цим зображенням є фотографія, або рисунок, або щось подібне до цього у форматі jpg, або чогось аналогічного. Для спрощення подальших міркувань будемо вважати, що ми маємо чорно-біле зображення. Білим є фон, а чорним – зображення, яке потребує подальшої обробки, класифікації, оцінки параметрів тощо. Нехай ми маємо деяке зображення, яке задається таким чином, що кожний з пікселів має або чорний колір (належить зображенню), або білий. Досліджуване зображення є однозв'язною фігурою, що обмежена замкненою спрямованою жордановою кривою. Цей клас фігур назвемо $S^{(0)}$. Якщо нас цікавить це зображення як геометричний об'єкт, який має площу, периметр, межу, кривизну тощо, то задане зображення є занадто громіздким та незручним. В цій статті ми запропонуємо два рівня обробки подібного зображення до більш зручного та покажемо його подальше використання.

Дискретизоване зображення фігури

Нехай на площині задана квадратна сітка, зі стороною квадрата рівною $\varepsilon > 0$, яку ми в подальшому будемо називати **рівнем дискретизації**, а також фігура $\Phi \in S^{(0)}$. Будемо називати квадрат сітки e чорним, якщо площа перетину $\Phi \cap e$ додатна. Інакше квадрат сітки

Bogdan V. Rublyov, Olena S'omina, Victoria
Sharmans'ka

Image discretization to different discretization levels and figure border approximation on the plane

In this paper method of image discretization of figures on the plane is studied together with its properties. New algorithm for creation of broken line approximation of figure borders is described.

Key words: image discretization, figure border, border approximation, geometrical algorithms.



Рис. 1

називається білим (рис. 1). Сукупність чорних квадратів називається **дискретизованим зображенням G_ε фігури Φ** . Зв'язок між дискретизованими зображеннями при різних значеннях рівня дискретизації та самої фігури є доволі цікавим та неочевидним, але ми залишимо це поза нашим дослідженням. Зауважимо, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ G_ε буде як завгодно близько наближати справжню фігуру Φ .

Це є лише геометричним визначенням дискретизованого зображення, а тепер нас цікавить його визначення та побудова при різних значеннях рівня дискретизації у випадку, який зазначено у вступі, тобто попиксельного визначення фігури. Зрозуміло, що природним в такому випадку буде задавати рівень дискретизації пропорційним до кількості

пікселей. Крім того будемо накладати ще таке обмеження на величину рівня дискретизації – він повинен бути достатньо малим, щоб не змінювати «топологию» досліджуваної області, тобто межа дискретизованого зображення так само повинна бути обмеженою замкненою спрямованою жордановою ламаною. Інакше цей рівень дискретизації недоцільно використовувати для дослідження заданої області.

Розглянемо квадрат e_1 , вписаний у квадрат сітки e на відстані одного пікселя. Будемо називати квадрат сітки e чорним або має колір 1, якщо хоча б один піксель квадрату e_1 має чорний колір. Інакше квадрат сітки називається білим або має колір 0. Сукупність чорних квадратів так само будемо називати **дискретизованим зображенням фігури**, але позначати його будемо через G^ε , щоб підкреслити той факт, що тут йдеться про піксельне фарбування фігури.

Зауважимо, що для розробки запланованих алгоритмів нам потрібно не все зображення G^ε , а його межа $\Gamma(G^\varepsilon)$. Таким чином, нам більш важливим є алгоритм побудови саме цієї межі. Але знову таки будемо її знаходити у припущенні, що рівень дискретизації узгоджений, і вона адекватно відповідає межі базової фігури.

Алгоритм побудови $\Gamma(G^\varepsilon)$

Зрозуміло, що $\Gamma(G^\varepsilon)$ є ламаною, а тому природним буде зберігання її у вигляді списку вершин (що абсолютно природно) або ребер. Таким чином, в процесі побудови шуканої межі будемо будувати і список вершин.

Назвемо одиничний вектор, що направлений вгору згідно заданої системи координат (вважаємо, що лінії сітки є вертикальними та горизонтальними) має тип 1, так само одиничні вектори направлені вліво, вниз та вправо відповідно будуть мати тип 2, 3 і 4 (рис. 2). Будемо

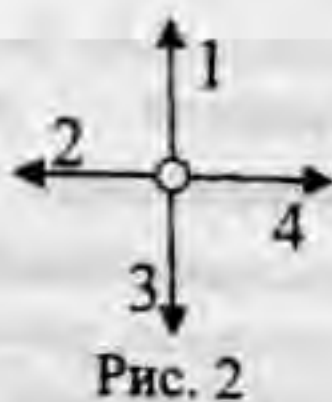


Рис. 2

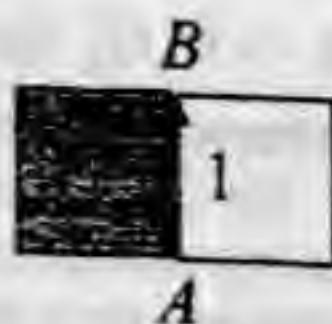


Рис. 3

будувати межу у відповідності до додатної орієнтації, тобто проти руху годинникової стрілки.

Алгоритм 1

Крок 0. Знаходимо чорний квадрат, який є самим правим (якщо таких декілька, то вибираємо найнижчий). Тоді справа від нього розташований білий квадрат (рис. 3). Між цими двома квадратами розташований вектор AB типу 1, який буде входити в межу (орієнтовану межу) $\Gamma(G^\varepsilon)$. Точка A при цьому вноситься до списку вершин $\Gamma(G^\varepsilon)$ під номером A_0 . Точку B тимчасово позначаємо A_1 , яка також вноситься до списку вершин $\Gamma(G^\varepsilon)$.

Крок 1. Ми розглядаємо точку A_k , і останній вектор, який закінчувався в цій точці, має тип 1. Без обмежень загальності будемо вважати, що він має тип 1 (рис. 4), для інших випадків все виписується аналогічно. Якщо квадрат α має колір 1, то розглядаємо вектор $A_k B$ типу 4, покладемо $B = A_{k+1}$ і переходимо на крок 2 алгоритму. Якщо α і β мають колір 0, то розглядаємо вектор $A_k B$ типу 2, покладемо $B = A_{k+1}$ і переходимо на крок 2 алгоритму. Якщо α має колір 0, а β має колір 1, то розглядаємо вектор $A_k B$ типу 1, точкою A_k будемо вважати точку B і переходимо на крок 2 алгоритму.



Рис. 4

Крок 2. Перевіряємо, чи співпадає точка A_k з точкою A_0 . Якщо так, то покладемо $n = k$, інакше – переходимо на крок 1 алгоритму.

По закінченні роботи алгоритму, який має лінійну складність, ми маємо замкнену ламану $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$, яка представляє межу $\Gamma(G^\varepsilon)$. В подальшому при деяких побудовах доречно вважати, що $A_n \equiv A_0$ і $A_{n+1} \equiv A_1$.

Визначення класу фігур

Розглянемо клас фігур на площині $S^{(1)}$ усіх плоских однозв'язних областей, що обмежені

замкненою спрямлюваною жордановою кривою. На межі довільної фігури $\Phi \in S^{(1)}$ визначимо орієнтацію ω , що відповідає додатному напрямку.

Нехай на межі деякої фігури $\Phi \in S^{(1)}$ можна вибрати скінчену кількість точок $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ (покладемо при цьому $M_n = M_0$, $M_{n+1} = M_1$), які слідує у вказаному порядку в напрямі орієнтації ω , та задовольняють такі умови:

- 1) $\cup M_i M_{i+1} \neq [M_i M_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$;
- 2) Фігури F_i , що обмежені $\cup M_i M_{i+1}$ та відрізком $[M_i M_{i+1}]$ є опуклими, $i = \overline{0, n-1}$;
- 3) Фігури H_i , що обмежені $\cup M_i M_{i+2}$ та відрізком $[M_i M_{i+2}]$ не опуклі, $i = \overline{0, n-1}$.

Тоді таку фігуру Φ будемо називати **фігурою з опукло-угнутою межею**. Сукупність усіх таких фігур на площині позначимо $S^{(0)}$. Сукупність точок $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ назовемо **канонічним розбиттям** $P_n = \{M_i | i = \overline{0, n-1}\}$ межі фігури класу $S^{(0)}$. Дугу $\cup M_i M_{i+1} \subset \Gamma(\Phi)$ назовемо **опуклою**, якщо існує відрізок CD з кінцями на $\cup M_i M_{i+1}$, що повністю розташований всередині фігури Φ , інакше цю дугу, що з'єднує сусідні точки канонічного розбиття, назовемо **угнутою**.

Таким чином, якщо $\Phi \in S^{(0)}$, то її межа $\Gamma(\Phi)$ розбивається на опуклі та угнуті ділянки точками деякого її канонічного розбиття. Якщо при цьому виявилось, що дуги $\cup M_i M_{i+1}$ та $\cup M_{i+1} M_{i+2}$ мають різний характер опуклості (одна опукла, інша угнута), то точка M_i називається **точкою перегину** межі фігури Φ . Більш детально про клас фігур та канонічне розбиття можна прочитати в роботах [1,2].

Основною ідеєю подальшої побудови ламаної, що апроксимує межу початкової фігури Φ , буде спроба відновити ділянки опуклості та угнутості, які були на межі $\Gamma(\Phi)$.

Алгоритм побудови ламаної L^ϵ , що апроксимує $\Gamma(\Phi)$

Після роботи алгоритму побудови $\Gamma(G^\epsilon)$ ми маємо замкнену ламану $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$, ланки якої йдуть вздовж ліній сітки. Тут слушно вважати усі ці ланки не відрізками, а векторами $A_k A_{k+1}$,

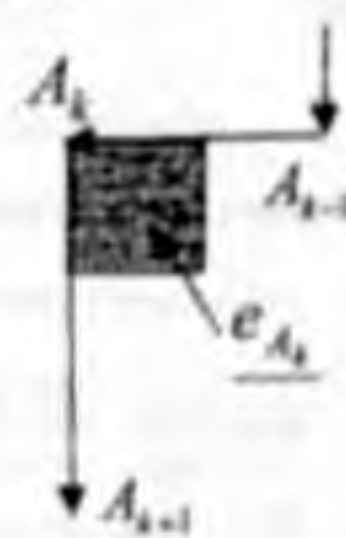


Рис. 5

$k = \overline{0, n-1}$. На основі цієї ламаної будемо будувати шукану ламану, що наближає $\Gamma(\Phi)$.

Розглянемо вершину A_k , а також дві сусідні з нею – A_{k-1} (попередня) та A_{k+1} (наступна). Якщо $A_{k-1}A_k \times A_kA_{k+1}$ (векторний добуток) додатний, то будемо казати, що вершина A_k визначає **зовнішній квадрат** e_{A_k} , інакше – **внутрішній квадрат** e_{A_k} (рис. 5). Дві різні вершини можуть визначати той самий квадрат.

Назовемо частину $\Gamma(G^\epsilon)$, що складається з трьох сусідніх відрізків (векторів) AB , BC та CD тупиком $T = ABCD$, якщо вектори AB та CD протилежно направлені. Тоді для цього тупика T будемо називати його вершини за порядком слідування в напрямі обходу її межі $\omega - A = 1(T), \dots, D = 4(T)$.

Алгоритм 2

Крок 0. Знаходимо найправіший вектор, що належить до побудованої $\Gamma(G^\epsilon)$, якщо таких декілька, то вибираємо найнижчий. Його кінці є точки $A_1^0 = 2(T)$, $A_1^1 = 3(T)$. За побудовою $A_1^0, A_1^1 \in L^\epsilon$. Покладемо $i = 1$, $j = 1$, позначимо послідовно наступні після A_i^j вершини таким чином – $C_0, B_0, C_1, B_1, \dots$, і перейдемо на крок 1 алгоритму.

Крок 1. Розглядаємо вершину $A_i^j \in L^\epsilon$. Якщо в деякому тупику вона має тип $1(T)$ або $2(T)$, то переходимо на крок 2 алгоритму. Якщо векторний добуток векторів $A_i^j C_0$ та $C_0 B_0$

додатний, то покладемо квадрати $e_k = \overline{e_{C_k}}$, інакше – $e_k = \underline{e_{C_k}}$, $k \geq 0$. З множини B_k , $k \geq 0$ обираємо таку вершину B_l , що задовольняє такі умови:

- багатокутник $A_i^0 A_i^1 \dots A_i^j B_l$ є опуклим;
- відрізок $A_i^j B_l$ перетинає усі квадрати e_k , $k = \overline{0, l}$ по внутрішніх точках;
- відрізок $A_i^j B_l$ перетинає $\Gamma(G^\varepsilon)$ в рівно у двох точках A_i^j та B_l ;
- з усіх номерів, що задовольняють усі ці умови l – найбільший.

Якщо така вершина знайшлася, то позначаємо її A_i^{j+1} , $j = j+1$ і переходимо на крок 1 алгоритму.

Якщо з усіх умов порушується лише перша умова, але при цьому опуклим є чотирикутник $A_i^{j-2} A_i^{j-1} A_i^j B_l$, то проводимо такі позначення $A_i^{j-2} = A_{i+1}^0$, $A_i^{j-1} = A_{i+1}^1$, $A_i^j = A_{i+1}^2$, $B_l = A_{i+1}^3$, $i = i+1$, $j = 3$ та переходимо на крок 1 алгоритму. В обох розглянутих випадках, чергова ланка L^ε не змінює характер опуклості.

Якщо такої вершини B_l не існує, то покладемо $A_i^j = A_{i+1}^0$, $C_0 = A_{i+1}^1$, $i = i+1$, $j = 1$ і переходимо на крок 1 алгоритму. Чергова ланка L^ε змінює характер опуклості.

Крок 2. Якщо $A_i^j = A_i^0$, тоді позначаємо $m = i$ і переходимо на крок 3 алгоритму. Ламана L^ε побудована, залишається впорядкувати її початок з кінцем.

Вершина $A_i^j = 1(T)$ або $2(T)$ в деякому тупику T . Якщо багатокутник $A_i^0 A_i^1 \dots A_i^j C_0$ є опуклим, тоді позначаємо $C_0 = A_{i+1}^{j+1}$, $j = j+1$ та переходимо на крок 1. Якщо багатокутник $A_i^0 A_i^1 \dots A_i^j C_0$ не є опуклим, але при цьому опуклим є чотирикутник $A_i^{j-2} A_i^{j-1} A_i^j B_l$, то проводимо такі позначення $A_i^{j-2} = A_{i+1}^0$, $A_i^{j-1} = A_{i+1}^1$, $A_i^j = A_{i+1}^2$,

$B_l = A_{i+1}^3$, $i = i+1$, $j = 3$ та переходимо на крок 1 алгоритму. Опуклість ділянки ламаної L^ε зберігається. Якщо ці умови не виконуються, то покладемо $A_i^j = A_{i+1}^0$, $C_0 = A_{i+1}^1$, $i = i+1$, $j = 1$ та переходимо на крок 1 алгоритму. Тепер маємо, що характер опуклості не змінюється.

Крок 3. Якщо багатокутник $A_m^0 A_m^1 \dots A_m^{j_m} A_i^0 A_i^1 \dots A_i^{j_1}$ – опуклий, тоді достатньо визначити нові позначення таким чином: $A_m^0 = A_i^0$, $A_m^1 = A_i^1$, $A_m^{j_1} = A_i^{j_1+j_m}$, $m = m-1$.

Алгоритм завершує роботу.

Легко зрозуміти, він також має лінійну складність побудови L^ε .

Порівняння кривої $\Gamma(\Phi)$ та ламаної L^ε

Вище вже була наголошена перша умова, яка накладається на рівень дискретизації ε , щоб можна було його вважати слушним для подальшого вивчення межі фігури $\Gamma(\Phi)$. Нехай ламана L^ε обмежує фігуру, яку ми позначимо Φ^ε . За припущенням, ми розглядали фігуру $\Phi \in S^{(0)}$, також за побудовою – $\Phi^\varepsilon \in S^{(0)}$.

Тут можна розглянути подальше вивчення з двох боків. Нехай ми маємо фігуру $\Phi \in S^{(0)}$, яка задана у вигляді деякого зображення у форматі jpg, або щось аналогічне. Тобто ми можемо наочно побачити поведінку межі фігури, але не в змозі обчислити його параметри. Тоді вибираємо рівень дискретизації ε , і будемо вимагати, щоб кількість опуклих та угнутих ділянок меж фігур $\Gamma(\Phi)$ та L^ε була рівною та відповідала одна одній. Ця відповідність розуміється в природному розумінні. Якщо це не так, можна вважати, що рівень дискретизації не відповідає адекватному відображенню $\Gamma(\Phi)$ за допомогою L^ε , і треба зменшити рівень дискретизації. Найбільш природним в усіх розуміннях є зменшення його в 2 рази. Неважко розробити та описати алгоритм, який за зображенням фігури у форматі jpg і за побудованою ламаною $\Gamma(G^\varepsilon)$ ефективно побудує ламану $\Gamma(G^{\varepsilon_1})$, де $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$, або в

більш загальному випадку $\varepsilon_1 = \lambda \varepsilon$, де $\lambda \in (0,1)$. Цей рівень доречно зменшувати стільки разів, доки ми не досягнемо потрібної відповідності.

Теорема 1. *Існування потрібного рівня дискретизації для фігур класу $S^{(0)}$.*

Для будь-якої фігури $\Phi \in S^{(0)}$ існує значення рівня дискретизації $\varepsilon > 0$, для якого ламана L^ε адекватно відповідає межі $\Gamma(\Phi)$.

Доведення. Розмістимо фігуру $\Phi \in S^{(0)}$ у сітці з рівнем дискретизації ε_0 . Розглянемо опуклі фігури F_i , що обмежені $\cup M_i M_{i+1}$ та відрізком $[M_i M_{i+1}]$, $i = 0, n-1$ (рис. 6).

Тепер будемо зменшувати вдвічі рівень

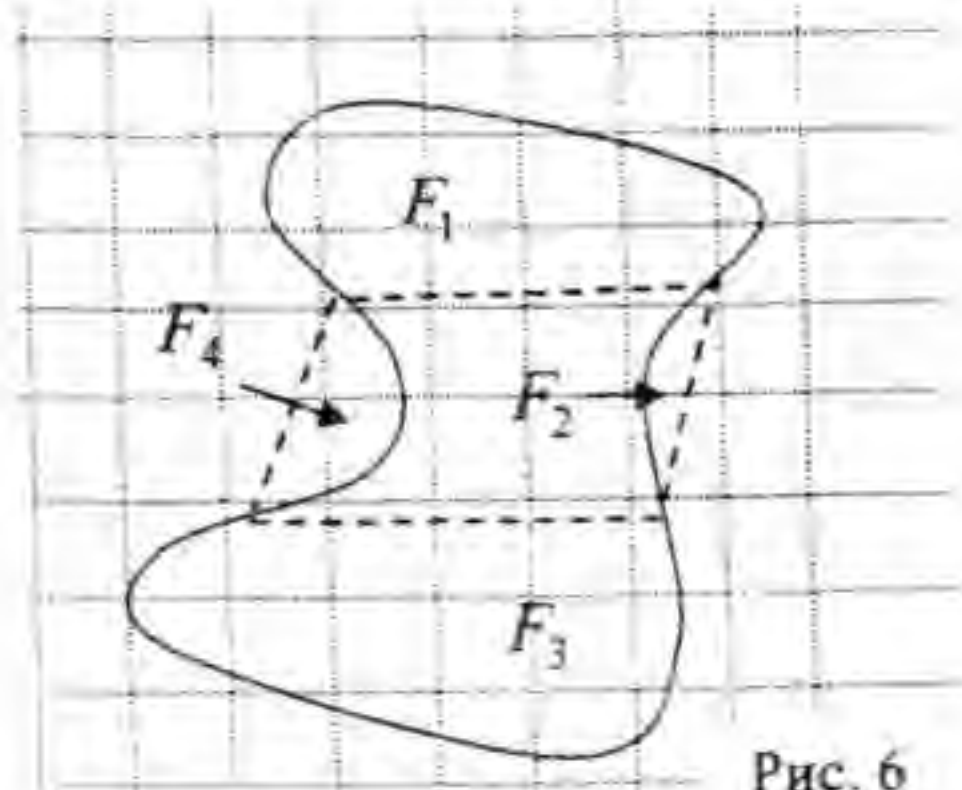


Рис. 6

дискретизації стільки разів, скільки треба задля того, щоб всередину кожної з фігур F_i повністю попала ціла клітина дискретизації.

Теорема доведена.

Як бачимо на рис. 6 для наведеного рівня дискретизації умову задовольняють лише фігури F_3 і F_1 .

Алгоритм 2 побудови ламаної L^ε розроблений таким чином, щоб за таких умов кожна з опуклих чи угнутих ділянок мала свою відповідність у ламаній L^ε у вигляді опуклої або угнутої ділянки.

Теорема доведена.

Зауваження. При побудові попиксельної дискретизації відповідність буде досягатись при умові, що всередину кожної опуклої фігури F_i повинен попасти квадрат сітки величиною декілька пікселів.

Таким чином, теоретично завжди можна досягнути потрібної відповідності між межею

фігури Φ та її апроксимацією. Якщо практично це зробити не вдається при граничному зменшенні рівня дискретизації, то межу такої фігури взагалі неможливо дослідити.

Інша ситуація виникає у випадку, коли нам вже задане дискретизоване зображення фігури чи його аналог, тоді ми вже не в змозі проконтролювати відповідність $\Gamma(\Phi)$ та L^ε , і в разі потреби зменшити рівень дискретизації. В такому випадку треба вважати, що заданий рівень дискретизації цілком і повністю відповідає усім вимогам на нього, тобто L^ε адекватно відповідає $\Gamma(\Phi)$, і треба продовжити дослідження ламаної L^ε .

Периметр ламаної L^ε наближає периметр фігури Φ з точністю, пропорційною рівню дискретизації. Розбиття L^ε на опуклі та угнуті ділянки також відповідає аналогічному розбиттю $\Gamma(\Phi)$, можна також провести оцінювання і інших параметрів.

Висновки

Великого поширення зараз набули порівняння та пошук подібних при вивченні геометричних фігур (зображень) на площині. При цьому зрозуміло, що провести дослідження довільних множин, які мають гладку (кусково-гладку) межу дуже не просто. Ціла низка відомих підходів при порівнянні фігур чи при їх індексації ефективно працює для багатокутників [3], а для довільних кривих або працює наближено, або не ефективно. Запропонований в статті підхід як раз надає змогу, як довільну фігуру апроксимувати багатокутником.

Література

1. Рублев Б.В. Алгоритм оценивания периметра плоской фигуры по ее дискретизованному изображению // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 4 – с.101–110.
2. Рублев Б.В., Петунин Ю.И. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. // Кибернетика и системный анализ. ч.1 – 1999. – № 1. – с.125–135; ч.2 – 1999. – № 2. – с. 111–120.
3. R. C. Veltkamp. Shape Matching: Similarity Measures and Algorithms. // Technical Report UU-CS – 2001. pp. 188–199.

Надійшла до редколегії 06.06.2007

УДК 518:517.944/947

Саженьюк В.С., канд. фіз.-мат. наук

Методи штрафу та фіктивних областей для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням на границі області.

Розглядається клас параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням на границі області. Отримані оцінки швидкості збіжності методів штрафу та фіктивних областей.

Ключові слова: варіаційна нерівність, метод штрафу, метод фіктивних областей.

*E-mail: moe@unicvb.kiev.ua

Статтю представив д. фіз.-мат. наук, проф. Войцеховський С. О.

У випадках складних областей при знаходженні розв'язків крайових задач використовується метод фіктивних областей [1,2]. В той же час, питання застосування методу фіктивних областей до побудови чисельних алгоритмів розв'язування варіаційних нерівностей вивчені недостатньо.

В статті досліджується клас параболічних варіаційних нерівностей з обмеженням на границі області. Для цього класу нерівностей отримані оцінки швидкості збіжності комбінації методів штрафу та фіктивних областей в нормі простору $W_2^{1,0}(Q_T)$.

1. Нехай $Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ - циліндр, $S_T = \{(x, t) : x \in \Gamma, t \in (0, T)\}$ - бокова поверхня Q_T .

$$a(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_j} dx_1 dx_2 + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} b_i(x, t) \frac{\partial v_1}{\partial x_i} \cdot v_2 dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} q(x, t) v_1 v_2 dx_1 dx_2, \\ \forall v_1, v_2 \in W_2^{1,0}(Q_T),$$

де

$$q(x, t) \geq q_0 > 0, \quad q(x, t), b_i(x, t) \in L_{\infty}(Q_T), \\ a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \quad a_{ij}(x, t) \in W_2^1(Q_T),$$

Sazhenyuk V.S., candidate of fiziko-matematichnikh sciences

Methods of penalty and fictitious areas for parabolic variational inequalities of second order with restriction on border of area.

Examined is class of parabolic variational inequalities of second order with restriction on border of area. Estimations of velocity of convergence for methods of penalty and fictitious areas.

Key words: variational inequality, method of penalty, method of fictitious areas.

- коерцитивна білінійна форма.

Розглянемо наступну задачу розв'язування варіаційної нерівності з обмеженням на границі області:

знайти функцію $u \in K$, $u(0, x) = u_0(x)$, $u_0(x) \geq 0$, $x \in \Gamma$ таку, що:

$$- \int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t} (v - u) dx dt + \int_0^T a(u, v - u) dt \geq \int_{Q_T} f(v - u) dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(0, x) - u_0(x)|^2 dx, \quad \forall v \in K \quad (1)$$

де

$$f \in L_2(Q_T), u_0 \in W_2^2(\Omega), v_i \in L_2(Q_T),$$

$K = \{v | v \in W_2^{1,0}(Q_T), v \geq 0 \text{ майже всюди на } S_T\}$ -

Варіаційній нерівності (1) поставимо у відповідність наступну задачу зі штрафом:

знайти функцію $u_{\varepsilon} \in W_2^{1,0}(Q_T)$ таку, що

$$u_{\varepsilon}(0, x) = u_0(x), \\ - \int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t} u_{\varepsilon} dx dt + \int_0^T a(u_{\varepsilon}, v) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} u_{\varepsilon}^- v dx dt = \\ = \int_{Q_T} f v dx dt + \int_{\Omega} u_0 v(x, 0) dx, \quad (2)$$

$$\forall v \in W_2^{1,1}(Q_T), v(x, T) = 0,$$

де $u_{\varepsilon}^- = 0,5 u_{\varepsilon} (\text{sign} u_{\varepsilon} - 1)$, $\varepsilon > 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Розв'язок задачі (2) збігається при $\varepsilon \rightarrow 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), при цьому має місце оцінка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_1 \sqrt{\varepsilon} \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (3)$$

(тут і надалі через M , будемо позначати додатні сталі, які не залежать від ε та δ).

Доведення. Від задачі (1) перейдемо до еквівалентної:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad (x, t) \in S_T,$$

де

$$A \equiv -\sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + q(x, t) -$$

оператор, зв'язаний з формою $a(u, v)$;

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i).$$

Задача (2) еквівалентна наступній початково - крайовій задачі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + Au_\varepsilon &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u_\varepsilon(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} - \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon^- &= 0, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки [3] $u_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q_T)$, то з (5) можна отримати

$$\|u_\varepsilon^-\|_{L_2(S_T)} \leq M_2 \varepsilon \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}) \quad (6)$$

Для функції $w(x, t) = u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)$ маємо задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad w \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} = u_\varepsilon \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot u, \quad (x, t) \in S_T,$$

Звідси випливає нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|w\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt &\leq \\ &\leq M_3 \int_{S_T} (u_\varepsilon \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot u) dx dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Оцінимо праву частину нерівності (7):

$$\begin{aligned} \int_{S_T} (u_\varepsilon \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot u) dx dt &= \int_{S_T} (u_\varepsilon \cdot \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u_\varepsilon) dx dt - \\ &- \int_{S_T} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \cdot u dx dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} u_\varepsilon^- u_\varepsilon dx dt - \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} u_\varepsilon^- u dx dt - \int_{S_T} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt \leq \\ &\leq - \int_{S_T} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt = - \int_{S_T} u_\varepsilon^+ \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt + \\ &+ \int_{S_T} u_\varepsilon^- \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt \leq \int_{S_T} u_\varepsilon^- \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} dx dt \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{L_2(S_T)} \cdot \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(S_T)} \leq M_4 (\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \cdot \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(S_T)}), \end{aligned}$$

(ми скористались очевидними нерівностями $u_\varepsilon^+ \geq 0$, $u_\varepsilon^- \geq 0$, $u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon^- \leq 0$, $u \cdot u_\varepsilon^- \geq 0$ та формулою $u_\varepsilon^+ = u_\varepsilon + u_\varepsilon^-$). З (7) тепер знайдемо

$$\|w\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_5 (\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \cdot \|u_\varepsilon^-\|_{L_2(S_T)}).$$

З останньої нерівності, (6) та оцінки [3]

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_6 \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)})$$

впливає твердження теореми. Теорему доведено.

II. Нехай $Q_T^0 = \{(x, t) : x \in \Omega_0, t \in (0, T)\}$ -

паралелепіпед, Ω_0 - прямокутник з границею Γ_0 ,

$S_T^0 = \{(x, t) : x \in \Gamma_0, t \in (0, T)\}$ - бокова

поверхня Q_T^0 , $\Omega_1 = \Omega_0 - \Omega$;

$Q_T^1 = \{(t, x), x \in \Omega_1, t \in (0, T)\}$; $Q_T^0 = Q_T^1 + Q_T$.

Для задачі (2) застосуємо метод фіктивних областей [2]. Узагальнена постановка задачі, отриманої за допомогою методу фіктивних областей має вигляд:

знайти $u_\delta \in W_2^{1,0}(Q_T^0)$ таке, що

$$\begin{aligned} - \int_{Q_T^0} \frac{\partial v}{\partial t} u_\delta dx dt + \int_0^T a(u_\delta, v) dt - \\ - \delta \int_{Q_T^1} \frac{\partial v}{\partial t} u_\delta dx dt + \delta \int_{Q_T^1} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx dt - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} u_{\varepsilon}^{-} v dx dt = \int_{Q_T} f v dx dt + \int_{\Omega} u_0 v(x, 0) dx,$$

$$\forall v \in W_2^{1,1}(Q_T^0), v(x, T) = 0, \delta > 0. \quad (8)$$

Задача (8) має єдиний розв'язок, що належить простору $W_2^{2,1}(Q_T)$ [4]. Має місце наступна теорема.

Теорема 2. Розв'язок задачі (8) збігається при $\delta \rightarrow 0$ до розв'язку варіаційної нерівності (1), причому має місце оцінка

$$\|u - u_{\delta}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_7 \delta \cdot (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}). \quad (9)$$

Доведення. Введемо функцію

$$w(x, t) = \bar{u}(x, t) - u_{\delta}(x, t) + \eta(x, t),$$

$$\text{де } \bar{u}(x, t) = u_{\varepsilon}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T; \quad \bar{u}(x, t) = 0,$$

$$(x, t) \in Q_T^1; \quad \eta(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$u_{\varepsilon}(x, t)$ - розв'язок задачі зі штрафом (2);

$\eta(x, t)$ задовольняє інтегральній тотожності

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T^1} \frac{\partial v}{\partial t} \eta dx dt + \int_{Q_T^1} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx dt - \\ & - \int_{S_T} \frac{\partial \eta}{\partial n} v dx dt = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\forall v \in W_2^{1,1}(Q_T^0), v(x, T) = 0.$$

Помножимо (10) на δ , додамо його до рівняння (2), а потім віднімемо з (8). Після нескладних перетворень для функції $w(x, t)$ отримаємо задачу

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t} w dx dt + \int_0^T a(w, v) dt - \\ & - \delta \int_{Q_T^1} \frac{\partial v}{\partial t} w dx dt + \delta \int_{Q_T^1} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx dt + \int_{Q_T} f v dx dt - \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} (u_{\varepsilon}^{-} - u_{\delta}^{-}) v dx dt = -\delta \int_{S_T} \frac{\partial \eta}{\partial n} v dx dt, \end{aligned}$$

$$\forall v \in W_2^{1,1}(Q_T^0), v(x, T) = 0.$$

Покладемо в останній рівності

$$v = \begin{cases} u_{\varepsilon} - u_{\delta}, & x \in \bar{Q}_T \\ \eta - u_{\delta}, & x \in Q_T^1 \end{cases}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2 dx + \int_0^T a(w, w) dt + \frac{\delta}{2} \int_{Q_T^1} w^2 dx dt +$$

$$+ \delta \int_{Q_T^1} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{S_T} (u_{\varepsilon}^{-} - u_{\delta}^{-}) \times$$

$$\times (u_{\varepsilon} - u_{\delta}) dx dt = -\delta \int_{S_T} \frac{\partial \eta}{\partial n} w dx dt.$$

Використовуючи монотонність функції $-v^{-}$, нерівність Коші-Буньяковського та оцінки [5]

$$\left\| \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\|_{L_2(S_T)} \leq M_8 \|\eta\|_{W_2^{2,1}(Q_T^1)},$$

$$\|u_{\delta} - u_{\varepsilon}\|_{L_2(S_T)} \leq M_9 \|u_{\delta} - u_{\varepsilon}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)},$$

з останньої нерівності отримаємо оцінку

$$\|u_{\delta} - u_{\varepsilon}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_{10} \delta (\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}).$$

Далі, в силу оцінки (3) маємо

$$\begin{aligned} \|u - u_{\delta}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} & \leq \|u - u_{\varepsilon}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} + \|u_{\varepsilon} - u_{\delta}\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq \\ & \leq M_{11} (\sqrt{\varepsilon} + \delta) (\|f\|_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Поклавши $\varepsilon = \delta^2$, отримаємо оцінку (9).

Список використаних джерел

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1977, 456 с.
2. Войцеховский С. А. Метод фиктивных областей для параболических уравнений второго порядка. // В сб. Вычислительная и прикладная математика. - 1982- вып. 47-с. 35- 42.
3. Бенсусан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства: Пер. с франц. - М.: Наука, 1987. - 600с.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967, 736 с.
5. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976, 392 с.

Надійшла до редколегії 27.11.2006

УДК 519.3

В. В. Семенов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Узагальнені екстремальні елементи опуклих функціоналів

Для опуклих екстремальних задач у нереліксивних та не ізоморфних спряжених банахових просторах запропоновано узагальнену постановку. Доведено існування узагальнених розв'язків та досліджено їх властивості.

Ключові слова: узагальнений розв'язок, опуклість, функціонал, екстремальна задача.

E-mail: snakkar@univ.kiev.ua

У даній роботі ми пропонуємо й досліджуємо конструкцію побудови узагальненої (слабкої) постановки опуклих екстремальних задач. Ми покажемо, що довільний опуклий неперервний функціонал, визначений на замкненій опуклій і обмеженій підмножині сепарабельного банахова простору має узагальнений екстремальний елемент.

Безпосереднім поштовхом до написання роботи було ознайомлення зі статтею [1], де введено поняття узагальненого екстремального елементу заданих у банахових просторах функціоналів (лінійних або додатно однорідних).

Зауважимо, що ідея розширення поняття розв'язку екстремальної задачі, висунута свого часу Д. Гільбертом, була повністю реалізована ще у 30-ті роки ХХ століття Л. Янгом [2] і Е. Мак Шейном [3] для одновимірних задач варіаційного числення у формі "узагальнених кривих" (див. також багатовимірні узагальнення в [4]). В теорії оптимального керування аналогічні конструкції розширення пропонувались й досліджувались Р.В. Гамкрелідзе [5] ("ковзаючі режими"), Дж. Варгою [6, 7] ("узагальнені криві" та "узагальнені керуючі функції"), Е. Мак Шейном [8] ("релаксовані керування"), А. Гуйла-Урі [9] ("граничні керування") та іншими математиками.

Допоміжні результати

Наведемо допоміжні результати, на яких ґрунтується запропонована нижче конструкція узагальнених розв'язків опуклих екстремальних задач.

Теорема 1. Нехай X – опукла, обмежена і замкнена підмножина сепарабельного банахова

V. V. Semenov, PhD, associate professor

Generalized extremal elements for convex functionals

Generalized setting is proposed for convex extremal problems in Banach space which is non-reflexive and non-isomorphic to a conjugate one. Generalized solutions existence is proved and their properties are investigated.

Key Words: generalized solution, convexity, functional, extremal problem.

простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Тоді існує такий лінійний підпростір $F \subseteq E^*$, що:

1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ – сепарабельний лінійний нормований простір;

2) F – 1-нормуючий підпростір E^* , тобто
$$\forall x \in E: \|x\|_E = \sup_{y \in F \cap B_1(E^*)} |\langle y, x \rangle_{E^*, E}|;$$

3) довільна точка $x \in E \setminus X$ строго відділяється від множини X елементом підпростору F , тобто $\forall x \in E \setminus X \exists y \in F$:

$$\langle y, x \rangle_{E^*, E} > \sup_{x' \in X} \langle y, x' \rangle_{E^*, E}.$$

Зауваження 1. Якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ є рефлексивним, то замикання, побудованого у теоремі 1, лінійного підпростору $F \subseteq E^*$ співпадає з E^* , бо топологічний спряжений простір до рефлексивного банахова простору не містить власних замкнених і тотальних лінійних підпросторів.

Теорема 2. Нехай X – непорожня підмножина сепарабельного банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$. $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – напівнеперервний знизу опуклий функціонал, $\text{int dom } f \supseteq X$. Тоді існує такий лінійний підпростір $F \subseteq E^*$, що:

1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ – сепарабельний лінійний нормований простір;

2) якщо $\forall y \in F \langle y, x_n \rangle_{E^*, E} \rightarrow \langle y, x \rangle_{E^*, E}$ при $n \rightarrow \infty$ ($x \in X, x_n \in X$), то
$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Зауваження 2. Для справедливості теореми 2 достатньо вимагати опуклості й неперервності функціоналу f на множині X .

Твердження наступної теореми безпосередньо випливає з теорем 1 і 2.

Теорема 3. Нехай X – непорожня опукла, обмежена і замкнена підмножина сепарабельного банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$, функціонали $f_k : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($k \in \mathbb{N}$) напівнеперервні знизу опуклі і такі, що $\text{int dom } f_k \supseteq X$. Тоді існує лінійний підпростір $F \subseteq E^*$ з наступними властивостями:

- 1) $(F, \|\cdot\|_{E^*})$ – сепарабельний банахів простір;
- 2) F – 1-нормуючий підпростір E^* ;
- 3) довільна точка $x \in E \setminus X$ строго відділяється від множини X елементом підпростору F ;
- 4) якщо $\forall y \in F \quad \langle y, x_n \rangle_{E^*, E} \rightarrow \langle y, x \rangle_{E^*, E}$ при $n \rightarrow \infty$ ($x \in X, x_n \in X$), то

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f_k(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_k(x_n).$$

Узагальнені розв'язки опуклих екстремальних задач

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$ – сепарабельний банахів простір. Розглянемо екстремальну задачу

$$f(x) \rightarrow \inf_{x \in X}, \quad (P)$$

де X – непорожня опукла, обмежена і замкнена підмножина простору E , функціонал f неперервний і опуклий на множині X . Інфімум множини значень f на X позначимо через $\inf_X f$, а множину розв'язків (класичних) задачі (P) – $\arg \inf_X f = \{x \in X : f(x) = \inf_X f\}$.

У такій постановці без додаткових припущень задача (P) може не мати розв'язків. Наша безпосередня мета полягає у побудові та дослідженні такої природної узагальненої постановки задачі (P) , що завжди має розв'язки.

Побудуємо для множини X і функціоналу f банахів простір $(F, \|\cdot\|_{E^*})$, що задовольняє твердження теореми 3. Далі звуження норми $\|\cdot\|_{E^*}$ на F будемо позначати $\|\cdot\|_F$.

Оскільки $F \subseteq E^*$ тотальний лінійний підпростір, то в E можна розглянути хаусдорфову і

локально опуклу топологію $\sigma(E, F)$, фундаментальною системою околів нуля якої є набір усіх множин виду

$$W(y_1, \dots, y_n; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle y_k, x \rangle| \leq \varepsilon, y_k \in F, 1 \leq k \leq n\}.$$

Як випливає з теореми 3, функціонал f $\sigma(E, F)$ -напівнеперервний знизу на X , а множина X замкнена в топології $\sigma(E, F)$.

Розглянемо банахів простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$, спряжений до простору $(F, \|\cdot\|_F)$. Він грає роль природного розширення простору $(E, \|\cdot\|_E)$. Якщо банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ є рефлексивним і, відповідно, задача (P) розв'язна, то, як випливає з зауваження 1, побудований простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$ співпадає з $(E, \|\cdot\|_E)$.

В наступних твердженнях описано зв'язок між просторами $(E, \|\cdot\|_E)$ та $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$.

Твердження 1. Простір $(E, \|\cdot\|_E)$ лінійно та ізометрично вкладається у простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$.

Зауваження 3. Зрозуміло, що

$$\forall x \in E \quad jx = \pi x|_F,$$

де $\pi : E \rightarrow E^{**}$ – канонічне вкладення E у другий спряжений E^{**} .

Твердження 2. Множина $j(B_1(E))$ секвенційально щільна в $B_1(F^*)$ відносно топології $\sigma(F^*, F)$.

Твердження 3. Множина $j(E)$ секвенційально щільна в F^* відносно топології $\sigma(F^*, F)$.

Твердження 4. Обмежена множина $M \subseteq F^*$ відносно секвенційально компактна в топології $\sigma(F^*, F)$.

Сформулюємо узагальнену постановку задачі (P) .

Розглянемо множину $\tilde{X} \subseteq F^*$ – секвенційально не замикаючи множини $j(X)$ в топології $\sigma(F^*, F)$. Звичайно, множина $\tilde{X}$ є опуклою та $\sigma(F^*, F)$ -компактною множиною простору F^* .

Відмітимо, що в множину $\tilde{X}$ не можуть потрапити елементи простору E , які не лежать у множині X , точніше, якщо $x \notin X$, то $jx \notin \tilde{X}$. Припустимо протилежне. Тоді існує така послідовність $x_n \in X$, що $jx_n \rightarrow jx$ в топології $\sigma(F^*, F)$. Але з $x \notin X$ випливає існування такого функціоналу $y \in F$, що

$$\langle y, x \rangle_{E^*, E} > \sup_{x' \in X} \langle y, x' \rangle_{E^*, E},$$

зокрема,

$$\langle jx, y \rangle_{F^*, F} > \sup_{n \in \mathbb{N}} \langle jx_n, y \rangle_{F^*, F}.$$

Побудуємо продовження функціоналу f на множину $\tilde{X}$. Покладемо $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \in X, \right.$$

$$\left. jx_n \rightarrow \tilde{x} \text{ в топології } \sigma(F^*, F) \right\}.$$

Лема 1. Мають місце твердження:

- 1) функціонал $\tilde{f}$ опуклий на $\tilde{X}$;
- 2) $\tilde{f}|_X = f$;
- 3) $\inf_X f = \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$;
- 4) функціонал $\tilde{f} \in \sigma(F^*, F)$ -напівнеперервним знизу на множині $\tilde{X}$.

Задачі (P) поставимо у відповідність наступну задачу

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \rightarrow \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}}, \quad (\tilde{P})$$

яку будемо називати узагальненою постановкою екстремальної задачі (P), або F^* -розширенням задачі (P).

Зауваження 4. Підкреслимо, що коли банахів простір $(E, \|\cdot\|_E)$ рефлексивний, то F^* -розширення задачі (P), тобто задача $(\tilde{P})$, співпадає з вихідною задачею (P), яка у цьому випадку, звичайно, має непорожню множину розв'язків.

Зауваження 5. Як впливає з теореми 3, ми можемо побудувати узагальнені постановки з використанням спільного простору F^* для довільної зліченної сім'ї опуклих екстремальних задач

$$f_k(x) \rightarrow \inf_{x \in X}. \quad (P_k)$$

Означення 1. Елемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (P), якщо

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}.$$

Множину усіх узагальнених розв'язків позначимо $\arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. Множина $\arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$ узагальнених розв'язків задачі (P) непорожня опукла та $\sigma(F^*, F)$ -компактна.

Встановимо зв'язок між узагальненими розв'язками, класичними розв'язками та мінімізуючими послідовностями задачі (P).

Теорема 5. Мають місце твердження:

- 1) $j(\arg \inf_X f) = j(X) \cap \arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$;
- 2) нехай (x_n) мінімізуюча послідовність задачі (P), тоді існують такі елементи $\tilde{x} \in \arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$ і підпослідовність (x_{n_i}) , що $jx_{n_i} \rightarrow \tilde{x}$ в топології $\sigma(F^*, F)$;
- 3) нехай $\tilde{x} \in \arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$, тоді існує така мінімізуюча послідовність задачі (P) (x_n) , що $jx_n \rightarrow \tilde{x}$ в топології $\sigma(F^*, F)$.

Наведемо одне твердження, яке є деяким секвенціальним аналогом класичної умови екстремуму для задачі (P). Припустимо додатково, що функціонал f диференційовний у розумінні Га-то на множині X .

Теорема 6. Нехай $\tilde{x} \in \arg \inf_{\tilde{X}} \tilde{f}$. Тоді існує послідовність (x_n) , $x_n \in X$, така, що

$$jx_n \rightarrow \tilde{x} \text{ в топології } \sigma(F^*, F), \quad (1)$$

$$f(x_n) \rightarrow \inf_X f = \tilde{f}(\tilde{x}), \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f'(x_n), x - x_n \rangle_{E^*, E} \geq 0 \quad \forall x \in X. \quad (3)$$

Зауваження 6. Якщо не вимагати гладкості f , то у теоремі 6 нерівність (3) слід замінити на

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n; x - x_n) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

де $f'(x; p)$ – похідна f за напрямом p у точці x , або на нерівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathcal{D}(x_n)} \langle y, x - x_n \rangle_{E^*, E} \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Зауваження 7. Як видно з наведених міркувань, ми могли б вкласти простір E у другий спряжений E^{**} і, здійснивши відповідні замикання й продовження, отримати узагальнені розв'язки задачі (P).

Але елементи простору E^* часто мають неконструктивний опис. Тому ми й обрали шлях, що веде до побудови вкладення E в F^* .

Застосування до задачі опуклої максимізації

Розглянемо екстремальну задачу

$$f(x) \rightarrow \sup_{x \in X}, \quad (4)$$

де X – непорожня опукла, обмежена і замкнена підмножина сепарабельного банахова простору E , функціонал $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклим та ліпшицевим на обмежених підмножинах E . Зауважимо, що ліпшицевість на обмежених множинах опуклого функціоналу рівносильна його обмеженості на обмежених множинах. Дійсно, нехай $M > 0$ і $K = \sup_{x \in B_M(E)} |f(x)|$, тоді $2K/M$ – константа Ліпшиця для f на кулі $B_M(E)$ (див. [10, с. 22]). Якщо функціонал f не є секвенційно неперервним у топології $\sigma(E, E^*)$, тоді знайдеться непорожня опукла, обмежена і замкнена множина $X \subseteq E$ на якій функціонал f не досягає свого супремума [11]. Аналіз типових постановок задач оптимального керування та теорії оцінювання показує, що умова слабкої секвенційної неперервності функціоналу f як правило не виконується і задача (4) досить часто не має розв'язків.

Застосуємо розроблений у попередньому пункті підхід для отримання певної "регуляризації" задачі (4). Будуємо простори $(F, \|\cdot\|_F)$ і $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$. Множину $j(X)$ замикаємо в F^* до множини $\tilde{X}$. Функціонал f продовжимо на F^* наступним чином:

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \inf \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) : x_n \in E, \right. \\ \left. jx_n \rightarrow \tilde{x} \text{ в топ. } \sigma(F^*, F), (x_n) \text{ обм.} \right\}.$$

Продовжений функціонал $\tilde{f}$ опуклий, напівнеперервний знизу відносно топології $\sigma(F^*, F)$ і задовольняє нерівність: $\tilde{f}(\tilde{x}) \leq \sup_{x \in B_{1/F^*}(E)} f(x)$ $\forall \tilde{x} \in F^*$. Таким чином, функціонал $\tilde{f}$ обмежений на обмежених множинах з F^* , зокрема, ліпшицевий на множині $\tilde{X}$.

Розглянемо задачу

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \rightarrow \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}}.$$

Дана задача, звичайно, може мати порожню множину розв'язків. Але вона поставлена у спряженому банаховому просторі і допустима множина $\tilde{X} \in \sigma(F^*, F)$ -компактною. Як доведено у роботі [12], для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий функціонал $y \in F$, що $\|y\|_F < \varepsilon$ і задача

$$\tilde{f}(\tilde{x}) + \langle \tilde{x}, y \rangle_{F^*, F} \rightarrow \sup_{\tilde{x} \in \tilde{X}}$$

має непорожню множину розв'язків, серед яких, звичайно, є крайні точки множини $\tilde{X}$.

Деякі зауваження та узагальнення

Сепарабельність банахова простору $(E, \|\cdot\|_E)$ не є принциповим обмеженням. Запропонована конструкція узагальнених розв'язків опуклих екстремальних задач може бути застосована й без виконання цієї умови. Звичайно, замість секвенційних понять слід використовувати більш універсальні топологічні поняття – сіті чи фільтри.

Нехай F будь-який 1-нормуючий підпростір E^* , тоді функціонал $E \ni x \mapsto \|x\|_E$ є напівнеперервним знизу відносно топології $\sigma(E, F)$.

Розглянемо задачу найкращого наближення

$$\|x - y\|_E \rightarrow \inf_{x \in X},$$

де X – опукла, обмежена і замкнена підмножина простору E , $y \in X$. З вищесказаного випливає, що побудова узагальнених у нашому розумінні постановок задач найкращого наближення залежить лише від властивостей множини X .

Розглянемо приклад застосування розробленого підходу. У просторі $L_1([-1, 1])$ поставимо екстремальну задачу:

$$f(x) = \|x\|_{L_1([-1, 1])} - 2 \int_{-1}^1 (1-t^2)x(t) dt \rightarrow \inf, \quad (5)$$

$$x \in B_1(L_1([-1, 1])) =$$

$$= \left\{ x \in L_1([-1, 1]) : \int_{-1}^1 |x(t)| dt \leq 1 \right\}. \quad (6)$$

Легко показати, що задача (5), (6) не має розв'язків в просторі $L_1([-1, 1])$.

Побудуємо узагальнену постановку. У якості підпростору $F \subseteq (L_1([-1, 1]))^*$, що задовольняє умовам теорем 1 і 2 можна узяти множину функ-

ціоналів, що породжуються елементами простору $C([-1,1])$, тобто

$$y \in F \Leftrightarrow \exists \bar{y} \in C([-1,1]):$$

$$\langle y, x \rangle_{L_\infty, L_1} = \int_{-1}^1 \bar{y}(t) x(t) dt \quad \forall x \in L_1([-1,1]).$$

Відображення

$$F \ni y \rightarrow \bar{y} \in C([-1,1])$$

є ізометричним ізоморфізмом лінійних нормованих просторів $(F, \|\cdot\|_F)$ і $(C([-1,1]), \|\cdot\|_{C([-1,1])})$.

За теоремою Ф. Рісса спряжений простір $(F^*, \|\cdot\|_{F^*})$ ізометрично ізоморфний простору $M([-1,1])$ усіх борельових мір на $[-1,1]$ з скінченною варіацією. Множина $B_1(L_1([-1,1]))$ замикається у банаховому просторі $M([-1,1])$ до множини

$$B_1(M([-1,1])) = \{\mu \in M([-1,1]):$$

$$\|\mu\|_{M([-1,1])} = \text{var}(\mu) \leq 1\}.$$

Функціонал f продовжується на весь простір $M([-1,1])$.

Отримаємо узагальнену задачу

$$\tilde{f}(\mu) = \int_{-1}^1 d|\mu|(t) - 2 \int_{-1}^1 (1-t^2) d\mu(t) \rightarrow \inf,$$

$$\mu \in M([-1,1]), \text{var}(\mu) \leq 1.$$

для якої справедливі теореми 4 і 5. Узагальненим розв'язком задачі (5), (6) є δ -міра Дірака, зосереджена у точці 0.

Поміркуємо над можливістю застосування схеми F^* -розширення до задач мінімізації неопуклих функціоналів. Нехай дано задачу (P) , де функціонал f неопуклий. Підпростір $F \subseteq E^*$ задовольняє твердження теореми 1. Якщо функціонал f є напівнеперервним знизу на X відносно топології $\sigma(E, F)$, то можна побудувати коректну у просторі F^* узагальнену постановку задачі (P) . Отже, ключовим питанням є дослідження умов $\sigma(E, F)$ -напівнеперервності знизу функціоналу f на множині X для заданого тотального підпростору $F \subseteq E^*$.

Висновки

У роботі запропоновано конструкцію побудови узагальненої постановки опуклих екстремальних задач. Зокрема, показано, що довільний опуклий неперервний функціонал, що визначений на замкненій опуклій і обмеженій підмножині сепарабельного банахова простору має узагальнений екстремальний елемент. Зауважимо, що можлива побудова узагальненої постановки з використанням спільного простору для довільної зліченної сім'ї опуклих екстремальних задач.

Список використаних джерел

1. Номировский Д.А., Петунин Ю.И., Савкина М.Ю. Обобщенные экстремальные элементы в банаховом пространстве // Журнал вычислительной та прикладной математики. – 2003. – Вып. 89 (2). – С. 71-79.
2. Young L.C. Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations, C. R. Sci. et des Lettres de Varsovie, classe III, 30 (1937), 212-234.
3. McShane E. Generalized curves, Duke Math. J., 6 (1940), 513-536.
4. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. Москва: Мир, 1974. – 488 с.
5. Гамкрелидзе Р.В. О скользящих оптимальных режимах // ДАН СССР, 143 (1962), с. 1243-1245.
6. Warga J. Relaxed variational problems, J. Math. Anal. Appl. 4 (1962), 111-128.
7. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – Москва: Наука, 1977. – 624 с.
8. McShane E. Relaxed controls and variational problems, SIAM J. Control, 5 (1967), 438-485.
9. Ghouila-Houri A. Generalisation de la notion de commande d'un systeme guidable, Revue d'Informatique et de Recherche Operationnelle, Dunod, 4 (1967), 7-32.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – Москва: Мир, 1979. – 399 с.
11. С.И.Ляшко, В.В.Семенов, М.В.Кацев Замечания о достижимости супремума выпуклым функционалом // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 1-2. – С. 81-86.
12. Семенов В.В., Кацев М.В. Лінійний варіаційний принцип в опуклій максимізації // Доповіді НАН України. – 2007. – №3. – С. 51-58.

Надійшла до редколегії 20.09.07

УДК 519.9

Терещенко* Л.М., канд.фіз.-мат.наук

Напружений стан двох магніто-м'яких кругових осесиметричних включень, що знаходиться під дією однорідного магнітного поля.

Розглянуто задачу про напружено-деформований стан магніто-м'якого ферромагнетика з двома круговими включеннями при дії однорідного магнітного поля.

Ключові слова: магнітопружність, магніто-м'які ферромагнетики.

*E-mail: lida_tereshchenko@mail.ru

В даній роботі розглядається взаємодія однорідного магнітного поля з магніто-м'яким ферромагнетиком, який містить два осесиметричні включення. Магнітне поле діє в напрямку x_2 . В статті визначаються основні характеристики напружено-деформованого стану та індукованого магнітного поля. Основні рівняння магнітопружності лінеаризуються за допомогою припущення, що компоненти магнітного поля (напруженість - $\vec{H}$, індукцію - $\vec{B}$ та намагніченість - $\vec{M}$) в деформівному тілі можна розбити на дві складові: жорсткий недеформований стан ($\vec{H}, \vec{B}, \vec{M}$) та збурений стан ($\vec{h}, \vec{b}, \vec{m}$), обумовлений деформацією тіла [1, 2].

Для розв'язку задачі необхідно визначити магнітне поле всередині кожного з кругів. Для цього розв'яжемо попередньо задачу магнітостатики. Рівняння магнітостатики для тіла та включень записуються наступним чином:

$$\text{rot } \vec{H} = 0; \quad \text{div } \vec{B}_0 = 0; \quad \vec{B}_0 = \mu_1 \vec{H}_0. \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{H}_0^{(p)} = 0; \quad \text{div } \vec{B}_0^{(p)} = 0; \quad \vec{B}_0^{(p)} = \mu_2 \vec{H}_0^{(p)}, \quad (2)$$

де $p=1, 2$ відповідно перше і друге включення.

Граничні умови мають вигляд

$$[\vec{B}] \cdot \vec{n} = 0; \quad [\vec{H}] \times \vec{n} = 0. \quad (3)$$

L. M. Tereshchenko k.ph.-m.n.

Stress state 2^{nd} of magneto-soft ferromagnetic which contains axisymmetric inclusions and under the action is of homogeneous external magnetic fields.

This article considered the stress-strain state unlimited magneto-soft ferromagnetic, which contains flaky sphere and is under the action of homogeneous external magnetic fields.

Key Words: magnetoelasticity, magneto-soft ferromagnetic.

Розв'язок системи рівнянь (1), (2) представимо у вигляді

$$\vec{H}_0 = \text{grad } \Phi_0; \quad \vec{H}_0^{(p)} = \text{grad } \Phi_0^{(p)}, \quad (4)$$

де Φ, Φ - потенціал всередині кожного включення і поза.

Із розв'язку задачі магнітостатики отримаємо значення індукції магнітного поля в середині кожного із включень

$$B_{02}^1 = \frac{2B_{02}\mu_2}{(\mu_2 + \mu_1)}; \quad B_{02}^2 = \frac{2B_{02}\mu_3}{(\mu_3 + \mu_2)}, \quad (5)$$

Для розв'язку задачі введемо полярну систему координат $x_1 = \rho \cos \varphi; x_2 = \rho \sin \varphi$.

Визначимо основні характеристики магнітопружного поля. Як відмічалось раніше поле діє в напрямку $\vec{B}^0 = \{0, B_{02}\}$. Система рівнянь статичної магнітопружності для тіла та включень записується у вигляді:

$$\nabla^2 \vec{u}^{(p)} + \frac{1}{1-2\gamma_i} \text{grad div } \vec{u}^{(p)} + \frac{2\chi_i}{(1+\chi_i)G_i} (\vec{B}^{(p)0} \cdot \text{grad}) \vec{h}^{(p)} = 0, \quad (6)$$

де $i=1, 2, 3$ відповідно тіло, перше та друге включення.

$$\text{rot } \vec{h} = 0; \quad \text{div } \vec{h} = 0. \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{h}^p = 0; \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок системи рівнянь (7), (8) необхідно шукати при граничних умовах на поверхні та умовах контакту на границі спряження включень в полярній системі координат ($\rho = \rho_0$):

$$\sigma_\rho^* + \sigma_\rho^{(1)} = 0; \quad \sigma_{\rho\varphi}^* + \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0. \quad (9)$$

$$\sigma_\rho^{(1)} + \sigma_\rho^{(2)} = 0; \quad \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} + \sigma_{\rho\varphi}^{(2)} = 0. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mu h_\rho - \mu_2 h_\rho^{(1)} = & (B_\infty - B_\infty^{(1)}) \left(\left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right) \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 h_\rho^{(1)} - \mu_3 h_\rho^{(2)} = & (B_\infty^{(1)} - B_\infty^{(2)}) \left(\left(n_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \rho} \right) \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \left(n_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \varphi} + n_2 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} h_\varphi - h_\varphi^{(1)} = & (H_\infty - H_\infty^{(1)}) \left(n_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \right) \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) \frac{\sin \varphi}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h_\varphi^{(1)} - h_\varphi^{(2)} = & (H_\infty^{(1)} - H_\infty^{(2)}) \left(\left(n_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \rho} \right) \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \left(n_1 \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \varphi} + n_2 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \varphi} \right) \frac{\sin \varphi}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)}; \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} \quad (15)$$

В відповідності до роботи [3] граничну умову (11) перепишемо у вигляді:

$$(1 + \chi_1) h_\rho - (1 + \chi_2) h_\rho^{(1)} = 0. \quad (16)$$

Крайова умова (15) при такому припущенні набуває вигляду

$$h_\varphi - h_\varphi^{(1)} = - \frac{(H_\infty - H_\infty^{(1)})}{\rho_0 \sin \varphi} \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right). \quad (17)$$

Гармонічні функції Φ , Z_0 , Z_1 , Z_2 покладаються рівними [1, 2]

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{A_1 \sin \varphi}{\rho}; \quad Z_0 = A \ln \rho; \\ Z_1 &= 0; \quad Z_2 = \frac{D_2 \sin \varphi}{\rho}, \end{aligned} \quad (18)$$

де C_2 , A , A_1 - невідомі сталі.

Підставляючи функції (18) в формули (7-8), знайдемо переміщення та напруженості в тілі

$$\begin{aligned} h_\rho &= - \frac{A_1 \sin \varphi}{\rho^2}; \quad h_\varphi = \frac{A_1}{\rho^2} \cos \varphi; \\ u_1 &= \frac{\cos \varphi (2D_2 \sin^2 \varphi - A)}{\rho}; \end{aligned}$$

$$u_2 = \sin \varphi \left(\frac{2D_2 (2(1 - \gamma) - \cos^2 \varphi)}{\rho} - \frac{A}{\rho} - \frac{2\chi(1 - 2\gamma)B_{02}A_1}{G(1 + \chi)\rho} \right). \quad (19)$$

Напруженості, магнітний потенціал та переміщення прийmemo для включень рівними

$$h_\rho^{(1)} = C_1 \sin \varphi; \quad h_\varphi^{(1)} = C_1 \cos \varphi;$$

$$\Phi = C \rho \sin \varphi; \quad u_1^{(1)} = C_3 \rho \cos \varphi;$$

$$u_2^{(1)} = \left(\frac{-2\chi_2(1 - 2\gamma_2)C_1 B_{02}^{(1)}}{(1 + \chi_2)G_2} + C_4 \right) \rho \sin \varphi. \quad (20)$$

$$h_\rho^{(2)} = C_2 \sin \varphi; \quad h_\varphi^{(2)} = C_2 \cos \varphi;$$

$$\Phi^{(2)} = C_2 \rho \sin \varphi; \quad u_1^{(2)} = C_5 \rho \cos \varphi;$$

$$u_2^{(2)} = \left(\frac{-2\chi_3(1 - 2\gamma_3)C_5 B_{02}^{(2)}}{(1 + \chi_3)G_3} + C_6 \right) \rho \sin \varphi. \quad (21)$$

Визначимо сумарні напруження в тілі та включеннях відповідно до [3]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho\rho}^* &= \frac{4G_1(\gamma_1 - 2\sin^2 \varphi)D_2}{\rho^2} - \frac{(1 + 4\chi_1\gamma_1)B_{02}A_1}{\rho^2(1 + \chi_1)} + \\
 &+ \frac{2G_1A}{\rho^2} + \frac{B_{02}^2((1 + 4\chi_1)\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{2\mu_1(1 + \chi_1)}; \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \frac{(1 + 4\chi_1\gamma_1)B_{02}A_1}{\rho^2(1 + \chi_1)} + \frac{4G_1(\gamma_1 - 1)D_2}{\rho^2} - \\
 &+ \frac{2G_1A}{\rho^2} + \frac{B_{02}^2((1 + 4\chi_1)\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{2\mu_1(1 + \chi_1)}; \\
 \sigma_{\rho\varphi}^* &= \left(\frac{4G_1D_2}{\rho^2} + \frac{B_{02}^2(1 + 2\chi_1)}{\mu_1(1 + \chi_1)} \right) \cos \varphi \sin \varphi; \\
 \sigma_{\rho\rho}^{*(1)} &= -\frac{(1 + 4\chi_2\gamma_2)B_{02}^{(1)}C_1(1 - 2\sin^2 \varphi)}{(1 + \chi_2)} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(1)2}((1 + 4\chi_2)\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{2\mu_2(1 + \chi_2)} + \\
 &+ \frac{2G_2(\gamma_2 + (1 - 2\gamma_2)\sin^2 \varphi)C_4}{\rho^2} + \\
 &+ \frac{2G_2C_3(\gamma_2 + (1 - 2\gamma_2)\cos^2 \varphi)}{1 - 2\gamma_2}; \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{*(1)} &= \frac{(1 + 4\chi_2\gamma_2)B_{02}^{(1)}C_1(1 - 2\sin^2 \varphi)}{(1 + \chi_2)} + \\
 &+ \frac{2G_2(\gamma_2 + (1 - \gamma_2)\sin^2 \varphi)C_3}{(1 - 2\gamma_2)} - \\
 &- \frac{2G_2(\gamma_2 - 1 + (1 - 2\gamma_2)\sin^2 \varphi)C_4}{(1 - 2\gamma_2)} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(1)2}(1 + 4\chi_2 - 2\sin^2 \varphi(1 + 2\chi_2))}{2\mu_2(1 + \chi_2)} \\
 \sigma_{\rho\varphi}^{*(1)} &= (-2G_2C_3 + 2G_2C_4 + \\
 &+ \frac{2C_1B_{02}^{(1)}(4\chi_2\gamma_2 + 1)}{1 + \chi_2} + \frac{B_{02}^{(1)2}(1 + 2\chi_2)}{\mu_2(1 + \chi_2)}) \cos \varphi \sin \varphi; \\
 \sigma_{\rho\rho}^{*(2)} &= -\frac{(1 + 4\chi_3\gamma_3)B_{02}^{(2)}C_2(1 - 2\sin^2 \varphi)}{(1 + \chi_3)} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(2)2}((1 + 4\chi_3)\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{2\mu_3(1 + \chi_3)} + \\
 &+ \frac{2G_3(\gamma_3 + (1 - 2\gamma_3)\sin^2 \varphi)C_6}{\rho^2} + \\
 &+ \frac{2G_3C_5(\gamma_3 + (1 - 2\gamma_3)\cos^2 \varphi)}{1 - 2\gamma_3}; \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{*(2)} &= \frac{(1 + 4\chi_3\gamma_3)B_{02}^{(2)}C_2(1 - 2\sin^2 \varphi)}{(1 + \chi_3)} + \\
 &+ \frac{2G_3(\gamma_3 + (1 - \gamma_3)\sin^2 \varphi)C_5}{(1 - 2\gamma_3)} - \\
 &- \frac{2G_3(\gamma_3 - 1 + (1 - 2\gamma_3)\sin^2 \varphi)C_6}{(1 - 2\gamma_3)} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(2)2}(1 + 4\chi_3 - 2\sin^2 \varphi(1 + 2\chi_3))}{2\mu_3(1 + \chi_3)} \\
 \sigma_{\rho\varphi}^{*(2)} &= (-2G_3C_5 + 2G_3C_6 + \\
 &+ \frac{2C_2B_{02}^{(2)}(4\chi_3\gamma_3 + 1)}{1 + \chi_3} + \frac{B_{02}^{(2)2}(1 + 2\chi_3)}{\mu_3(1 + \chi_3)}) \cos \varphi \sin \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Підставимо (18) – (22) в граничні умови (9), (10), (12)–(16) і отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, з якої знайдемо невідомі:

$$\begin{aligned}
 &\frac{B_{02}^2(1 + 2\chi_1)}{2\mu_1(1 + \chi_1)} - \frac{4G_1D_2}{\rho_0^2} + G_2C_3 - G_2C_4 - \frac{B_{02}^{(1)}C_1(4\chi_2\gamma_2 + 1)}{(1 + \chi_2)} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(2)2}(1 + 2\chi_2)}{2\mu_2(1 + \chi_2)} = 0; \\
 &\frac{4G_1\gamma_1D_2}{\rho_0^2} - \frac{B_{02}^2}{2\mu_1(1 + \chi_1)} - \frac{2G_2C_4\gamma_2}{1 - 2\gamma_2} + \frac{2G_2C_3(\gamma_2 - 1)}{1 - 2\gamma_2} + \\
 &+ \frac{B_{02}^{(1)}C_1(4\chi_2\gamma_2 + 1)}{(1 + \chi_2)} + \frac{B_{02}^{(1)2}}{2\mu_2(1 + \chi_2)} + \\
 &+ \frac{2G_1A}{\rho_0^2} - \frac{A_1B_{02}(1 + 4\gamma_1\chi_1)}{\rho_0^2(1 + \chi_1)} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{\rho_0^2} - C_1 - \left(\frac{B_{02}}{\mu_1} - \frac{B_{02}^{(1)}}{\mu_2} \right) \left(\frac{2(2\gamma_1 - 3)D_2}{\rho_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\chi_1(1-2\gamma_1)B_{02}}{G_1(1+\chi_1)\rho_0^2} \right) = 0; \quad \frac{A}{\rho_0} + C_3\rho_0 = 0; \\ & \frac{4G_1(1-\gamma_1)D_2}{\rho_0^2} - \frac{2\chi_1 B_{02} A_1(1-2\gamma_1)}{G_1(1+\chi_1)\rho_0} - \rho_0 C_4 + \\ & + \frac{2B_{02}^{(1)} C_1 \chi_2 \rho_0 (1-2\gamma_2)}{(1+\chi_2)G_2} - \frac{A}{\rho_0} = 0; \\ & -\mu_1 \frac{A_1}{\rho_0^2} - \mu_2 C_1 - (B_{02} - B_{02}^{(1)}) (C_4 - \\ & - \frac{2\chi_2 C_1 (1-2\gamma_2) B_{02}^{(1)}}{G_2(1+\chi_2)}) = 0; \\ & C_3 - C_5 = 0; \quad C_1 - C_2 - (H_{02}^{(1)} - H_{02}^{(2)}) C_3 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2(1+4\chi_2\gamma_2)B_{02}^{(1)}C_1}{(1+\chi_2)} + \\ & \frac{(1+4\chi_2)B_{02}^{(1)2}}{2\mu_2(1+\chi_2)} + \frac{2G_2(1-2\gamma_2)C_4}{\rho_0^2} - \\ & - \frac{2(1+4\chi_3\gamma_3)B_{02}^{(2)}C_2}{(1+\chi_3)} - \\ & - \frac{(1+4\chi_3)B_{02}^{(2)2}}{2\mu_3(1+\chi_3)} - \frac{2G_3(1-2\gamma_3)C_6}{\rho_0^2} = 0; \\ & \frac{B_{02}^{(1)2}}{2\mu_2(1+\chi_2)} + 2G_2C_3 - \frac{B_{02}^{(2)2}}{2\mu_3(1+\chi_3)} - 2G_3C_5 = 0; \\ & \mu_2 C_1 - \mu_3 C_2 - (B_{02}^{(1)} - B_{02}^{(2)}) \left(\frac{-2\chi_2(1-2\gamma_2)C_1 B_{02}^{(1)}}{(1+\chi_2)G_2} \right. \\ & \left. + C_4 \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким чином, підставляючи знайдені константи з (23) в (19)-(22) отримаємо аналітичні розв'язки для напружень, переміщень, напруженості магнітного поля та магнітного потенціалу.

Список використаних джерел

1. Huang Ke -Fu, Wang Min -Zhong Complete solution of the linear magnetoelasticity and the magnetic fields in a magnetized elastic half-space // ASME. J. Appl. Mech. 1995.- 62. P. 930-934.
2. Pao Y.-H., Yeh C.-S. A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids // Int. J. Engin. Sci.- 1973.- 11. P. 415-435.
3. Терещенко Л. Н. Плоская деформация ферромагнетика с круговым включением при действии магнитного поля // Вісник Донецького університету.-2002. -№2. С.97-102.
4. Фильштинский Л. А., Кравец Е. М. Плоская задача магнитоупругости для ферромагнитной среды, ослабленной отверстиями. ФХММ, 1995, №6, с.38-46.

Надійшла до редколегії 20.06.07

$$\begin{aligned} & \frac{-2\chi_2(1-2\gamma_2)C_1 B_{02}^{(1)}}{(1+\chi_2)G_2} + C_4 + \\ & + \frac{2\chi_3(1-2\gamma_3)C_5 B_{02}^{(2)}}{(1+\chi_3)G_3} - C_6 = 0; \\ & -2G_2C_3 + 2G_2C_4 + \\ & + \frac{2C_1 B_{02}^{(1)}(4\chi_2\gamma_2 + 1)}{1+\chi_2} + \frac{B_{02}^{(1)2}(1+2\chi_2)}{\mu_2(1+\chi_2)} \\ & + 2G_3C_5 + 2G_3C_6 - \\ & - \frac{2C_2 B_{02}^{(2)}(4\chi_3\gamma_3 + 1)}{1+\chi_3} - \frac{B_{02}^{(2)2}(1+2\chi_3)}{\mu_3(1+\chi_3)} = 0; \\ & - \frac{(1+4\chi_2\gamma_2)B_{02}^{(1)}C_1}{(1+\chi_2)} + \frac{2G_2\gamma_2C_4}{\rho_0^2} + \frac{2G_2C_3\gamma_2}{1-2\gamma_2} \\ & + \frac{(1+4\chi_3\gamma_3)B_{02}^{(2)}C_2}{(1+\chi_3)} - \frac{2G_3\gamma_3C_6}{\rho_0^2} - \frac{2G_3C_5\gamma_3}{1-2\gamma_3} = 0; \end{aligned}$$

УДК 517.2

О.Ю. Трофимчук*

Узагальнений розв'язок задачі Коші для інтегро-диференційного рівняння параболічного типу з виродженням.

Для задачі Коші для інтегро-диференційного рівняння параболічного типу з виродженням отримані достатні умови існування та єдності узагальненого розв'язку. Отримано стійкий різницький розв'язок задачі.

Ключові слова: інтегро-диференційне рівняння, задача Коші, існування та єдність узагальненого розв'язку, різницький розв'язок.

*E-mail: ok_trof@meta.ua

Для аналізу існування та єдності розв'язку задачі Коші для інтегро-диференційного рівняння з диференціальним оператором параболічного типу, який містить розривні коефіцієнти при старших похідних, що приймають нульові значення в областях, обмежених границею розриву, необхідно застосовувати апарат теорії узагальнених розв'язків для рівнянь із частинними похідними [1] – [3]. На основі даного математичного апарату, в статті отримані достатні умови існування та єдності узагальненого розв'язку задачі Коші для системи інтегро-диференційних рівнянь з виродженою параболічністю а також побудовано чисельний алгоритм та отримані достатні умови стійкості чисельного розв'язку локально-одновимірної задачі.

1. Для $y(x, t)$ в області $Q_T = \Omega \times (0, T)$ розглянемо задачу Коші:

$$\begin{aligned} y_t - L(y) &= y_t - \\ &- \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t) y_{x_j} + a_i(x, t) y \right)_{x_i} - b_i(x, t) y_{x_i} \right) + \\ &+ q(x, t) y + r(x, t) \int_{\Omega} g(x, t) y dx = f(x, t), \\ y|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Змінні $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega = E^n$, $t \in (0, T)$. При умові $a_{ij} = a_{ji}$ коефіцієнти $a_{ij}(x, t)$ ($i, j = \overline{1, n}$) задовольняють умовам:

O.Yr. Trofimchuk*

About solution of Cauchy problem for integral-differential equation with parabolic degeneration.

For Cauchy problem for integral-differential equation with parabolic degeneration the sufficient terms of existence and uniqueness of the generalized solution are obtained. The stable numerical solution of problem is built.

Keywords: integral – differential equation, Cauchy problem, existence and uniqueness of the generalized solution, numerical solution.

$$1) 0 < v \xi^2 \leq a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2, x \in \bar{\Omega} \subset \Omega, \quad (2)$$

$$2) a_{ij}(x, t) = 0, x \in \Omega^* = \Omega \setminus \bar{\Omega}, t \in (0, T),$$

де Ω^* – обмежена замкнена множина, $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times (0, T)$, $Q_T^* = \Omega^* \times (0, T)$. Коефіцієнти задачі (1) задовольняють також умовам:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i^2, \sum_{i=1}^n b_i^2, q, r, g \right|_{2, Q_T} \leq \mu \quad (4)$$

$$\left| \sum_{i=1}^n a_{x_i}^2, \sum_{i=1}^n b_{x_i}^2 \right|_{2, Q_T} \leq \mu \quad (5)$$

2. Функцію $y(x, t)$ визначимо як узагальнений розв'язок задачі (1), якщо вона задовольняє інтегральній тотожності

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} \left(-y \eta_t + \sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_{x_j} + a_i y \right) \eta_{x_i} + b_i y_{x_i} \eta \right) + q y \eta \right) dx dt + \\ &+ \int_{Q_T} \left(r(x, t) \eta \int_{\Omega} g(\xi, t) y d\xi \right) dx dt + \\ &+ \int_{Q_T^*} \left(-\eta_t + \sum_{i=1}^n (a_i \eta_{x_i} + (b_i \eta)_{x_i} + q \eta) \right) y dx dt = \\ &= \int_{Q_T} f \eta dx dt \end{aligned} \quad (6)$$

для $\forall \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $\eta(x, T) = 0$. Помножимо рівняння в (1) на функцію $y(x, t)$ та проінтегруємо по Q_T . Після інтегрування по

частинам, отримуємо енергетичну рівність:

$$\begin{aligned} 0.5\|y(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \int_{Q_t} \left(r(x,\tau) y \int_{\Omega} g(\xi,\tau) y d\xi \right) dx d\tau + \\ + \int_{\tilde{Q}_t} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_{x_j} y_{x_i} + a_i y y_{x_i} + b_i y_{x_i} y \right) + q y^2 \right) dx d\tau + \\ + \int_{Q_t^*} \left(\sum_{i=1}^n 0.5(a_i + b_i)_{x_i} + q \right) y^2 dx d\tau = \\ = \int_{Q_t} f y dx d\tau + 0.5\|y(x,0)\|_{2,\Omega}^2 \end{aligned}$$

В (7) використовувалися умови $y \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ та співвідношення

$$(a_i y)_{x_i} y - b_i y_{x_i} y = 0.5(((a_i - b_i) y^2)_{x_i} + (a_i + b_i)_{x_i} y^2)$$

Для побудови енергетичної нерівності із (7), будимо використовувати нерівності Гольдера та нерівності "Коші з ε " а також оцінки для коефіцієнтів (4), (5). Інтеграли по областях $\tilde{Q}_t$, Q_t^* в лівій частині (7) оцінюються по відомим співвідношенням [1], для інтегралу по Q_t маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_t} \left(h(x,\tau) y \int_{\Omega} g(\xi,\tau) y d\xi \right) dx d\tau \right| \leq \quad (8) \\ \leq \int_0^t \left\| \int_{\Omega} r(x,\tau) y dx \right\| \left\| \int_{\Omega} g(x,\tau) y dx \right\| d\tau \leq \\ \leq \int_0^t \left(\int_{\Omega} r^2(x,\tau) dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} y^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2(x,\tau) dx \right)^{1/2} d\tau \leq \\ \leq \mu^2 \|y\|_{2,Q_t}^2 \end{aligned}$$

Із (7), (8) отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} 0.5\|y(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + v\|y_x\|_{2,\tilde{Q}_t}^2 \leq 2\mu\|y\|_{2,\tilde{Q}_t}\|y_x\|_{2,\tilde{Q}_t} + \\ + \mu\|y\|_{2,\tilde{Q}_t}^2 + \mu^2\|y\|_{2,Q_t^*}^2 + 2\mu\|y\|_{2,Q_t^*}^2 + \\ + \left(\|f\|_{2,1,Q_t} + 0.5\|\psi\|_{2,\Omega} \right) \max_{0 \leq \tau \leq t} \|y\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

Позначимо константу $c_1 = 2\left(\frac{2\mu^2}{v} + \mu^2 + 2\mu\right)$,

тоді справедливо:

$$\begin{aligned} \|y(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + v\|y_x\|_{2,\tilde{Q}_t}^2 \leq c_1\|y\|_{2,Q_t}^2 + \\ + \left(2\|f\|_{2,1,Q_t} + \|\psi\|_{2,\Omega} \right) \max_{0 \leq \tau \leq t} \|y\|_{2,\Omega} \quad (7) \end{aligned}$$

Звідси, за методикою [1], отримуємо енергетичну нерівність:

$$\begin{aligned} \|y(x,t)\|_{2,Q_t^*} + \max_{0 \leq \tau \leq t} \|y\|_{2,\tilde{\Omega}} + \|y_x\|_{2,\tilde{Q}_t} = \quad (9) \\ = \|y(x,t)\|_{2,Q_t^*} + \|y\|_{\tilde{Q}_t} \leq c(t) \left(2\|f\|_{2,1,Q_t} + \|\psi\|_{2,\Omega} \right) \end{aligned}$$

де $c(t)$ - функція, що визначається константами T, v, μ , для $\forall t \in [0, T]$.

3. За допомогою отриманих нерівностей доводимо теорему.

Теорема 1. Розв'язок задачі Коші (1) для інтегро - диференціального рівняння з виродженою параболічністю (2), (3) існує та єдиний в класі функцій $L_2(Q_T^*) \cup V_2^1(\tilde{Q}_T)$ при будь-яких $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$ та при виконанні обмежень на коефіцієнти задачі (4), (5).

Доведення існування узагальненого розв'язку (6) побудуємо на основі методу Гальоркіна. Візьмемо фундаментальну систему функцій $\{\varphi_k(x)\}$ в $W_2^1(\Omega)$, ортонормовану в $L_2(\Omega)$, що задовольняють умовам збігання до нуля при $|x| \rightarrow \infty$. Для наближеного розв'язку

$$y^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$$

отримаємо систему N звичайних диференціальних рівнянь для визначення коефіцієнтів $c_k^N(t)$:

$$c_l^N(t) + \sum_{k=1}^N c_k^N \int_{\Omega} g \varphi_k dx \int_{\Omega} r \varphi_l dx + \quad (10)$$

$$\begin{aligned} + \sum_{k=1}^N c_k^N \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_{kx_j} \varphi_{lx_i} + a_i \varphi_k \varphi_{lx_i} + b_i \varphi_{kx_i} \varphi_l \right) + q \varphi_k \varphi_l \right) dx + \\ + \sum_{k=1}^N c_k^N \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n ((b_i \varphi_l)_{x_i} - a_i \varphi_{lx_i}) + q \varphi_l \right) \varphi_k dx = \int_{\Omega} f \varphi_l dx, \end{aligned}$$

$$c_l^N(0) = \int_{\Omega} \Psi \varphi_l dx, \quad l = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Завдяки отриманим вище оцінкам для інтегралів в (7), коефіцієнти системи (10), (11) - обмежені функції змінної t . Тому розв'язок задачі

(10), (11) існує та єдиний – набір неперервних на відрізку $[0, T]$ функцій $c_k^N(t)$. Помножимо кожне з рівнянь системи (10) на $c_l^N(t)$, знайдемо суму по $(l = \overline{1, N})$ та проінтегруємо по $t \in [0, T]$. В результаті отримаємо рівняння енергетичного балансу (7) для функції $y^N(x, t)$, з якого випливає оцінка (9) для $y^N(x, t)$:

$$\|y^N(x, t)\|_{2, Q_T^+} + \max_{0 \leq t \leq T} \|y^N\|_{2, \bar{\Omega}} + \|y^N\|_{2, \bar{Q}_T} = (12)$$

$$= \|y^N(x, t)\|_{2, Q_T^+} + \|y^N\|_{\bar{Q}_T} \leq c_2$$

де константа c_2 не залежить від N , а виражається через T та константи, що обмежують коефіцієнти та функції задачі (1) – (5). Із (12) слід, що з обмеженої послідовності $\{y^N(x, t)\}$, $N = 1, 2, \dots$ можна виділити підпослідовність $\{y^{N_k}(x, t)\}$, $k = 1, 2, \dots$, слабо збіжну в $L_2(Q_T = Q_T^+ \cup \bar{Q}_T)$ до деякого елементу $y \in W_2^1(Q_T)$. Використовуючи методи доведення теореми існування узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння параболічного типу із [1] (що ґрунтуються на теоремах компактного вкладення простору абсолютно неперервних функцій в простір $W_2^1(Q_T)$) далі отримуємо, що $y(x, t) \in$ узагальнений розв'язок задачі (1)–(5).

Енергетична нерівність (9) гарантує єдність розв'язку задачі (1)–(5) в класі функцій $L_2(Q_T^+) \cup V_2^1(\bar{Q}_T)$. Дійсно, якщо для фіксованого набору параметрів задачі (1)–(5) існує два різних розв'язки y' , y'' , то їх різниця $y = y' - y'' \in$ розв'язком задачі (1)–(5) з нульовою правою частиною та нульовим початковим значенням. Із (9) випливає, що

$$\|y(x, t)\|_{2, Q_T^+} + \max_{0 \leq t \leq T} \|y\|_{2, \bar{\Omega}} + \|y\|_{2, \bar{Q}_T} =$$

$$= \|y(x, t)\|_{2, Q_T^+} + \|y\|_{\bar{Q}_T} = 0$$

Тобто, $y(x, t) = 0$ майже всюди в Q_T . Теорема 1 доведена.

4. Розглянемо чисельний метод розв'язку задачі Коші (1)–(5) для локально-одновимірного випадку ($n = 1$). Апроксимацію задачі (1)–(2) проведемо на рівномірній сітці $\bar{\omega}_{h\tau}$ (h, τ – кроки по просторовій та часовій змінній) за допомогою

дворівневої неявної монотонної різницевої схеми порядку $O(h^2 + \tau)$ [4], [5], апроксимацію інтегрального оператора за допомогою квадратурних формул [6]. При апроксимації диференціальних операторів рівняння (1) використовується інтегро-інтерполяційний метод, що дозволяє отримувати консервативні різницеві схеми для рівнянь з розривними коефіцієнтами [4]. Якщо позначити [4] $\hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1})$, $y = y_i^j = y(x_i, t_j)$, A – різницевий оператор, що апроксимує L із (1), то отримаємо різницеву схему:

$$F\hat{y} = (E + \tau A)\hat{y} + \tau(w, \hat{y})r = y + \tau f, \quad (13)$$

$$y(x_i, 0) = \Phi(\psi(x_i)),$$

де E – одиничний оператор, Φ – шаблонний функціонал, що забезпечує порядок апроксимації $O(h^2)$, w – вектор коефіцієнтів для функції $g(x, t)$ за чисельним методом квадратур для інтегрального оператора, r, f – сіточні функції (вектори) для $r(x, t)$, $f(x, t)$. Оператор A задовольняє умовам Липшиць – неперервності:

$$|((A(t) - A(t - \tau))y, y)| \leq \tau C_0(A(t - \tau)y, y),$$

$$C_0 = \text{const} > 0.$$

Різницева апроксимація інтегрального оператора – скалярний добуток $(w, \hat{y})$ в (13) приводить до того, що різницевий оператор F (в даному випадку – матриця) має повністю заповнені (ненульові) елементи. Тобто, на відміну від диференційного рівняння з економічним тридіагональним оператором $B = (E + \tau A)$, інтегро-диференційне рівняння містить матрицю загального вигляду. Але, із (13) можна виразити $(w, \hat{y})$:

$$\hat{y} = B^{-1}y - \tau(w, \hat{y})B^{-1}r + \tau B^{-1}f,$$

$$(w, \hat{y}) = (w, B^{-1}y) - \tau(w, \hat{y})(w, B^{-1}r) + \tau(w, B^{-1}f),$$

$$(w, \hat{y}) = \frac{(w, B^{-1}y)}{(1 + \tau(w, B^{-1}r))} + \frac{\tau(w, B^{-1}f)}{(1 + \tau(w, B^{-1}r))}$$

Підставляємо це значення в (13), маємо різницеву схему

$$\hat{y} = \left(B^{-1}y - \frac{\tau(w, B^{-1}y)}{(1 + \tau(w, B^{-1}r))} B^{-1}r \right) + \tau B^{-1}f \quad (14)$$

$$+ \tau \left(B^{-1} f - \frac{\tau(w, B^{-1} f)}{(1 + \tau(w, B^{-1} r))} B^{-1} r \right)$$

Схема (14) набагато більш економічна, ніж (13), оскільки приводить до необхідності обчислення трьох виразів з тридіагональними матрицями $(E + \tau A)^{-1} y$, $(E + \tau A)^{-1} r$, $(E + \tau A)^{-1} f$. Для цього використовується економічний метод прогонки. Схема (14) має розв'язок при обмеженнях на τ :

$$1 + \tau(w, (E + \tau A)^{-1} r) \geq c_1^{-1} > 0 \quad (15)$$

де $c_1 = \text{const} > 0$. Нехай різницевий оператор A задовольняє умовам:

$$(Ay, y) \geq -\delta(y, y) \quad (16)$$

де $\delta = \text{const} > 0$ - визначена константа. На параметр τ накладаємо додаткові обмеження

$$1 - 3\tau\delta > 0 \quad (17)$$

Тоді для оператора B виконується умова:

$$\begin{aligned} |By|^2 &= ((E + \tau A)y, (E + \tau A)y) = |y|^2 + \\ &+ 2\tau(Ay, y) + \tau^2 |Ay|^2 \geq (1 - 2\tau\delta) |y|^2 \end{aligned}$$

Відповідно, для B^{-1} отримуємо оцінку норми за допомогою (17):

$$\|B^{-1}\| \leq (1 - 2\tau\delta)^{-0.5} \leq 1 + 3\tau\delta \quad (18)$$

Із загального вигляду квадратурних формул для чисельній апроксимації інтегральних операторів слід, що $|w| = O(h)$. Якщо визначити характеристичний масштаб області $h_0 = \text{const} > 0$, то існує $c_2(h_0) = \text{const} > 0$, для якої виконується обмеження $|w| \leq c_2$. Із (4) також отримуємо оцінку для сіточних функцій r_i^j :

$$\max_{0 \leq j \leq M} |r_i^j| \leq \gamma$$

де $\gamma = \mu/T = \text{const} > 0$. Використовуючи правило трикутника, із (14), (15), (17), (18) одержуємо нерівності:

$$|y_i| \leq \left(\|B^{-1}\| + \tau c_1 \|w\| \|B^{-1}\|^2 |r_i| \right) |y_i| + \quad (19)$$

$$+ \tau \left(\|B^{-1}\| + \tau c_1 \|w\| \|B^{-1}\|^2 |r_i| \right) |f| \leq$$

$$\leq \left(1 + \tau(3\delta + c_1 c_2 (1 + 3T\delta)^2 \mu) \right) |y_i| +$$

$$\tau \left(1 + \tau(3\delta + c_1 c_2 (1 + 3T\delta)^2 \mu) \right) |f| \leq$$

$$\leq (1 + \tau C_0) |y_i| + \tau (1 + \tau C_0) |f|$$

де $C_0 = (3\delta + c_1 c_2 (1 + 3T\delta)^2 \mu) > 0$ - константа, що не залежать від h, τ . В (19) використовувалася константа μ із (4). Оцінка (19) справедлива для двох довільних сусідніх часових шарів. По індукції, для довільного $(j+1)$ часового шару маємо оцінку для різницевого розв'язку y^{j+1} :

$$|y^{j+1}| \leq \exp(\tau C_0) \left(|y^j| + \sum_{k=0}^j \tau |f^k| \right) \quad (20)$$

На основі отриманих результатів справедлива

Теорема 2. Нехай оператор A апроксимує диференціальний оператор задачі (1), задовольняє умовам Липшиць - неперервності, квадратурні формули апроксимують інтегральний оператор та виконуються умови (2), (3), (4), (5) та (15), (16), (17). Тоді стійкий розв'язок різницевої задачі (13) надається виразом (14) і для нього справедлива апіорна оцінка (20).

Список використаних джерел

1. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. - 408с.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983. - 424 с.
3. Наконечный О.Г. Оптимальное управление та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. - К.: Київський університет, 2004. - 104 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. - 616с.
5. Акименко В.В. Принцип максимума и нелинейные монотонные схемы для уравнений параболического типа. //Ж.вычисл.матем. и матем.физ. - 1999. Т.39. №4. С.618-629.
6. Батталов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987. - 600с.

Надійшла до редколегії 25.06.2007.

УДК 004.7

Холод Д.В., к.т.н.,
Шевченко В.П.*, к.ф.-м.н., доц.

Архітектура програмної моделі системи автоматизації навчального процесу

Досліджено програмні моделі систем автоматизації навчального процесу для вирішення задач керування навчальними програмами, фундаментальної підтримки компонентів на рівні прикладного інтерфейсу та середовища функціонування.

Ключові слова: сервісно-орієнтовані системи (SOA), провайдер, локатор, сценарій, web-service, class server.

*E-mail: Denys.Kholod@microsoft.com, vpsh@unicyb.kiev.ua

Вступ.

Використання освітніми закладами інформаційних технологій та сучасних сервісів глобальних та локальних комп'ютерних мереж є одним з найважливіших факторів розвитку навчального процесу на сучасному етапі. Невеличкі компанії, університети і комп'ютерні гранди змагаються між собою в розробці систем автоматизації як окремих видів навчальної діяльності, так і навчального процесу в цілому. Викликана цим розпорошеність електронних навчальних ресурсів і строкатість відповідного програмного забезпечення визначає необхідність розробки спеціальних засобів комплексування на основі сучасних телекомунікаційних технологій.

На підставі практичного досвіду викладання різних дисциплін і організації навчального процесу з використанням комп'ютерних і мережних технологій на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в роботі пропонується програмна модель системи автоматизації навчального процесу (САНП). В основу сервісно-орієнтованої архітектури (Service Oriented Architecture - SOA) САНП покладено ідею про те, що ІТ-системи, програмне забезпечення, пристрої та служби мають легко інтегруватись і взаємодіяти одне з одним, навіть якщо деякі з них не розроблялися спеціально з такою метою. Для відкритості системи SOA, зазвичай реалізується на базі XML Web-служб, а компоненти конструюються як набори взаємодіючих служб багаторазового використання, кожна з яких відповідає за одне чи

Kholod D.V., c.t.s.,
Shevchenko V.P., c.ph.-m.s., as.prof.

Architecture of programming model for automation of learning

The article is devoted to research and development of programming model of system for automation of learning. The developed model provides the fundamental support for E-learning components at the application programming interface level and framework level.

Key Words: service oriented systems (SOA), provider, locator, scenario, web service, class server.

кілька чітко визначених прикладних завдань, навчальних процесів або інформаційних послуг.

В архітектурі системи пропонується виділити центральний компонент – ядро. Головними завданнями ядра є слідкування за стабільністю виконання сценаріїв системи, планування системних завдань, обробка подій та виконання інших критично важливих завдань. Під керуванням ядра виконуються базові сценарії системи такі як аутентифікація/авторизація користувачів системи, робота з програмним інтерфейсом різноманітних застосувань (application programming interface – API) та інше. Функціональність базових сценаріїв доступна розробникам, які планують інтегрувати власну систему. Взаємодія з сценаріями відбувається за допомогою відповідних точок доступу.

Модель системи будується на SOA архітектурі, тобто в системі виділяються три ключових компоненти: споживачі, посередники та сервіси. Споживачами системи виступають компоненти, що інтегруються або базуються на програмній моделі даної САНП.

В ролі посередників виступають компоненти названі локаторами. На відміну від відомих посередників архітектури SOA, скажімо, служб UDDI (для SOA на базі XML WEB служб), локатори окрім базових функцій управління та пошуку ресурсів мають більш високо рівневий інтерфейс. Вони можуть вказувати на існування Web інтерфейсу доступу до ресурсу, або існування платформно-залежного клієнта (скажімо Windows застосування). Сервісами виступають високо рівневі або низько рівневі сценарії, які формують функціональність

системи, та взаємодіють з споживачами через точки доступу до системи.

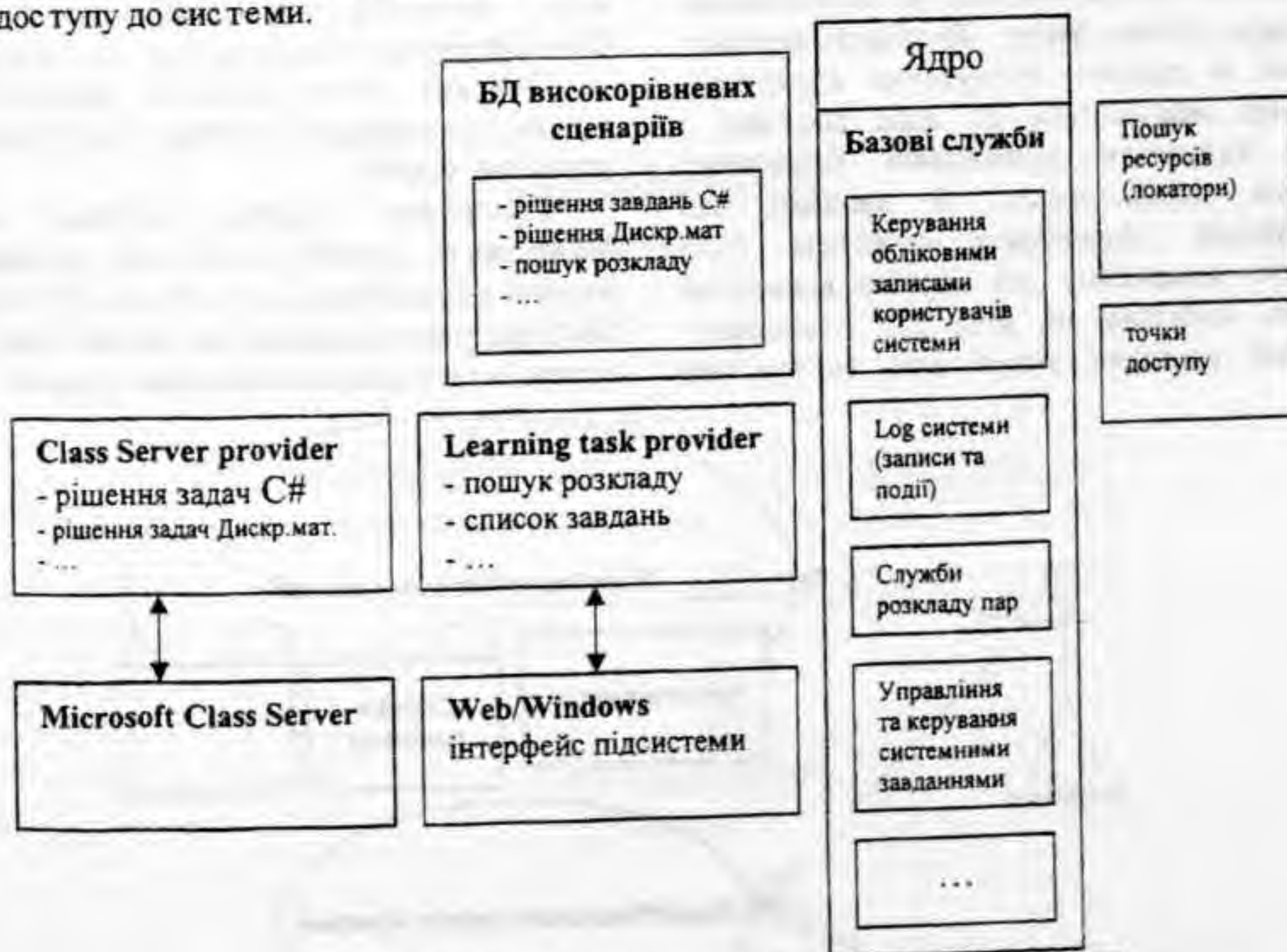


Рис. 1. Основні компоненти програмної моделі САНП

В модель введено поняття *провайдеру*. *Провайдер* – це компонент системи, що використовує високо або низько рівневі сценарії системи, та при необхідності власні функціональні блоки, для вирішення деякого типу задач. Наприклад “Learning task provider” вирішує задачі пов’язанні з пошуком розкладу пар, отримання навчальних завдань і т.д.

1. Схема організації взаємодії гетерогенних систем на базі моделі провайдерів.

Однією з важливих умов функціонування САНП є її можливість взаємодії з іншими

популярними системами автоматизації навчання. Системні компоненти – *провайдери* також застосовуються і для інтеграції з таким класом систем.

Загальна схема взаємодії запропонованої програмної моделі САНП на прикладі інтеграції з системою Microsoft Class Server [1], функціональні властивості цієї системи, ступінь їх відповідності навчальним потребам досліджено у роботі [2].

Проаналізуємо алгоритм роботи провайдеру з системою Class Server (рис.2).

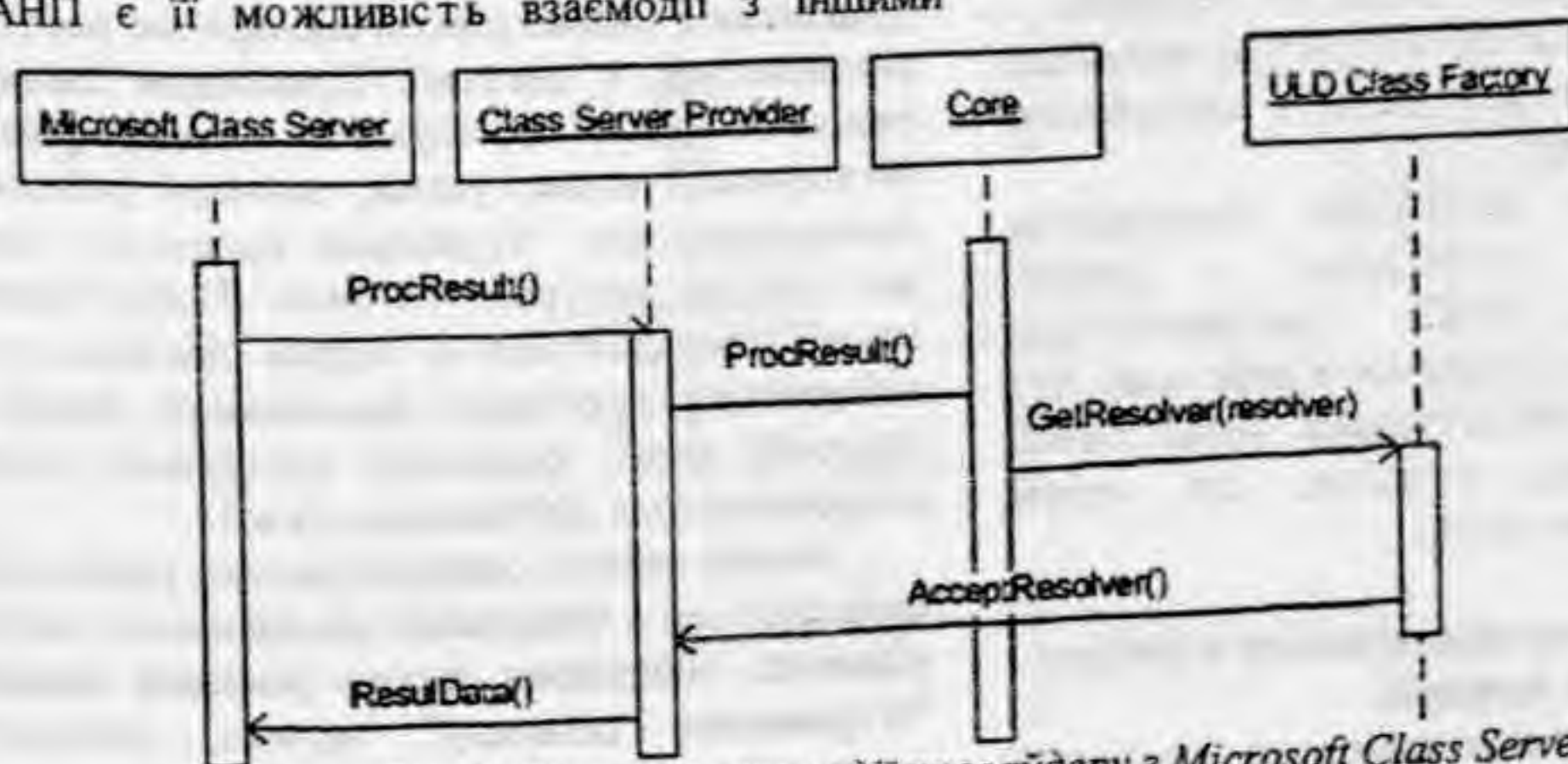


Рис. 2. Діаграма взаємодії провайдеру з Microsoft Class Server.

Після отримання результатів тестування система Class Server відсилає зареєстрованому провайдеру (Class Server Provider) відповіді отримані в процесі тестування студентів. Провайдер звертається до ядра системи з метою отримати відповідний компонент вирішення даної задачі. В випадку, що розглядається відповідним об'єктом буде CSResolver, компонент для обробки відповідей тестових запитань на мові C#. Компонент CSResolver компілює результати тестування

та оцінює їх вірність. Отримані результати через провайдер передаються назад системі Class Server.

Описана схема взаємодії працездатна не тільки для випадку системи Class Server, але і для інших САНП.

Програмна модель системи дозволяє інтегрувати власні модулі для розширення її базової функціональності. На рис.3. зображено UML діаграму сценаріїв, що демонструє основні етапи інтеграції розроблених рішень.

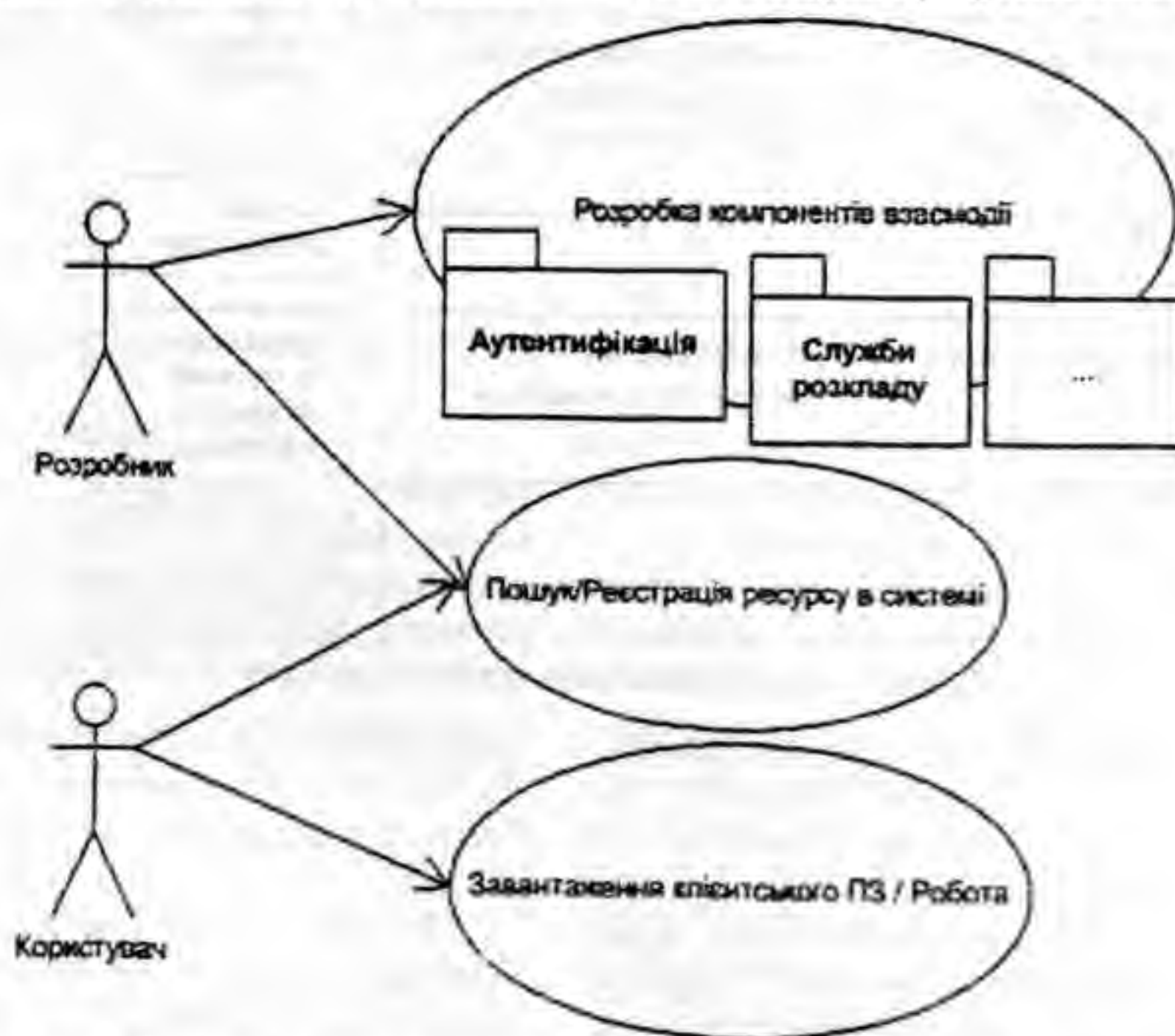


Рис.3. Загальна схема інтеграції розроблених рішень в систему.

Для інтеграції власних рішень з системою, може знадобитися розробка компонентів перехідного рівня. Обмеження на платформу розробки інтегрованого додатку незначні - потрібно лише узгодити алгоритми взаємодії компонентів проміжного рівня з програмним інтерфейсом додатку.

Для створення необхідних компонентів використовується розроблений в рамках програмної моделі САНП інструментарій розробника (SDK), що включає в себе опис API системи, методи налаштування нових точок взаємодії, приклади, утиліти, та інший необхідний інструментарій.

2. Опис процесів, що виконуються в системі як сценарії.

Згідно з поставленими вимогами, програмна модель системи повинна забезпечувати API для

реалізації базової функціональності (низько рівневі API) системи та компонентів, що базуються на платформі даної САНП. Базовими функціями є низько рівневі сценарії які постійно виконуються в системі. Прикладом сценаріїв низького рівня є служба аутентифікації/авторизації користувачів, сценарії роботи з локаторами для отримання відкритих точок доступу до ресурсів та інші. Набір базових служб закладається в модель системи і не змінюється протягом реалізованої версії. В існуючій версії реалізації програмної моделі розроблено біля 100 базових служб.

Високо рівневі сценарії (високо рівневі API) складаються з визначеної послідовності низько рівневих. Наприклад високо рівневий сценарій "отримання розкладу" можна розписати наступним чином:

<отримання розкладу = {<ау т е н т и ф і к а ц і я
>; <з а п и т _ р о з к л а д у>;
<а в т о р и з а ц і я>; <ф о р м у в а н н я _ р е з у л ь т а т у>};

Сценарій можна представити у вигляді ро-
бочого потоку, що описується діаграмою ста-
нів (рис.4.), або діаграмою послідовностей (рис.5.).

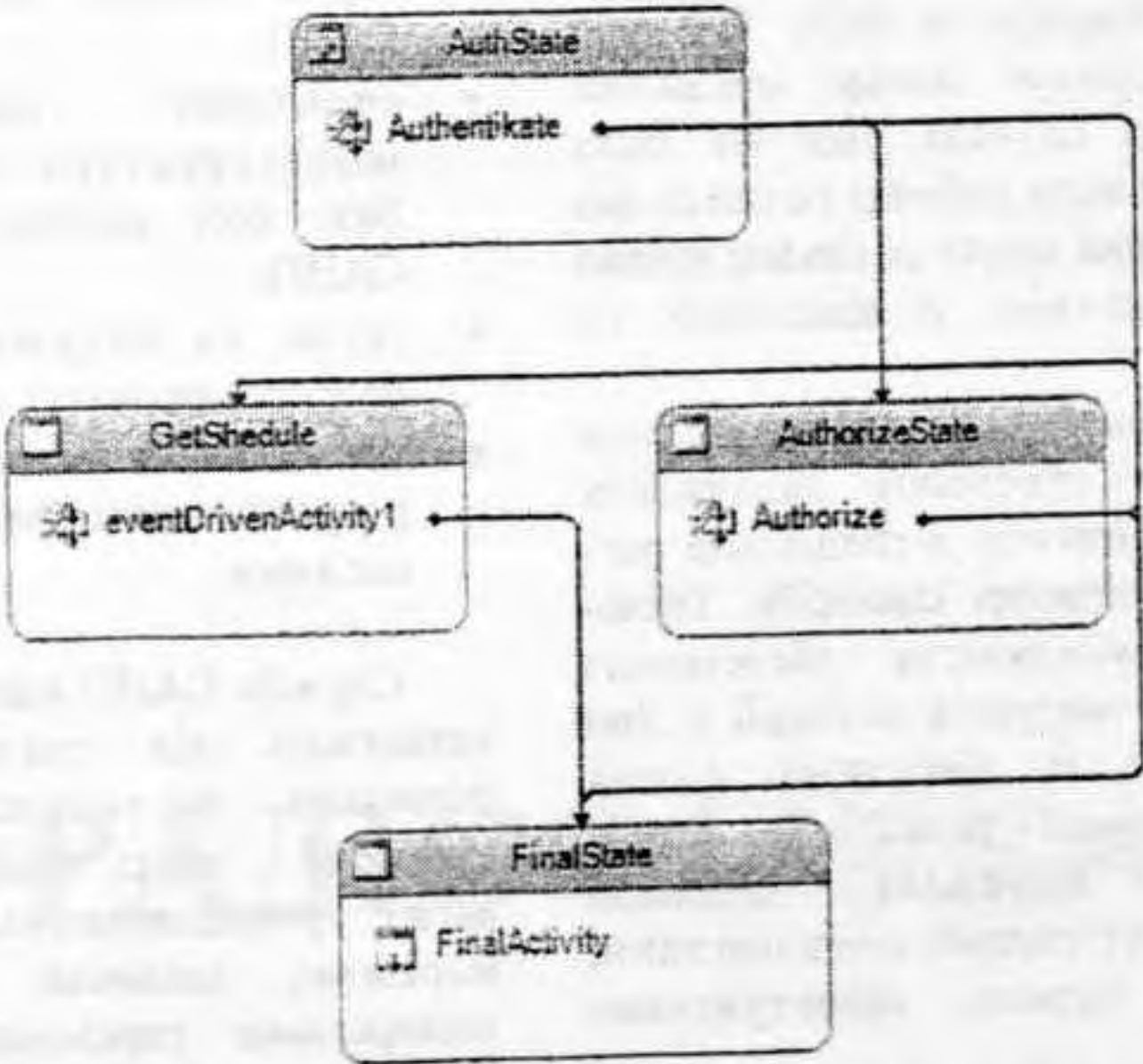


Рис.4. Сценарій отримання розкладу – діаграма станів.

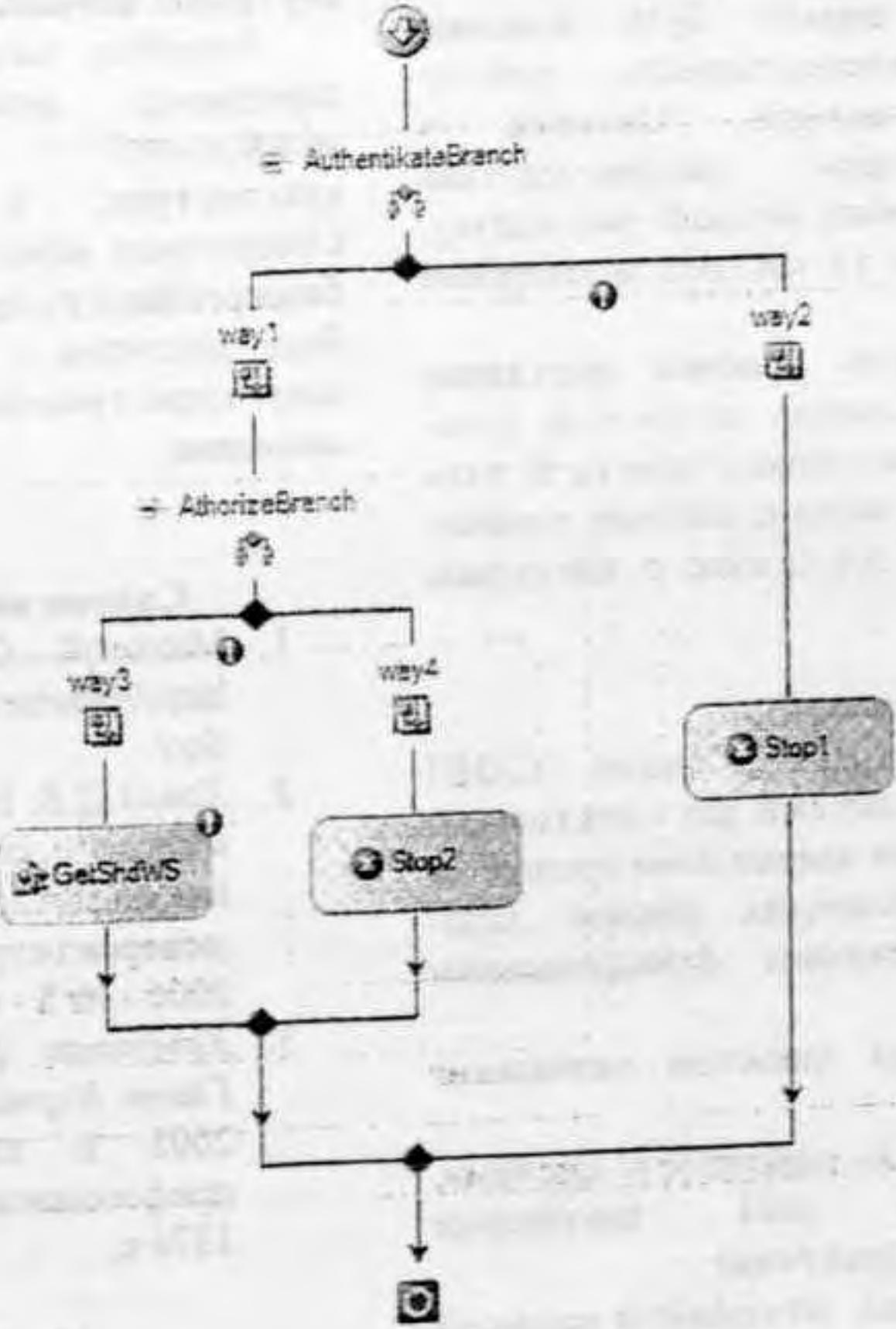


Рис. 5. Сценарій отримання розкладу – діаграма послідовностей

Для програмної реалізації механізмів побудови високо рівневих сценаріїв пропонується використати технологію Windows Workflow Foundation (WF) [3], або аналогічну, що підтримує основні механізми забезпечення робочих потоків. Для WF були розроблені додаткові види робочих потоків, що дозволяють паралельний запуск декількох низько рівневих сценаріїв системи, їх взаємодію та синхронізацію.

Високо рівневі сценарії можуть будуватися в системі під час створення додаткових компонентів, та зберігатися в спеціально розробленій БД високо рівневих сценаріїв. Технологія WF надає можливість збереження робочих потоків, які описують сценарії у Xml форматі, тому для їх зберігання можна скористатися будь-якою реляційною базою даних. Надалі збережені сценарії використовуються системними компонентами, провайдерами, та іншими користувачами системи.

При тестуванні високо рівневих сценаріїв (виконувалися тести на навантаження - load tests) в реалізованій програмній моделі, експериментальним шляхом було виявлено нестабільність і неефективність роботи деяких наборів сценаріїв. Система з "проблемним" набором використовувала надлишкові ресурси, мала низький час відгуку, породжувала помилки та містила незавершені сценарії.

Дослідження таких проблем поставило нову задачу – задачу пошуку алгоритмів функціонування системи, які залишатимуть її стабільною. Цю проблему названо *задачею стабілізації системи* і буде досліджено в наступних публікаціях.

Висновки.

Дослідження програмної моделі САНП показало, що подібні системи для ефективного керування паралельними навчальними процесами в розподілених компонентах повинні задовольняти таким основним функціональним вимогам:

- керування широким аспектом навчальних процесів;
- багатофункціональні можливості системи, для виконання ролі платформи новостворюваним додаткам;
- гнучке налаштування інтерфейсів взаємодії з системою, для забезпечення максимальної

інтероперабельності з широким колом систем;

- гнучкі схеми інтеграції з популярними САНП;
- ефективне використання існуючої інфраструктури закладу, та платформи, на базі якої виконується реалізація моделі САНП;
- гнучкі та потужні механізми розширення функціональності системи;
- технологічна та платформна незалежність розроблюваних модулів, та користувачів системи.

Служби САНП мають успішно взаємодіяти незалежно від платформ, технологій та фізичного розташування. Механізм їхньої взаємодії - шина повідомлень (message bus) - може реалізовуватись будь-якою фізичною мережею, зазвичай нею є Інтернет — універсальне середовище передачі даних. У межах установи для організації шини повідомлень може використовуватись локальна чи глобальна комп'ютерна мережа, а також внутрішні навчальні мережі.

Розробка потужного інтероперабельного середовища дозволить закласти основи міжвидомчої сервісно-орієнтованої архітектури, з усіма перевагами, що стосуються ефективності обробки даних та безперебійності процесів. Потрібна інформація буде доступна у потрібний час відповідному колу користувачів і при цьому буде надійно захищена.

Список використаних джерел

1. Microsoft Class Server Documentation <http://classserver.msn.com/csdcweb/support/doc/>
2. Холод Д.В. Методи розробки додаткових модулів тестування для системи Microsoft Class Server // Вісник Київського університету. Серія. фіз.-мат. науки, 2006 - № 3 - с.278 - 283.
3. Кристиан Нейгел, Билл Ів'єн, Джей Глінн, Карл Уотсон, Морган Скіннер C# 2005 и платформа .NET 3.0 для профессионалов М.: «Диалектика», 2007. 1376 с.

Надійшла до редколегії 29.01.2007

720 311.3

Білоусов, Л. Я. *Фізика*. — Київ, 1987.
Білоусов, Л. Я. *Фізика*. — Київ, 1987.
Стор. 112, 113, 114

Примітка: «Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна. Це наука про те, як устроєна природа, про те, як вона працює, про те, як вона устроєна.

Кожна наука має свій метод, свій стиль, свій мовний код.

Вради: «Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

Л. Білоус

Наша праця присвячена фізиці, науці, яка вивчає закони природи, про те, як вона устроєна, про те, як вона працює, про те, як вона устроєна.

В даній роботі ми розглядаємо фізику, науку, яка вивчає закони природи, про те, як вона устроєна, про те, як вона працює, про те, як вона устроєна.

Наша праця присвячена фізиці, науці, яка вивчає закони природи, про те, як вона устроєна, про те, як вона працює, про те, як вона устроєна.

В даній роботі ми розглядаємо фізику, науку, яка вивчає закони природи, про те, як вона устроєна, про те, як вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

«Фізика» — це наука про природу, про закони, за якими вона працює, про те, як вона устроєна.

РАДІОФІЗИКА

УДК 533.9

Анісімов І.О.*, д-р. фіз.-мат. наук, проф.,
Великанець Д.М.***, магістрант,
Сорока С.В., асистент

Прискорення електронів в області локального плазмового резонансу, збуджуваній модульованим електронним пучком

Шляхом комп'ютерного моделювання методом крупних частинок досліджено прискорення електронів в області локального плазмового резонансу (ОЛПР), де модульований електронний пучок збуджує сильне електричне поле. Визначено умови існування ефекту. Досліджено вплив нелінійної деформації профілю густини плазми в ОЛПР на прискорення електронів.

Ключові слова: неоднорідна плазма, модульований електронний пучок, область локального плазмового резонансу.

E-mail: *ioa@mail.univ.kiev.ua,
***milissent@mail.ru

1. Вступ

Задача про релаксацію модульованого електронного пучка при його русі в неоднорідній плазмі належить до фундаментальних проблем плазмової електроніки. Особливий інтерес з точки зору застосувань являє перехідне випромінювання електромагнітних хвиль в плазмово-пучкових системах.

В ряді робіт [1-3] було показано, що при взаємодії неоднорідної плазми з високочастотним електричним полем накачування в області локального плазмового резонансу (ОЛПР) збуджується сильне поздовжнє електричне поле. Під дією цього поля можливе прискорення певної кількості плазмових електронів, що спотворює початкову функцію розподілу за швидкостями [3].

Модульований електронний пучок, проходячи крізь неоднорідну плазму, також збуджує високочастотне електричне поле в ОЛПР на частоті модуляції [4-5]. Отже, можна очікувати, що прискорення електронів плазми матиме місце й у цьому випадку.

В даній роботі за допомогою числового моделювання методом крупних частинок досліджується прискорення електронів плазми в області локального плазмового резонансу, збу-

Anisimov I.O.*, Dr. Sci., prof.,
Velykanets D.M.***, student,
Soroka S.V., assistant

Electrons' acceleration in the local plasma resonance region excited by the modulated electron beam

Electrons' acceleration in the local plasma resonance region (LPRR), where the strong electric field is excited by the modulated electron beam, is studied numerically using PIC method. Conditions of existence of this effect are found out. The influence of non-linear deformation of the plasma density profile in the LPRR on electrons' acceleration is investigated.

Key Words: inhomogeneous plasma, modulated electron beam, local plasma resonance region.

джуваній модульованим електронним пучком, а також вплив нелінійної деформації профілю концентрації плазми на цей ефект.

2. Метод моделювання та параметри

Моделювання проводилося за методом крупних частинок для одновимірної моделі з використанням модифікованого пакету PDP1 [6-7]. У цьому пакеті плазма являє собою плоский шар, що вміщується між двома провідними електродами. Від лівого електрода до правого рухається потік електронів. Модифікована версія пакету [7] дозволяє задавати початкову модуляцію електронного пучка та неоднорідний початковий розподіл концентрації плазми, а також зберегти і проаналізувати проміжні дані моделювання.

Розглядалася повністю іонізована воднева плазма. Первісний профіль її густини був лінійним, густина на проміжку моделювання в більшості випадків змінювалася від $0.5 n_c$ до $1.5 n_c$, де n_c – критичне значення концентрації електронів на частоті модуляції пучка. Таким чином, ОЛПР розміщувалася на середині області моделювання, довжина якої складала 2 м. Температура електронів плазми $T_e = 11$ eV, температура іонів – $T_i = 0.1$ eV. Електрони зі швид-

костями, більшими за $7 \cdot 10^7$ м/с ($35 v_{Te}$), не враховувалися.

Частота модуляції пучка $\omega/2\pi = 1.27 \cdot 10^6$ Гц (відповідна критична концентрація $n_c(\omega) = 1.5 \cdot 10^8$ см⁻³). Густина струму пучка $j = 1.5$ А/м², його швидкість $v_0 = 7 \cdot 10^7$ м/с.

Пучок, що інжектувався з лівого електрода та поглинався правим, модулювався за густиною. Початкова модуляція була гармонічною з глибиною 100%. Параметри плазово-пучкової системи підбиралися таким чином, щоб профіль густини заряду пучка в ОЛПР не дуже відрізнявся від синусоїдального. В усіх випадках густина електронів пучка залишалася набагато меншою від густини електронів плазми.

3. Умови прискорення електронів в ОЛПР

Для визначення умов прискорення електронів плазми в ОЛПР досліджувалася часова еволюція їхнього фазового портрету для різних значень параметрів плазово-пучкової системи (густина струму пучка, характерний розмір

неоднорідності, температура електронів плазми).

Густина струму пучка змінювалася в межах $j = 0.5 \div 1.5$ А/м². Кількість прискорених електронів зменшувалася при зменшенні густини струму пучка. Коли густина струму ставала меншою за 0.5 А/м², прискорення електронів припинялося внаслідок зменшення напруженості електричного поля в ОЛПР. При густинах струму, більших за 1.5 А/м², профіль густини заряду пучка ставав суттєво негармонічним.

Кількість прискорених електронів також суттєво залежала від теплової швидкості електронів плазми та від характерної довжини неоднорідності плазми. Збільшення цих параметрів призводило до зменшення кількості прискорених електронів внаслідок зменшення прискорювального поля.

4. Картина прискорення електронів в ОЛПР

На рис. 1 зображено фазовий портрет електронів плазми і відповідний просторовий розподіл потенціалу.

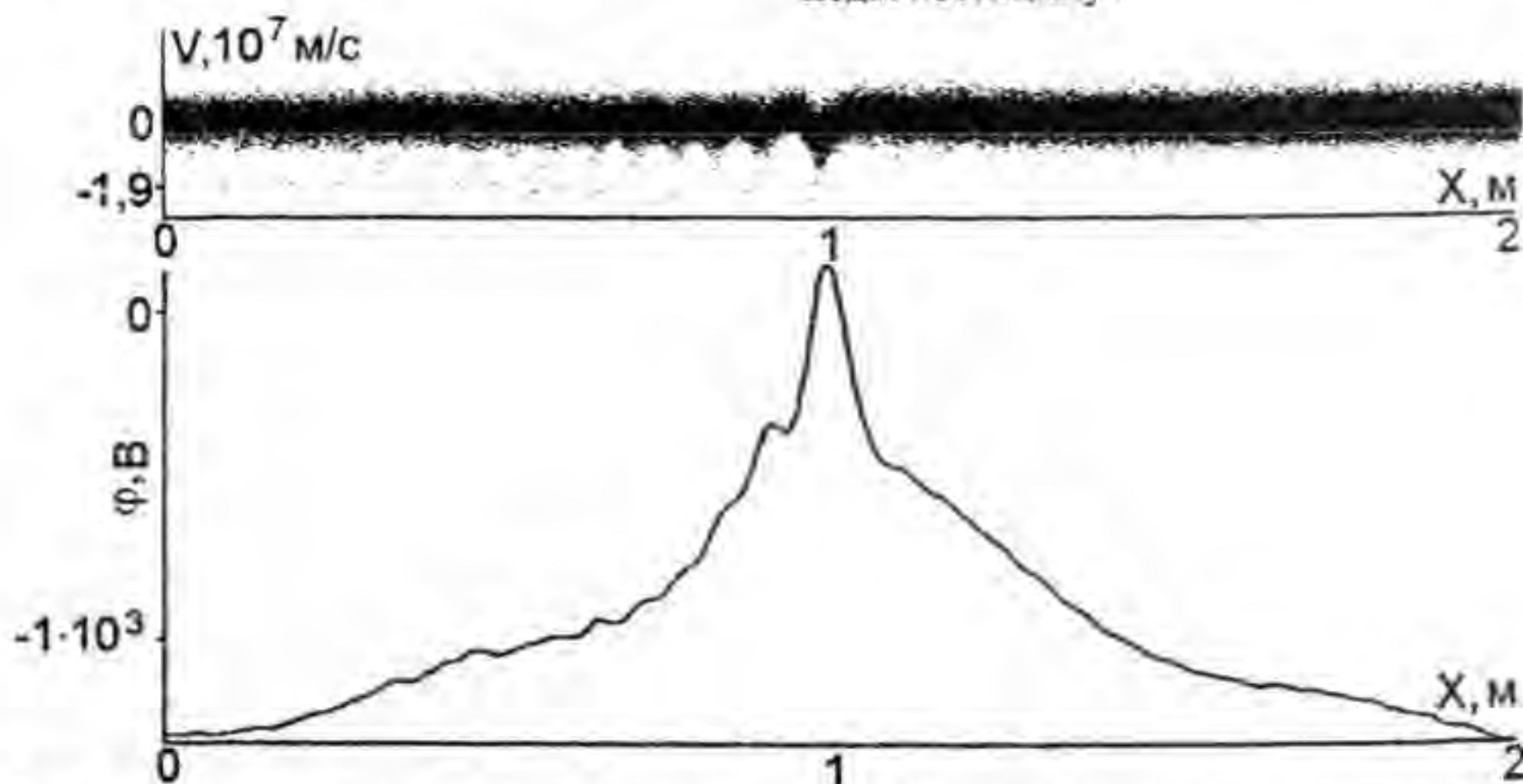


Рис. 1. Фазовий портрет електронів плазми та відповідний миттєвий розподіл потенціалу вздовж системи для $j = 1.5$ А/м², $t = 6.24 \cdot 10^{-7}$ с. На верхньому рисунку видно прискорені електрони.

Електрони плазми захоплюються потенціальною ямою, яка рухається ліворуч (у бік докритичної плазми), і прискорюються до швидкостей, які визначаються глибиною потенціальної ями. Справді, взявши глибину потенціальної ями 1 кеВ (рис. 1), отримаємо максимальну швидкість $2 \cdot 10^7$ м/с (на порядок більше від електронної теплової швидкості $v_{Te} = 2 \cdot 10^6$ м/с), що відповідає результату моделювання. Як видно із рис. 1, функція розподілу сильно спотворюється в області докритичної плазми – поле модулює електрони плазми за

швидкостями. Прискорені електрони рухаються в напрямку більш розрідженої плазми відповідно до руху потенціальної ями (на рис. 1 ці швидкості є від'ємними). Просторовий період утворених електронних згустків визначається періодичністю електричного поля (фактично частотою модуляції пучка) та швидкістю хвилі потенціалу в ОЛПР, що дорівнює Lv , де L – характерний розмір неоднорідності плазми, $v \approx (L/v_{Te})^{-2/3} \omega^{1/3} = 10^7$ с⁻¹ [8] – ефективна частота зіткнень. Для параметрів моделювання $Lv = 2 \cdot 10^7$ м/с, а просторовий період прискорення

згустків – 16 см, що добре узгоджується з результатами моделювання – 10 см (рис. 1). Просторове розпливання утворених електронних згустків пояснюється різними значеннями набутих електронами швидкостей.

5. Часова еволюція функції розподілу електронів плазми

Функція розподілу електронів плазми будувалася як гістограма залежності кількості електронів зі швидкостями в інтервалі завширшки $0.025 \cdot (v_{\max} - v_{\min})$ від середнього значення швидкості в цьому інтервалі. Часова еволюція цієї функції, побудованої в логарифмічному масштабі, представлена на рис. 2.

В початкові моменти часу функція розподілу є максвеллівською (в логарифмічному масштабі – параболічною). В момент часу $5 \cdot 10^{-7}$ с починається прискорення електронів, і функція розподілу стає помітно несиметричною. Характерний час наростання електричного поля в ОЛПР складає $\tau = 1/\nu = 10^{-7}$ с, що добре узгоджується з результатами моделювання (рис. 3). Час

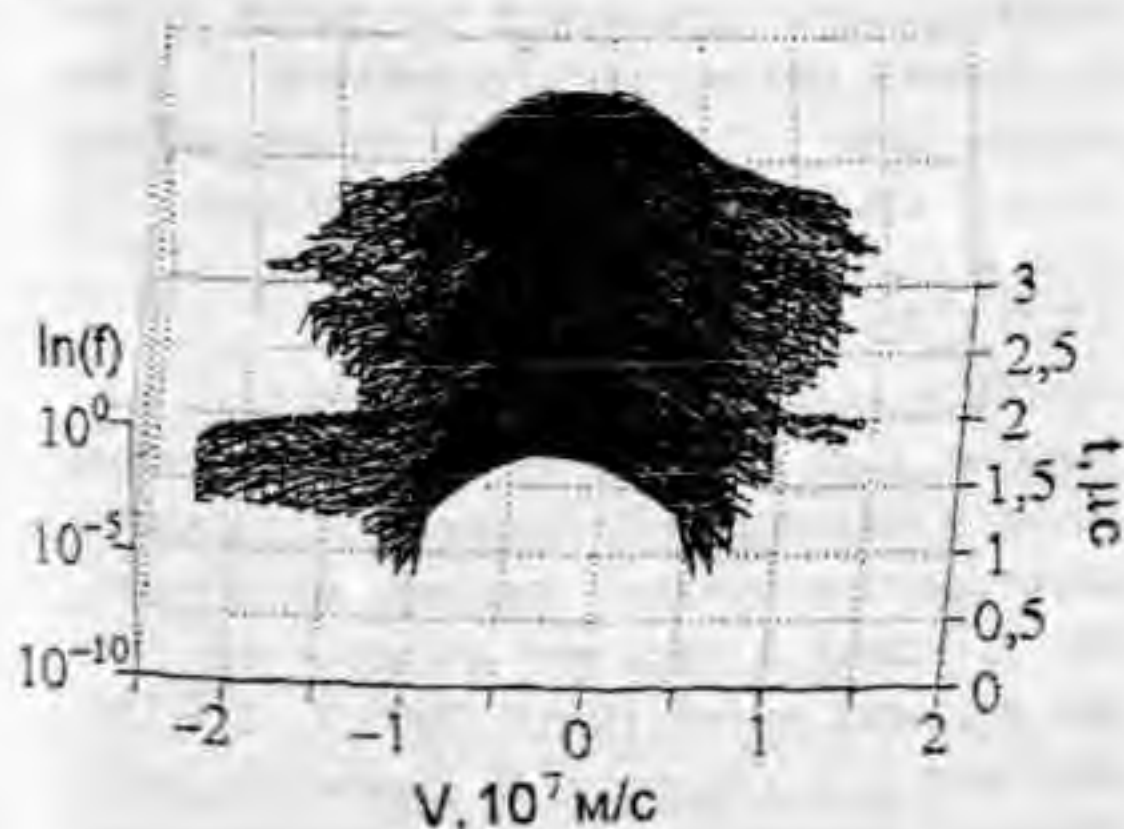


Рис. 2. Часова еволюція функції розподілу електронів плазми при $j = 1.5 \text{ А/м}^2$.

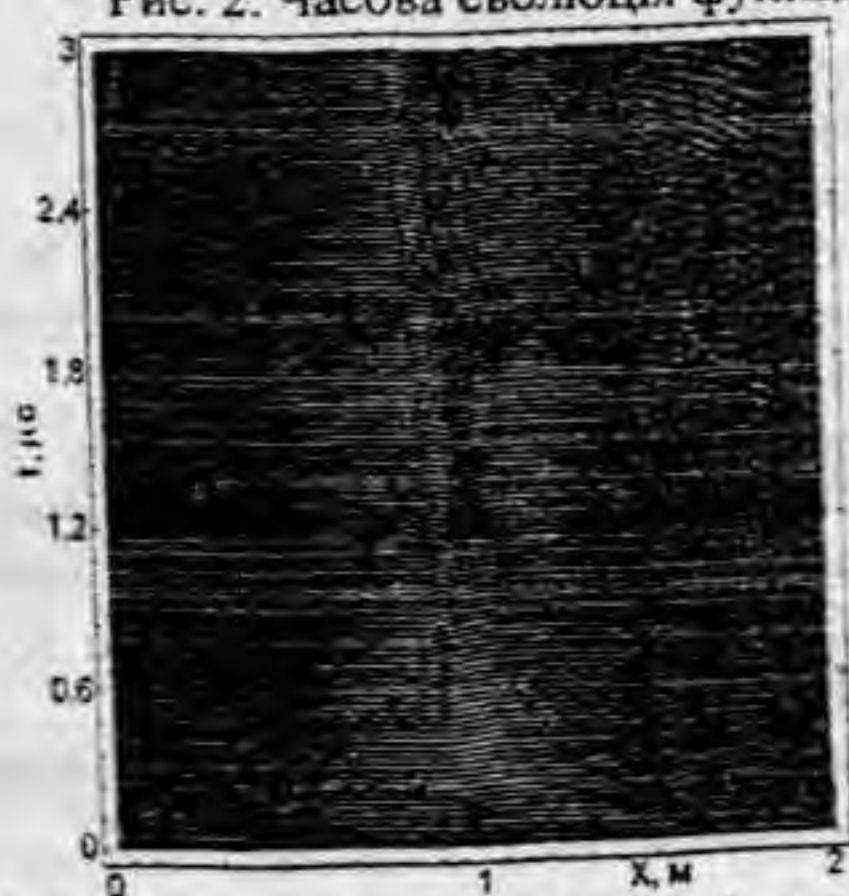


Рис. 3. Просторово-часовий розподіл електричного поля. Світлі області відповідають більшим значенням поля.

появи перших прискорених електронів у кілька разів більший від цієї величини. Отже, прискорені електрони з'являються після того, як в ОЛПР встановлюється максимальне значення електричного поля. В наступні моменти часу кількість прискорених електронів зростає, що приводить до суттєвого спотворення функції розподілу електронів.

Прискорення електронів на проміжку часу $(0.5 \div 1) \cdot 10^{-6}$ с відбувається лише в напрямку зменшення концентрації плазми, як і передбачає лінійна теорія цього ефекту [1]. Починаючи з моменту часу $1 \cdot 10^{-6}$ с, прискорення електронів у напрямку зменшення концентрації плазми припиняється, натомість відбувається повільне розширення функції розподілу, яка стає суттєво немаксвеллівською (збагаченою надтепловими електронами). Як видно з рис. 3, в цей час поле в ОЛПР різко зменшується. Це пов'язано з початком деформації профілю концентрації плазми в цій області (рис. 4), обумовленої тиском неоднорідного височастотного електричного поля [2, 5].

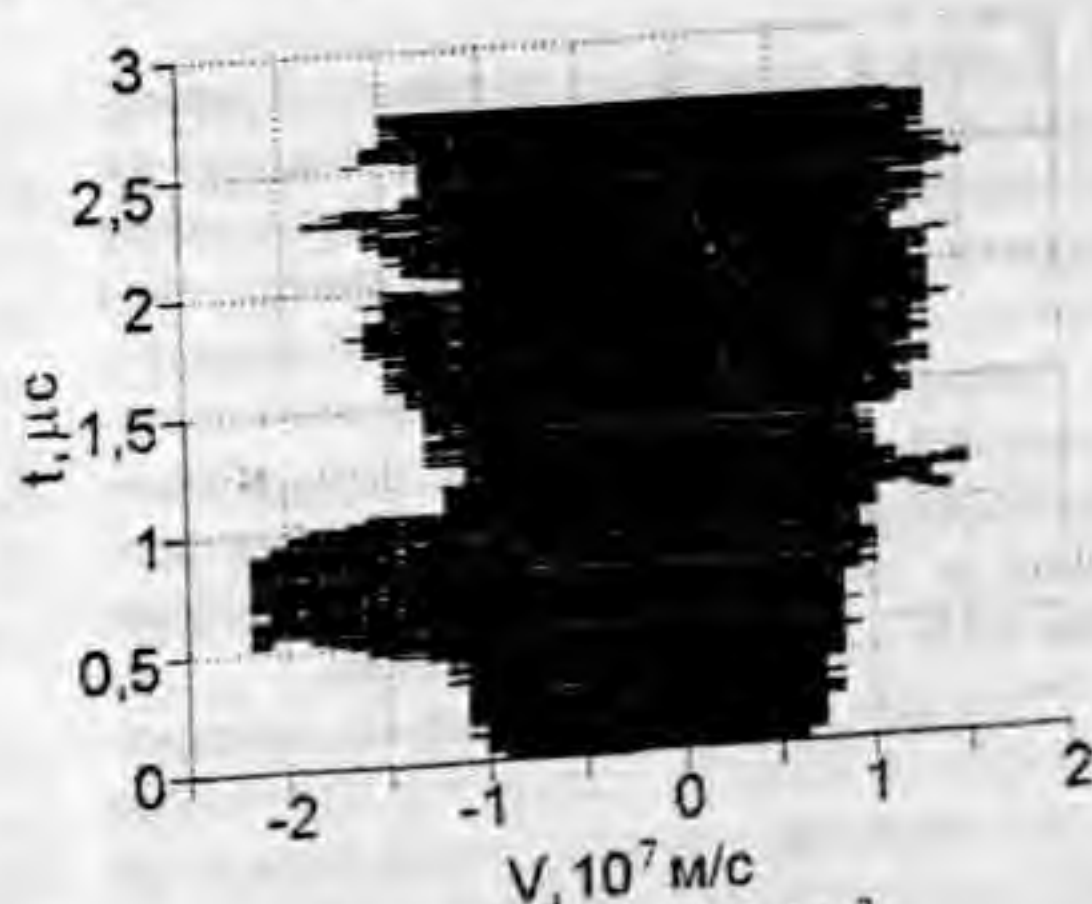


Рис. 4. Просторово-часовий розподіл збурення іонної концентрації.

На рис.6 подана просторова залежність функції розподілу електронів плазми для пізнього моменту часу, коли розвивається нелінійна деформація профілю концентрації плазми, що призводить до зменшення електричного поля в ОЛПР. Електрична хвиля в області локального плазмового резонансу зникає, і це призводить

до припинення прискорення електронів. В результаті функція розподілу електронів стає більш симетричною: відмінності між функціями розподілу в докритичній і закритичній плазмі помітно зменшуються.

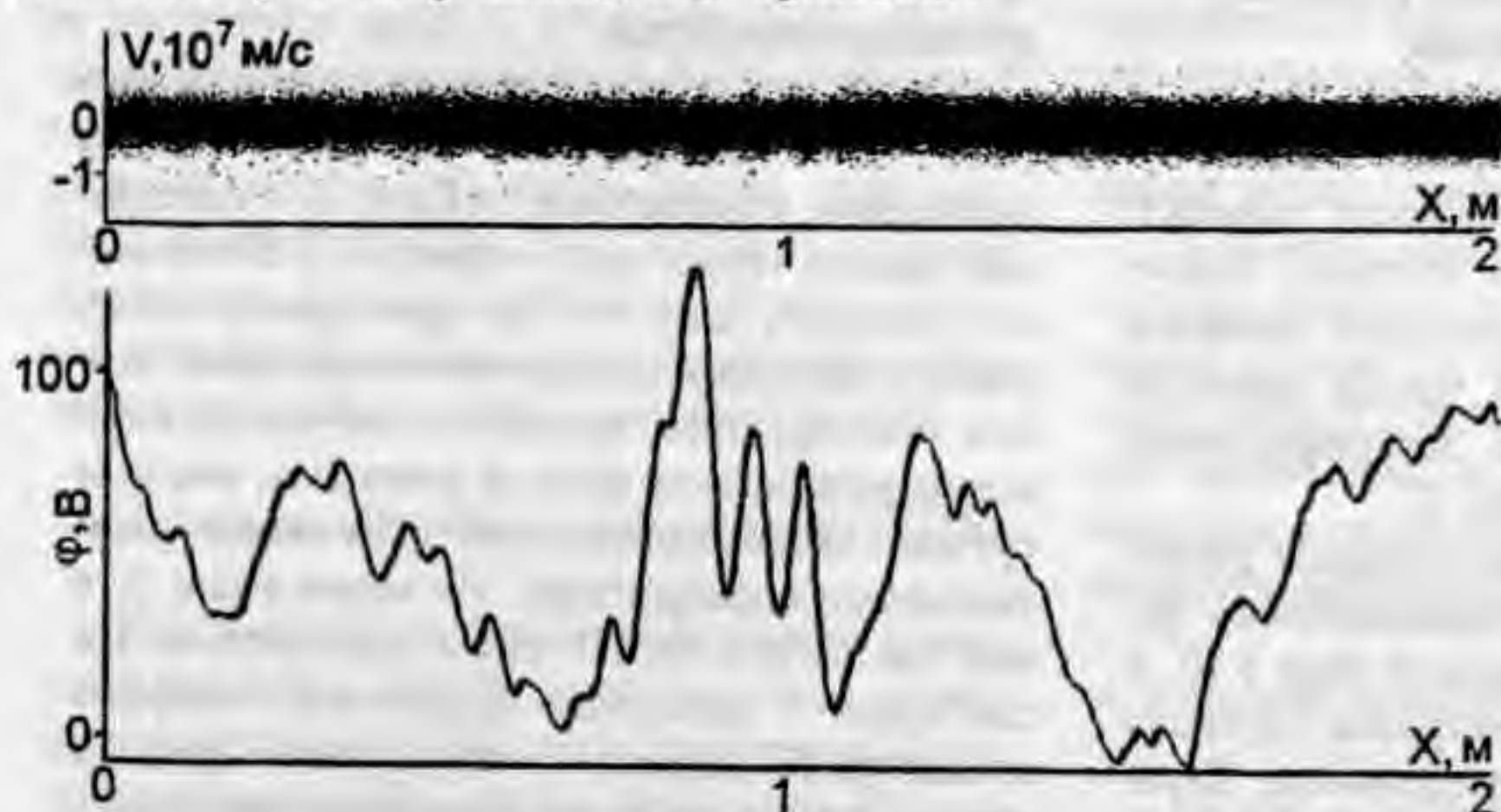


Рис. 5. Те саме, що на рис. 1, для $t=1.96 \cdot 10^{-6}$ с.

6. Висновки

1. В області локального плазмового резонансу під дією інтенсивного високочастотного електричного поля, збудженого модульованим електронним пучком, відбувається прискорення електронів плазми в бік зменшення її концентрації. Діапазон густин струму, в якому спостерігається цей ефект, обмежується знизу мінімальною величиною поля, необхідною для прискорення, а зверху – спотворенням профілю густини модульованого пучка в плазмі.

2. Нелінійна деформація профілю концентрації плазми в області локального плазмового резонансу приводить до ослаблення поля в цій області і, як результат, до припинення прискорення електронів лише в бік розрідженої плазми. У пізні моменти часу в плазмі спостерігається збільшення кількості надтеплових електронів з обома можливими напрямками швидкості.

Список використаних джерел

1. Баринов В.И. Дополнительный бесстолкновительный механизм диссипации высокочастотной энергии в условиях плазменного резонанса. // Физика плазмы, 1977. 3. №2. С.239-245.
2. Коврижных Л.М., Сахаров А.С. Генерация кавитонов в области плазменного резонанса. // Физика плазмы, 1980. 6. №1. С.150-158.
3. Коврижных Л.М., Сахаров А.С. Динамика взаимодействия высокочастотного поля с неоднородной плазмой и ускорение частиц в области плазменного резонанса. // Взаимодействие сильных электромагнитных волн с бесстолкновительной плазмой. Под ред. А.Г. Литвака. Горький, ИПФ АН СССР, 1980. С.83-116.
4. Анісімов І.О., Кельник О.І., Сіверський Т.В., Сорока С.В. Збудження високочастотних полів у неоднорідній плазмі модульованим електронним пучком: числове моделювання. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. Вип.1. 2003. С. 229-236.
5. Анісімов І.О., Сорока С.В. Взаємодія неоднорідної плазми з модульованим електронним пучком: утворення ямки густини в області локального плазмового резонансу. // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. Вип.2. 2004. С. 385-394.
6. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Компьютерное моделирование в физике плазмы. Энергоатомиздат, М., 1989.
7. Anisimov I.O., Sasyuk D.V., Siversky T.V. Modified package PDP1 for beam-plasma systems' simulation. // Dynamical System Modelling and Stability Investigation. Kyiv, 2003. P.257.
8. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Наука, 1967.

Надійшла до редколегії 10.12.07

УДК 537.52; 533.9:537.872

Бабіч І.Л., канд. фіз.-мат. наук,
Веклич А.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Мінакова Р.В., докт. техн. наук, с.н.с.

Модифікація поверхні композиційних електродів на основі Cu плазмою електродугового розряду

Представлено результати досліджень впливу плазми електродугового розряду на стан поверхні композиційних електродів на основі міді (Cu-W та Cu-Mo). Структурні зміни робочого шару таких електродів досліджувались металографічними методами. Показано, що характер вторинної структури на поверхні електрода залежить від його складу та сили струму електричної дуги.

Ключові слова: електрична дуга, плазма, композиційні електроди, вторинна структура.

*E-mail: van@univ.kiev.ua

1. Вступ

Широке коло застосувань електродугового розряду в сучасних технологіях (зварювання, плазмотронне розпорошення та нанесення матеріалів тощо) визначає інтерес до досліджень плазми такого розряду між плавкими електродами. Оптимізація компонентного складу електродів комутуючих пристроїв електротехнічної галузі та енергетики є важливою задачею для розробників композиційних матеріалів з наперед визначеними властивостями.

Саме через цю обставину нагальною є необхідність дослідити взаємозв'язок параметрів самої плазми і стану поверхні електродів та її ерозійних властивостей. У сучасних комутуючих пристроях для виготовлення електродів все частіше використовуються композиційні матеріали на основі міді. Найчастіше для одержання таких гетерогенних матеріалів застосовують методи порошкової металургії.

Метою даної роботи є дослідження впливу плазми електричної дуги, що горить у повітрі, на стан поверхні композиційних електродів на основі міді, а саме: Cu-Mo та Cu-W.

Ці матеріали одержані шляхом насичення міддю тугоплавкої складової (пористого каркасу із порошку Mo-Co, W-Co з незначною домішкою порошку міді). Кобальт до 2% додається для зменшення крайового кута змочування розплавом міді молібдену або вольфраму. Крім того, через особливості технологічного процесу виготов-

I.L. Babich, Ph.D.,
A.N. Veklich*, Ph.D., Professor Associate,
R.V. Minakova, D.Sc., Senior Researcher

Surface modification of composite electrodes on the base of Cu by plasma of electric arc discharge

The secondary structure of electrode surface is studied. Investigated surface is modified by plasma of electric arc discharge. The composite materials on the base of copper (Cu-W and Cu-Mo) are used. The structural changes in a working layer of such electrodes are investigated by metallographic techniques. The influence of content of electrode and current magnitude of electric arc on its secondary structure is shown.

Key Words: electric arc, plasma, composite materials, secondary structure.

лення (розмелювання порошків та змішування в сталених кулькових млинах) у таких композиційних матеріалах як домішок завжди присутнє залізо. Таким чином, склад композиційних матеріалів, які досліджуються, фактично наступний: Cu-Mo-Co-Fe або Cu-W-Co-Fe.

2. Експеримент

Дуга ініціювалася в повітрі між торцевими плоскими поверхнями неохолоджуваних електродів циліндричної форми. Діаметр електродів становив 6 мм. Міжелектродний проміжок – 2÷8 мм, розрядний струм – 3.5 А. Для запобігання плавлення електродів при роботі дуги з більшими струмами використано імпульсний режим: на розряд постійного струму 3.5 А накладались однократні імпульси струму тривалістю 30 мс необхідної амплітуди (до 100 А).

Структурні зміни в робочому шарі контактів вивчалися за допомогою оптичного мікроскопа "Neophot-2" і растрового електронного мікроскопа (PEM) з рентгенівським мікроаналізатором "JSM Super Probe -733", JEOL.

3. Результати та обговорення

У роботі [1] було показано, що в результаті впливу плазми дугового розряду на поверхню електродів на останніх виникає вторинна структура (рис. 1). Поверхня таких електродів Cu-Mo піддавалась впливу дугового розряду великого струму (сила струму 1÷100 кА), що горить у по-

Представлено Анісімовим І.О., проф., докт. ф.-м. н.

вітрі (рис. 1, а). При цьому введена значна потужність приводила до швидкого зростання температури електродів і до такого ж швидкого їх охолодження при вимиканні розряду. Під впливом теплового потоку дуги, що горить у повітрі, розчинність кисню в міді, яка плавиться, збільшується, а її температура плавлення знижується. Взаємодія основних складових порошкової системи на основі міді та молібдену збільшується. Наочним прикладом цього є спостережувана металографічними методами зміна морфології тугоплавких частинок: початкові частинки полігональної форми в результаті перекристалізації через рідку фазу набувають сфероїдальної і збільшуються у розмірі (рис. 1, а). Подальше підвищення вмісту кисню в міді призводить до утворення оксидів міді, молібдену, молібдатів міді, а також легкоплавких евтектик на їх основі, що впливає на морфологічні особливості фаз, які кристалізуються з розплаву при гасінні дуги.

Дослідження мікроструктури поверхонь підтверджує таку точку зору.



а



б

Рис. 1 Вторинна структура на поверхні електродів Cu-Mo (а) та Cu-W (б)

Дещо інша картина спостерігалась під час дослідження Cu-W електродів (рис. 1, б). Під впливом дугового розряду силою струму до 25 кА спостерігалось розпушення структури шару, збільшення пористості та глибини відкритих капілярів. Серед причин, що спричиняють такі явища, автори в першу чергу називають окислення вольфраму і сублімацію його оксиду WO_3 у вигляді ізомерів: тримерів W_3O_9 , пентамерів W_5O_{15} тощо, а також

локалізований вплив на матеріал робочого шару високих швидкостей нагрівання та охолодження.

Цілком інше утворення вторинної структури на поверхні композиційних електродів Cu-W або Cu-Mo спостерігається при силі розрядного струму менше 100 А (3,5 або 30 А) і, відповідно, менших уведених потужностях (рис. 2 та 4).

На рис.2 а показаний загальний вигляд поверхні мідь-вольфрамових електродів при збільшенні 40х після впливу одного імпульсу електродугового розряду (сила струму – 30 А, тривалість – 30 мс).

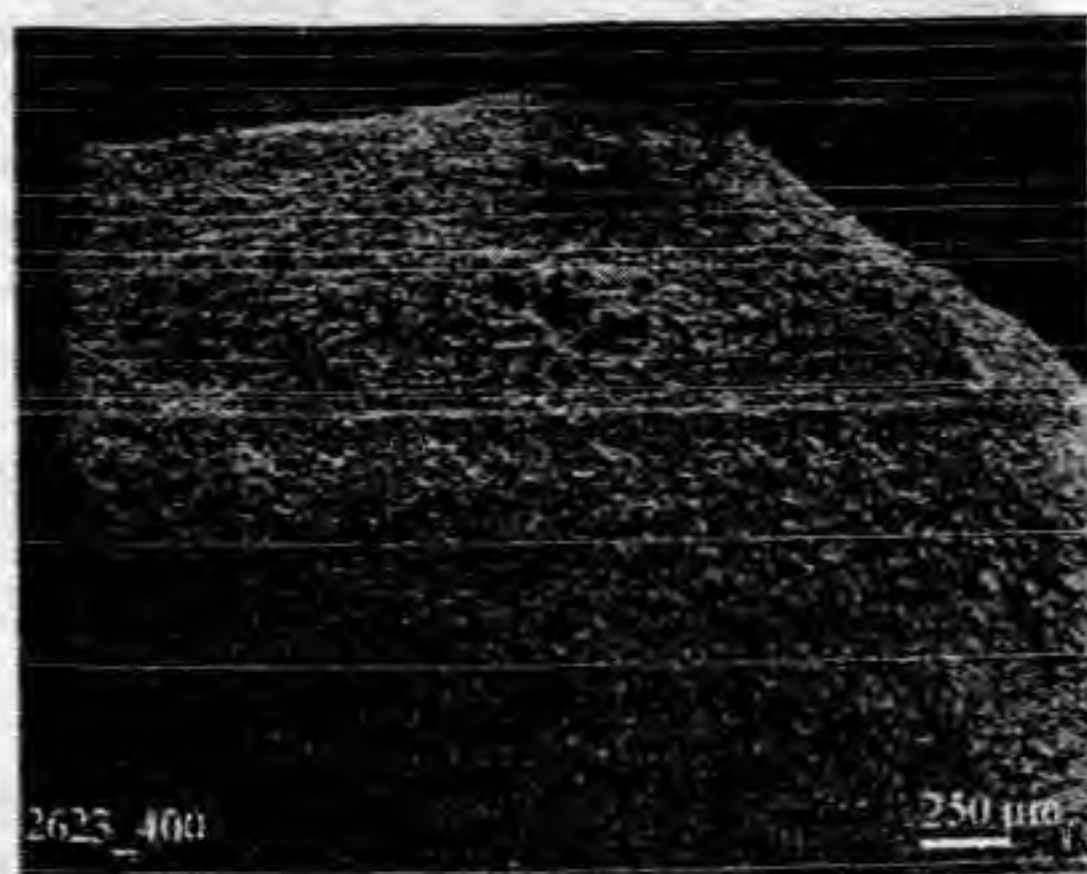
Про зміну характеру теплового впливу дугового розряду на поверхню електродів із тугоплавких металів (вольфраму, молібдену) і міді свідчать особливості фазово-структурних перетворень, які притаманні діаграмам стану з евтектикою: на мікрофотографії (рис. 2 б) чітко видно евтектичні колонії, які ростуть назустріч одна одній і в яких голковою фазою, напевно, є вольфрамат міді, а у проміжку між ними – твердий розчин на основі оксидів складу, залежного від вмісту елементів у розчині в

опорній плямі дуги [2]. Виходячи з цього припущення, можна вважати, що у розплаві доевтектичного та евтектичного типів вольфрамат (молібдат) міді кристалізується у вигляді суцільних або порожнистих голок. У розчині заевтектичного складу гілки колоній частіше представлені "коробами" неправильної форми, зумовленої нерівноважними умовами росту анізотропних кристалів у температурній області криста-

лізації розплаву (рис. 2 в, г, д, е). На рис. 2 в-2 є показано фрагменти поверхні у більш детальному масштабі. Рис. 2 б представляє переріз, перпендикулярний до робочої поверхні. Чітко спостерігається направлена кристалізація евтек-

тичних колоній, яка має традиційний віяло-подібний вигляд.

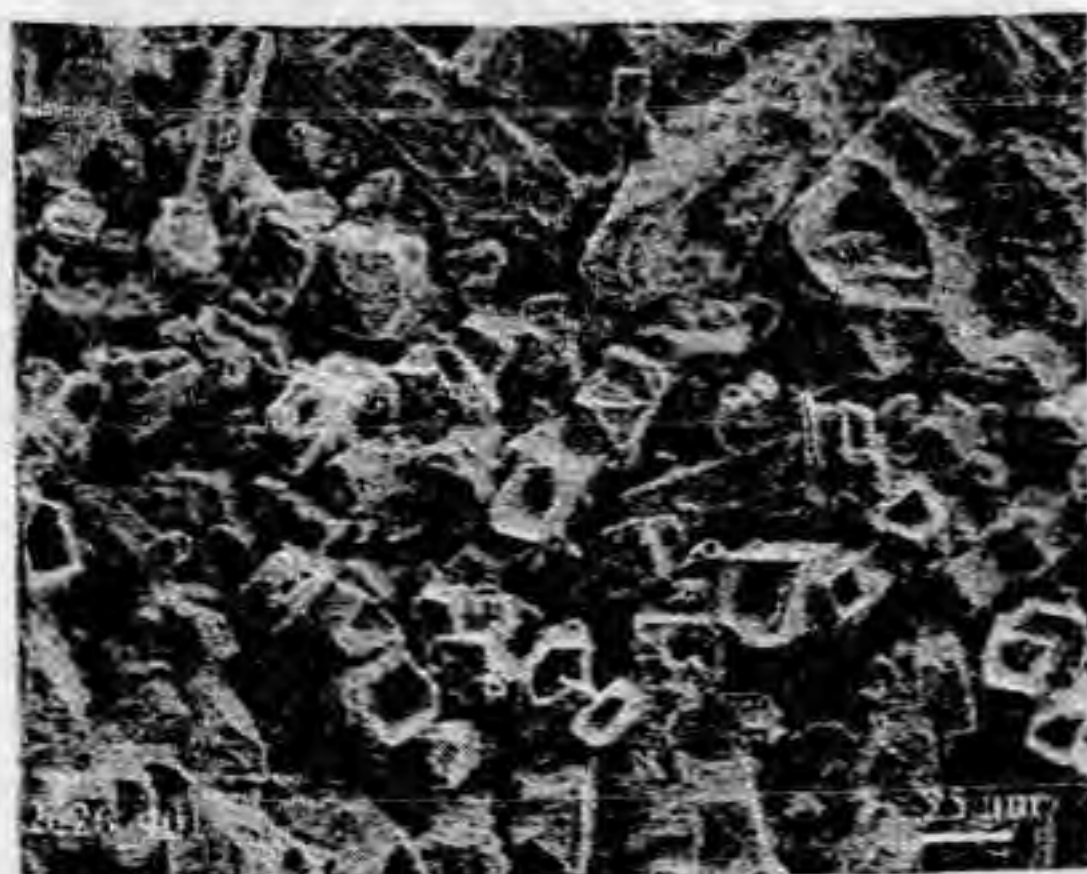
На жаль, діаграму стану вольфрам – мідь – кисень ще недостатньо вивчено.



а



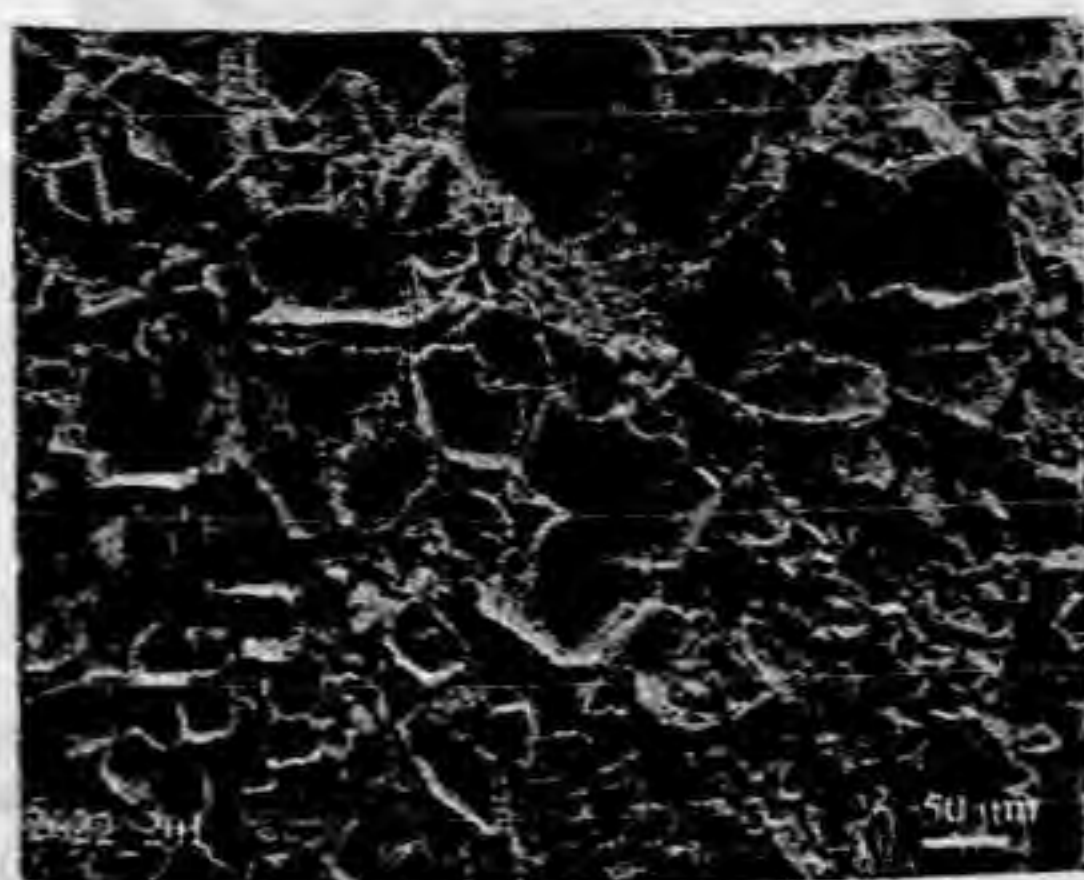
б



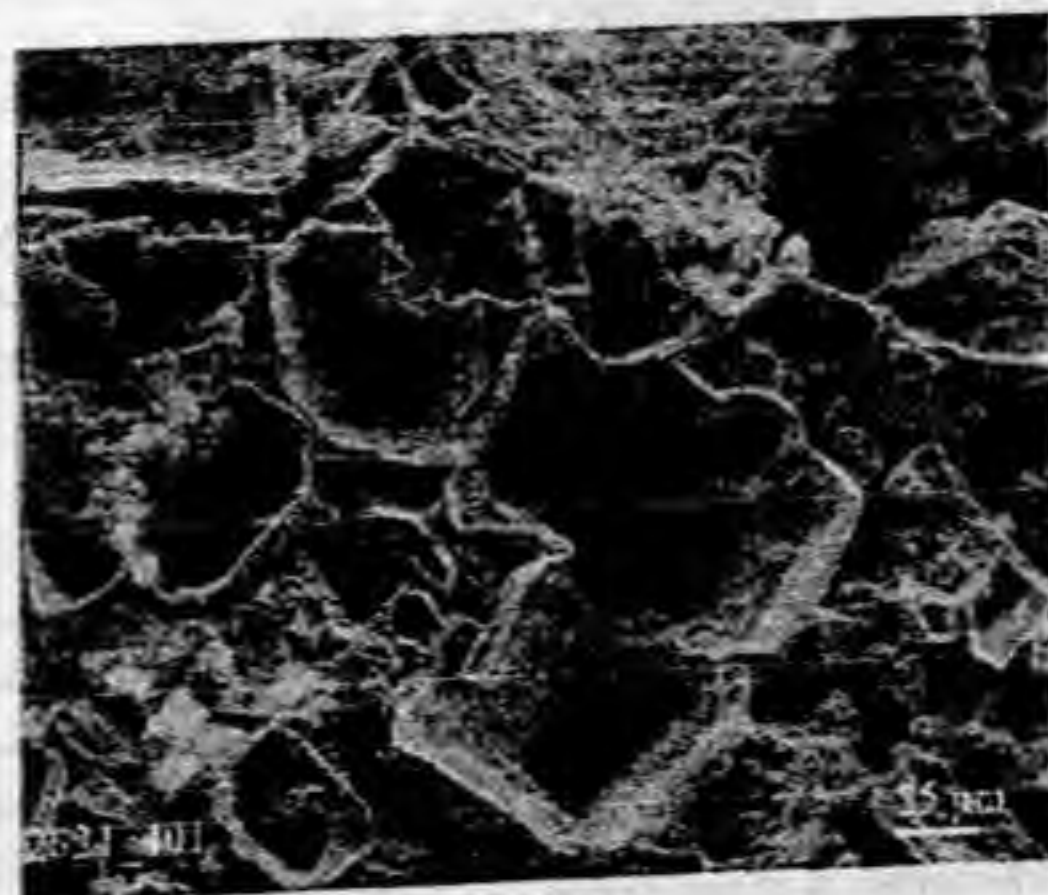
в



г



д



е

Рис. 2 Вторинна структура на поверхні Cu-W електродів при силі струму 30 А:
а – вторинна структура робочого шару на аноді: загальний вигляд; б – направлена кристалізація;
в, г – коробки на поверхні анода; д, е – особливість кристалізації оксидів



а



б

Рис. 3 Початкова структура поверхні Cu-Mo електрода: а – зображення у вторинних електронах; б – в $Co_{L\alpha}$ - випромінюванні.

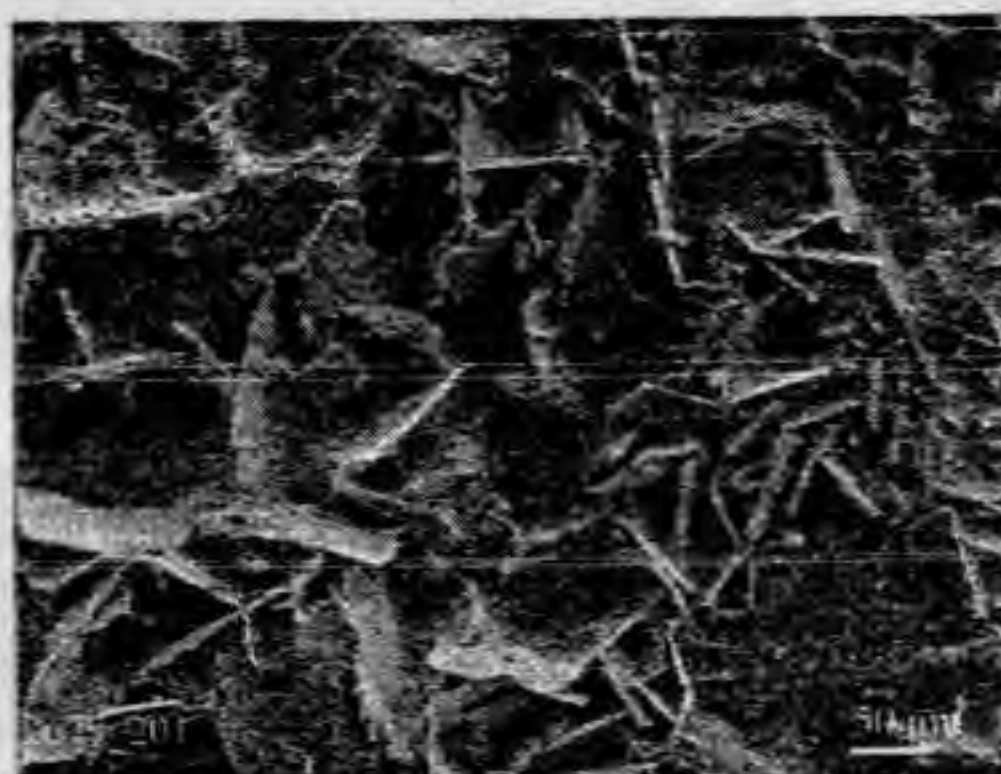
Аналогічне формування вторинної структури спостерігається при роботі з Cu-Mo електродами. Початкову структуру поверхні таких електродів показано на рис. 3. Розподіл Co на поверхні у такій структурі можна побачити на рис. 3 б.

На рис. 4. а показано вторинну структуру поверхні Cu-Mo електрода при збільшенні 40х після впливу одного імпульсу електродугового розряду (сила струму – 30 А, тривалість – 30 мс). На рис. 4. б, в показано фрагменти поверхні у більш детальному масштабі.

Діаграму стану молібден – мідь – кисень вивчено досить детально для різних середовищ та тиску кисню в них [3]. При охолодженні у процесі кристалізації в умовах взаємодії з киснем повітря утворюється низькоплавка евтектика на основі молібдатів з домішками оксидів. Формування таких оксидів та їх наявність в евтектиках цілком імовірно при введеннях потужностях на кілька порядків менших, ніж в [1]. Молібдат, що утворюється з рідкої фази $Cu_6Mo_4O_{15}$, втрачає кисень, після чого по перитектичній реакції перетворюється на молібдат $Cu_3Mo_2O_9$, який в присутності CuO у повітрі формує евтектику. Таким чином, на морфологію фаз,



а



б



в

Рис. 4 Вторинна структура на поверхні Cu-Mo електродів при силі струму 30 А: а – вторинна структура робочого шару електрода: загальний вигляд; б, в – фрагменти поверхні

що кристалізуються, впливають втрата кисню (утворення порожнистих голок), дві евтектики, перитектичне та поліморфне перетворення (рис. 4). При температурі нижче $550^{\circ}C$ існують молібдати $CuMoO_4$ та $Cu_3Mo_2O_9$. Такий механізм утворення вторинної структури під впливом розряду порівняно невеликої потужності уявляється досить імовірним.

Отже, у досліджуваних режимах роботи елект-

ричної дуги, що горить у повітрі, на поверхні електродів зазначеного складу відбувається направлена кристалізація евтектичних колоній, у проміжку між якими формується твердий розчин на основі оксидів складу, залежного від вмісту елементів у розчині в опорній плямі дуги. У подальшому, маючи високий тиск насичених парів, оксиди випаровуються, залишаючи "порожнини" у вольфраматах (молібдатах). Ці низькоплавкі евтектики, напевно, і утворюють стінки спостережуваних на поверхні електродів коробів.

Висновки

Металографічні дослідження поверхні електродів з композиційних матеріалів на основі міді (Cu-Mo-Co-Fe та Cu-W-Co-Fe), що зазнали впливу плазми електродугового розряду при силі струму 30 А, виявили особливість формування вторинної структури у робочому шарі.

У досліджуваних режимах роботи електричної дуги, що горить у повітрі, в результаті направленої кристалізації на поверхні електродів формуються стінки коробів. Чи є ефект виникнення коробів результатом наявності у складі композиційних матеріалів елементів VIII групи (Co, Fe, Ni), чи суттєве значення має введена потужність, покажуть подальші дослідження.

Список використаних джерел

1. Минакова Р.В., Кресанова А.П., Крячко Л.А., Хоменко Е.В. Структурно-ерозионные явления на композиционных контактах на воздухе, в масле и вакууме // Электрические контакты и электроды. – Киев: Ин-т проблем материаловедения НАНУ. – 2001. – С. 103–122.
2. Babich I.L., Minakova R.V., Veklich A.N. Surface modification of composition electrodes by electric arc discharge // III Int.Conf. "Electronics and Applied Physics" Taras Shevchenko National University of Kyiv, Radiophysics Faculty October, 25-27, 2007, Kyiv, Ukraine, Proceedings. – 2007. – P. 143–144.
3. Пасичный В.В., Минакова Р.В., Корчемная В.С., Остапенко С.А., Пасичная М.С., Редько В.П. Об особенностях термической переработки отходов тяжелого сплава в солнечной печи // Межд. конф. HighMatTech-2007 (Тезисы докладов). 15-19 октября 2007 г., Киев, Украина. – Киев: Академперіодика. – 2007. – С.217.

Надійшла до редколегії 29.11.07

УДК 621.311:621.3319.44; 662:62

Бедюх О. Р., канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. сп.¹,
Кашковський В. І., канд. хім. наук, зав. від.²,
Степанов А. В. докт. екон. наук², Матусевич Г.
Г., канд. екон. наук.²

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, ²Інститут біоорганічної хімії
та нафтохімії НАН України, Київ

Переробка автомобільних шин з використанням методів магнітного удару та термохімії.

*Розглянуто можливість послідовного
використання методу магнітного удару та двох
термохімічних методів – термолізу та
газифікації для переробки зношених
автомобільних шин.*

*Ключові слова: електроімпульсна установка,
термоліз, газифікація гуми.*

*E-mail: bedjukh@univ.kiev.ua

Вступ

Протягом кількох десятиліть розробляються
та вдосконалюються методи утилізації зношених
автомобільних шин. Визначені декілька основних
методів їх переробки. Це:

- використання шин як палива;
- термохімічна переробка з метою отримання
енергоносіїв;
- використання шин та їх частин в
дорожньому будівництві;
- механічна переробка з метою отримання
гумової крихти та металу.

Повторне використання шин шляхом заміни
протектора дозволяє підвищити термін їх
використання, але, по суті, не є методом
утилізації, бо рано чи пізно такі шини теж
доводиться переробляти.

Кожен з перерахованих методів має власні
переваги і недоліки та більше чи менше
використовується в різних регіонах світу.

Однак повністю проблема не вирішена. Всі
існуючі методи потребують вдосконалення або їх
ефективності, або екологічної безпеки.

Крім того, складною є і проблема збору шин.
Тому і досі суттєва частина зношених шин
акумулюється на звалищах або розсіюється на
навколишніх територіях.

З іншого боку погіршення стану довкілля
відбувається на фоні загострення енергетичних
проблем. Суттєвим кроком на шляху вирішення

Bedjukh O. R., PhD¹, Kashkovsky V. I., PhD²,
Stepanov A. V., Dr.Sc.², Matusevych G. G., PhD².

¹Taras Shevchenko National University of Kiev,
²Institute of Bioorganic Chemistry &
Petrochemistry of NAS of Ukraine

Tire recycling by both the magnetic shock and the thermochemical methods.

*The possibility of serial use the magnetic shock
method and two thermochemical methods – the
thermolysis and the gasification for post-consumers
tire processing is examined.*

*Key Words: electropulse installation,
thermolysis, rubber gasification.*

цієї проблеми є використання альтернативних
джерел енергії, здатних хоча б частково замінити
існуючі.

З урахуванням вказаного перспективним
бачиться використання кількох методів
переробки в одному технологічному процесі з
метою, з одного боку, підвищити його
ефективність та екологічну безпеку, а з іншого –
отримати високоякісні продукти, які мали б
попит на енергетичному ринку.

Сучасна шина містить в собі гумову суміш,
текстильний та металевий корд. Гумова суміш та
текстиль є вуглеводневою сировиною з
незначними (5-10%) включеннями мінеральних
добавок і тому цілком придатні для перетворення
на енергоносії, а метал можна використовувати,
наприклад, в металургії.

Пропонується провести переробку зношених
шин в три етапи – відокремлення металу на
початку процесу, механічне подрібнення гуми до
потрібного розміру та подальше перетворення
вуглеводневої сировини на енергоносії
термохімічними методами [1].

При визначенні як методу відокремлення
металевого корду від гуми, так і параметрів
термохімічного процесу, суттєве значення мають
такі показники, як енергоємність, екологічна
безпека, кількість відходів та якість енергоємної
сировини, що утворюються в результаті
переробки.

Метод магнітного удару

Для реалізації першого етапу нами був обраний, розроблений в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, метод магнітного удару [2-3], що базується на взаємодії миттєвих потужних електричних струмів, які пропускають по металевому корду в шині. Взаємодія імпульсів веде до механічного розштовхування шарів металевого корду при одночасному швидкому нагріві корду. Ці два ефекти разом забезпечують чисте відділення металевого корду та гуми.

Металевий корд спочатку відокремлюють від гуми, а потім гуму механічно перемелюють в крихту необхідного розміру. Таким чином, вдається зменшити знос механічного обладнання, а завдяки малим (~0,01 кВт·год на 1 кг ваги шини) витратам енергії на процес відокремлення, зменшуються і загальні виробничі витрати на процес переробки. Шина перероблюється практично повністю, без відходів. Метал і гума виходять чистими і високої якості.

Метод магнітного удару реалізується за допомогою електроімпульсної установки, яка забезпечує формування та пропускання імпульсів струму по металевому корду. Критеріями ефективності роботи цієї установки можна вважати:

- чистоту відокремлення металу від гуми;
- енергетичні витрати на технологічний процес;
- вартість обладнання;
- зручність та безпеку роботи на установці.

Внаслідок дії "магнітного удару" реалізується спільна дія електричних, механічних та теплових сил на відпрацьовану шину.

Якісний зв'язок між металевим кордом та гумою забезпечується завдяки тонкому (товщиною декілька мікрометрів) прошарку латуні, який заздалегідь наносять на сталевий дріт корду. В процесі вулканізації, при виготовленні шини, на межі гуми та латуні утворюються хімічні сполуки сульфідів цинку та міді, які і забезпечують якісну адгезію гуми та корду.

Дія механічного удару та надшвидкісний нагрів металу повинні розділяти шари металевого корду та гуми в шині. З'ясуємо умови, які забезпечують руйнування адгезійного прошарку між гумою та металевим кордом у шині.

Для забезпечення відокремлення шару металевого корду від сусіднього з ним шару гуми тиск P_m між ними, що виникає внаслідок дії "магнітного удару", повинен перевищувати

границю пружності σ_{sp} адгезійного сульфідного прошарку. Тобто повинна виконуватися умова

$$P_m > \sigma_{sp}. \quad (1)$$

Максимальний тиск P_m на шар металевого корду при ударі дорівнює:

$$P_m = F_m / S, \quad (2)$$

де [4]:

$$F_m = (\mu \mu_0 I_m^2) / (2 \cos(\alpha)) \quad (3)$$

- максимальне значення механічної сили, що виникає між шарами металевого корду внаслідок дії протилежно направлених імпульсів електричного струму,

- I_m - максимальне значення електричного струму в імпульсі,

- S - площа поверхні шару металевого корду,

- α - кут нахилу дрітів металевого корду до осі симетрії шини,

- μ - відносна магнітна проникливість,

- μ_0 - магнітна константа.

З урахуванням виразів (1)-(3) амплітудне значення розрядного струму в імпульсі електроімпульсної установки повинно задовольняти умові

$$I_m > ((\sigma_{sp} \cdot 2 \cdot S \cdot \cos(\alpha)) / (\mu \cdot \mu_0))^{1/2}. \quad (4)$$

Після підстановки числових значень для типової шини легкового автомобіля 185/R14 маємо:

$$I_{m, \text{лег}} \geq 3 \cdot 10^6 \text{ А}, \quad (5)$$

а для шини вантажного автомобіля 385/R22,5 -

$$I_{m, \text{ван}} \geq 6 \cdot 10^6 \text{ А}. \quad (6)$$

Врахуємо вплив надшвидкісного нагріву. Внаслідок проходження імпульсу електричного струму відбувається нагрів металевому корду, гума ж при цьому практично не нагрівається.

Підвищення температури корду дорівнює

$$\Delta T = (I_{\text{ср}}^2 \cdot R \cdot \Delta t) / (m \cdot c_s), \quad (7)$$

де $I_{\text{ср}}^2 \approx I_m^2 / 2$ - середнє значення квадрату струму за час Δt ефективної дії електричного імпульсу, R - електричний опір шару металевого корду, c_s - питома теплоємність металу корду, m - маса корду.

Шар латуні на металевому корді утворювався шляхом послідовного нанесення на сталевий дріт шару міді, а потім шару цинку. Теплова обробка, за рахунок взаємної дифузії, забезпечує утворення сплаву латуні. При такій послідовності процесу нанесення латуні на границі з гумою атомів цинку і, відповідно, молекул сульфиду цинку буде більше, ніж атомів міді і молекул сульфиду міді. Для спрощення розрахунків будемо вважати, що саме атоми

цинку і утворені за рахунок дифузії сірки з гуми молекули сульфиду цинку відповідають за адгезію металевго корду та гуми в шині. Тоді швидкий нагрів цього сульфідного прошарку приведе до виникнення в ньому механічної напруги $\sigma_{\text{суп}}$, яку, в першому наближенні, можна записати у вигляді

$$\sigma_{\text{суп}} \approx |E_{\text{ZnS}} \cdot \alpha_{\text{ZnS}} - E_{\text{Zn}} \cdot \alpha_{\text{Zn}}| \cdot \Delta T, \quad (8)$$

де E_{Zn} , E_{ZnS} та α_{Zn} , α_{ZnS} — відповідно модулі пружності та коефіцієнти теплового розширення цинку та його сульфиду.

Для руйнування адгезійного прошарку напруга $\sigma_{\text{суп}}$ також повинна перевищувати границю пружності сульфідного прошарку $\sigma_{\text{сп}}$.

Тобто, повинна виконуватися умова

$$\sigma_{\text{суп}} > \sigma_{\text{сп}}. \quad (9)$$

Умова (9), з урахуванням (10), дає можливість вирахувати нагрів металевго корду, який забезпечує руйнування адгезійного прошарку. Після підстановки числових значень маємо:

$$\Delta T \geq \sigma_{\text{сп}} / |E_{\text{ZnS}} \cdot \alpha_{\text{ZnS}} - E_{\text{Zn}} \cdot \alpha_{\text{Zn}}| \approx 80^\circ \text{C}. \quad (10)$$

З (10) та урахуванням (7) визначимо умову для часу Δt ефективної дії електричного імпульсу

$$\Delta t > (2 \cdot \Delta T \cdot c_{\text{с}} \cdot m_{\text{с}}) / (I_{\text{с}}^2 \cdot R). \quad (11)$$

Після підстановки в (11) числових значень маємо:

- для шин легкових автомобілів, при $I_{\text{с}} = 3 \cdot 10^6 \text{ A}$:

$$\Delta t_{\text{л}} \geq 17 \cdot 10^{-6} \text{ c}, \quad (12)$$

- для шин вантажних автомобілів, при $I_{\text{с}} = 8,5 \cdot 10^6 \text{ A}$:

$$\Delta t_{\text{в}} \geq 30 \cdot 10^{-6} \text{ c}. \quad (13)$$

Час Δt ефективної дії електричного імпульсу зазвичай збігається з першим півперіодом ($T_0/2$) коливань цього імпульсу. На практиці, при робочій напрузі $5 \div 10 \text{ кВ}$ та енергії в імпульсі більше 10 кДж , важко досягти значень T_0 , менших за $50 \div 60 \cdot 10^{-6} \text{ c}$. Крім того, якщо використовувати одну електроімпульсну установку для переробки шин як легкових, так і вантажних автомобілів, період коливань T_0 буде незмінним. Виберемо період коливань електроімпульсної установки

$$T_0 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ c}. \quad (14)$$

Таким чином, для надійного відокремлення металевго корду від гуми, амплітудне значення електричного струму та період коливань електричного імпульсу повинні задовольняти умовам:

- для шин легкових автомобілів

$$I_{\text{М вез}} \geq 3 \text{ МА}, \quad T_0 \approx 60 \text{ мкс}; \quad (15)$$

- для шин вантажних автомобілів

$$I_{\text{М вез}} \geq 8,5 \text{ МА}, \quad T_0 \approx 60 \text{ мкс}. \quad (16)$$

Умови (15) та (16) дають можливість визначити енергетичні витрати на технологічний процес відокремлення корду від гуми. Витрачаються як кінетична енергія $W_{\text{к}}$ "магнітного удару", так і теплова енергія $W_{\text{т}}$ нагріву металевго корду.

Енергію $W_{\text{к}}$ можна записати у вигляді

$$W_{\text{к}} = p^2 / 2m, \quad (17)$$

де p — імпульс, який внаслідок «магнітного удару» передається металевому корду, m — маса металевго корду та шару гуми над ним.

З урахуванням (3), та підстановкою числових значень для шин легкових автомобілів маємо $W_{\text{к}} \approx 40 \text{ кДж}$, а для шин вантажних автомобілів — $W_{\text{к}} \approx 370 \text{ кДж}$.

Енергію $W_{\text{т}}$, що витрачається на нагрів корду, можна записати у вигляді

$$W_{\text{т}} = c_{\text{с}} \cdot m_{\text{с}} \cdot \Delta T. \quad (18)$$

Тоді, після підстановки в (18) числових значень для шин легкових автомобілів, маємо $W_{\text{т}} \approx 40 \text{ кДж}$, а для шин вантажних автомобілів — $W_{\text{т}} \approx 120 \text{ кДж}$.

При розрахунках енерговитрат, що йдуть на електроімпульсну установку потрібно додатково врахувати її власний активний опір R_0 , а також витрати енергії на гальванічних контактах металевго корду та технологічного обладнання. Будемо вважати, що ці витрати не перевищують 20%.

Тож, для шин легкових автомобілів приблизно маємо

$$W_{\text{вез}} \approx 100 \text{ кДж}, \quad (19)$$

а для шин вантажних автомобілів

$$W_{\text{вез}} \approx 600 \text{ кДж}. \quad (20)$$

Отримані співвідношення дозволяють проектувати електроімпульсну установку, здатну розділяти метал та гуму в автомобільних шинах найбільш розповсюджених типових розмірів.

Термохімічні методи переробки гуми

Заключним етапом є термохімічна переробка гумової сировини на ліквідні високоякісні енергоносії.

Шинна гума, попередньо відділена від металу та подрібнена до розміру $0,3 \dots 3 \text{ см}$, піддається термохімічній обробці.

На наш погляд треба виділити два найбільш актуальні напрямки переробки – термоліз гуми або її газифікацію.

В Інституті біоорганічної хімії та нафтохімії НАН України проводять роботи по обох цих напрямках.

об'єднаних фракціях для базової нафти та суміші зі співвідношенням сирової нафти та палива - 90,9 на 9,1 відсотків (таблиця 1).

Бачимо, що добавка палива веде до перерозподілу вуглеводного складу. Спостерігається зменшення більш легких

Таблиця 1

Оцінка матеріального балансу суміші з співвідношенням сирової нафти та палива - 90,9 на 9,1

Взято, %	Отримано фракцій, %, з температурою википання, °C				Залишок, %	Втрати, %
1. Сира нафта, 100	10, 65-90	20, 90-145	15, 145-200	25, 200-300	29	1
1. Сира нафта, 90,9 2. Паливо, 9,1	7,3, 65-90	15,9, 90- 145	16,4, 145-200	27,3, 200- 300	31,8	1,3

Відпрацювання способу термолізу гумової крихти відбувалося за варіантом термодеструкції без доступу кисню при температурі 600-700 °C. Було отримано в % мас.: рідка фракція - 41-44, газова фракція - 17-19, твердий залишок - 34-37. Рідка фракція (далі – паливо) представлена значною кількістю ароматичних сполук (більше 50% мас.), ненасичених вуглеводнів (до 30 % мас.), а також н-парафінами та нафтоновими вуглеводнями. Визначені наступні фізико-хімічні показники отриманого палива при 20°C: кінематична в'язкість 3,7 мм²/с, густина 890 кг/м³,

фракцій (7,3 і 15,9 % проти 10 і 20 %, інтервал температур 65-145°C) та збільшення більш важких фракцій (16,4 і 27,3 % проти 15 і 25 %, інтервал температур 145-300°C). Крім того, в суміші зростає доля залишку, тобто фракцій з температурою википання вище 300°C. Важливе значення для практичного використання суміші має перерозподіл загальної сірки (таблиця 2).

Добавка палива не змінює вміст сірки в легких фракціях. Вона залишається на рівні 0,05 та 0,04% для фракцій, що википають при

Таблиця 2

Перерозподіл загальної сірки

Фракція	Вміст загальної сірки, % мас.	
	сира нафта	суміш сира нафта/паливо – 90,9/9,1
65-90	0,05	0,05
90-145	0,04	0,04
145-200	0,04	0,19
200-300	0,03	0,53

механічні включення 0,02 %, кислотність 6,2 мг КОН на 1 г, коксусмість 10% залишку – 0,87 % мас., температура спалаху в закритому тиглі – 30°C, зольність 0,03 % мас., температура застигання 30-40°C, включення сірки – 0,65 % мас., йодне число на 100г палива – 57. При цьому 50% палива переганяється при температурі не вище 260°C, а 96% - не вище 350°C.

Була проаналізована можливість використання продуктів термолізу як добавки до природної нафти або нафтопродуктів. За базовий взято зразок західноукраїнської нафти, 50%-ків якої википає при температурі не вище 197°C, а 80%-ків википає при 320°C. Для порівняння оцінено матеріальний баланс по чотирьох

температурах 65-90°C та 90-145°C відповідно. В той же час відбувається акумулювання сірки у фракціях, які википають при температурах 145-200°C (0,19 % проти 0,04 %) та 200-300°C (0,53 % проти 0,03 %).

Суттєвим є те, що зольність суміші при добавці до нафтового дизельного палива навіть 20 % палива синтетичного на перевищує значень, обмежених вимогами нормативної документації. Так, якщо для дизпалива норма зольності складає 0,01 %, а для дизельної фракції (210-300°C), 0,002 %, мас., то для сумішей 90 % ДФ + 10 % палива та 80 % ДФ + 20 % палива – 0,006 та 0,008 %, мас. відповідно.

Не виходить за нормативні обмеження і значення концентрацій фактичних смол в сумішах "бензин-паливо" і "дизпаливо-паливо". Навіть при добавках палива до 20 % знайдені значення концентрацій фактичних смол не перевищують 2 мг, тобто величини, яка оцінюється як їх відсутність. Також визначено, що останні три зразки мають практично однакову температуру спалаху (близько 560°C).

Іншою перспективною термохімічною технологією, що розглядається для застосування при переробці шинної гуми, є газифікація, тобто процес, що відбувається при високих температурах та тисках, і дозволяє отримувати суміш легких вуглеводневих газів, оксидів вуглецю, водню та пари.

Найбільш перспективним, з точки зору використання для гумової крихти розміром 0,3-3см, виглядає процес газифікації за методом «Лугрі».

В цьому процесі при тиску 2МПа на парокисневому дутті із співвідношенням гума/крихта/водяний пар/кисень рівним 1/1/06, одержують газову суміш приблизно наступного складу, % об.:

CO	22
H ₂	39
CO ₂	27
CH ₄	10
C _n H _m	0,4
H ₂ S+COS	0,6
N ₂ +Ar	1,0

Умови експлуатації газогенератора «Лугрі» дозволяють забезпечити безперервну подачу газифікатора та автоматичне видалення золи, що дозволяє досягти гідної екологічної безпеки експлуатації устаткування.

Отриману газову суміш очищають. Як наслідок, маємо або суміш газів, придатну для виробництва електроенергії, або суміш CO та H₂, яку можна використати для виробництва високоякісних рідких вуглеводнів.

Висновки

Отримані результати демонструють перспективність комплексної переробки зношених шин із послідовним застосуванням електроімпульсної технології магнітного удару та технологій термохімії.

Причому як термоліз, так і газифікація, як кінцевий етап переробки, мають свої власні переваги і можуть бути застосовані для отримання високоліквідних енергоємних продуктів.

На думку авторів, створення перероблюючих підприємств за приведеними технологіями допоможе поєднати вирішення значних екологічних проблем з високоефективним виробництвом якісних енергоносіїв.

Список використаних джерел

1. Бедюх А.Р., Кашковский В.И. Комплексная утилизация отработанных автомобильных шин с использованием методов магнитного удара и низкотемпературной деструкции/ IV Международная конференция Сотрудничество для решения проблемы отходов, 31.01-01.02.2007р., г. Харьков, Украина. - С. 130-131.
2. Бедюх О. Р., Парубоча Т.В., Бутко В. Г. Пристрій для електророзрядної деструкції шин з металевим кордом. Патент України №26176 від 07.06.1999.
3. Бедюх А. Р., Склеповой В. Н., Щерба А. А. и др. Электроимпульсный способ и установка деструкции металлического корда и резины автомобильных шин// Техническая электродинамика. Тематический выпуск. НАН Украины. - Киев. - 2002, ч.2. - С. 120-123.
4. Бедюх О.Р. Электроимпульсный метод деструкції зношених автомобільних шин// Вісник Київ. національного ун-ту. Серія: Радіофізика та електроніка. - 2006.- №9. - С. 8-9.

Надійшла до редколегії 10.12.07

УДК 621.386.834; 622.383

Бунак С.В., аспірант, Ільченко* В.В., кандидат
фіз.-мат. наук, Третяк О.В., доктор фіз.-мат.
наук, Шкавро А.Г., кандидат фіз.-мат. наук

Автоматизована установка для дослідження електрофізичних параметрів поверхневобар'єрних наногетероструктур

Розроблено та створено автоматизовану
установку для дослідження вольт-фарадних та
вольт-провідносних характеристик напів-
провідникових бар'єрних наноструктур.

Висока чутливість, роздільна здатність
та точність установки забезпечується
використанням двополярного високо-
розрядного цифроаналогового перетворювача
та усереднення результатів спостереження.

Показано, що створена установка дозволяє
виявити тонкі особливості електрофізичних
характеристик складних поверхнево-бар'єрних
наноструктур.

Ключові слова: вольт-фарадна
характеристика, наногетероструктура,
квантова точка.

*E-mail: ilch@univ.kiev.ua

Вступ. Дослідження вольт-амперних та
вольт-фарадних залежностей різноманітних
напівпровідникових структур вже досить
тривалий час є класичними способами
визначення їх різноманітних параметрів та
характеристик [1]. Більш детальний аналіз
можливостей цих методів показав, що їх можна
застосовувати не тільки для дослідження таких
структур як МДН, бар'єр Шотткі, $p-n$ - перехід
та ін., а й значно складніших структур з такими
нанооб'єктами, як квантові точки, нитки, кільця
та ін [2]. Тому ці методи дослідження і зараз не
втратили своєї актуальності. Вони лише набули
свого „більш сучасного вигляду” – установки по
вимірюванню електрофізичних параметрів стали
автоматизованими, покращилась точність
вимірювання. Так, рекомендований крок
вимірювання для порівняно простих структур,
таких як бар'єр Шотткі, зазвичай складає 0.01 В, в
той же час для більш складних
наногетероструктур, вимоги можуть бути суттєво
жорсткішими [2, 3]. Враховуючи сучасні вимоги
до результатів вимірювання і була створена така
автоматизована установка.

Bunak S.V., post. grad. stud., Ilchenko* V.V., Ph.D.,
Tretyak O.V., Doct. Sci., Shkavro A.G., Ph.D.

Automatic setup for the investigation of the electrophysical parameters of the surface- barriers nanoheterostructures

The automatic setup for the investigation of
voltage-capacitance and voltage-conductance
characteristics of the semiconductor nanostructures
with barriers were designed and created.

High sensitivity and high abilities of separation
were provided using bothpolarity highnumeric
digital analog converter and by averaging the
obtained results.

It was shown that created setup was able to
reveal the detail peculiarities of the electrophysical
characteristics of the complicated surface-barriers
nanostructures.

Key Words: voltage-capacitance characteristic,
nanoheterostructure, quantum dot.

Опис експериментальної установки.
Вимірювальна установка складається з
вимірювача Е7-12, плати ЦАП SDI-DAC16-4,
амперметра В7-40 та ПК. Блок-схема
вимірювальної установки зображено на Рис. 1.
Прилади Е7-12 та В7-40 під'єднані до
персонального комп'ютера (ПК) за допомогою
приладного інтерфейсу - канал спільного
користування (КСК) через спеціальну
інтерфейсну плату.

За основу був вибраний вимірювач RLC –
Е7-12, який задовольняє сучасним вимогам: має
достатньо високу точність вимірювання,
обладнаний стандартним інтерфейсом IEEE 488
(КСК), що дає змогу повністю керувати
приладом (встановлювати режими, параметри,
діапазони вимірювання) та передавати виміряні
дані. Однак внутрішнє джерело зміщення
приладу Е7-12 має два досить суттєвих недоліки,
які є перешкодою для застосування його в
автоматизованій установці – достатньо великий
крок встановлення напруги зміщення (0.1 В,
рекомендований не більше 0.05 В) та відсутність
двополярного зміщення. Звичайно, останній

Представлено Скришевським В.А., проф., докт. ф.-м.

недолік можливо вирішити за допомогою комутаторів, які б під'єднували зразок або в прямому або в зворотному напрямку, але це призвело б до зміни конфігурації вимірювання і це вимагало б додаткового калібрування установки, що є неприйнятним для автоматизації. В приладі передбачено можливість під'єднання зовнішнього зміщення, що суттєво полегшило створення автоматизованої установки.

Як зовнішнє джерело зміщення в установці було використано стандартний 16-ти розрядний 2-х полярний цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) SDI-DAC16-4, що повністю забезпечує вимоги вимірювання. (Використання 12-ти, а тим більше 10-ти розрядних ЦАП може не забезпечити дискретність встановлення напруги зміщення достатню для дослідження складних структур). Використання такого перетворювача дало змогу позбавитися недоліків приладу - стало можливим вимірювання як при додатному, так і при від'ємному зміщенні, а також суттєве зменшення кроку встановлення напруги зміщення, збільшення точності встановлення напруги.

Використання зовнішнього зміщення також дозволяє включити у коло зміщення амперметр. Це важливо, оскільки дозволяє врахувати падіння напруги на опорі кола зміщення в вимірювачі E7-12, на самому амперметрі, а при необхідності і на опорі бази структури що досліджується. В якості амперметра можна використати будь-який цифровий вольтметр з приладним інтерфейсом КСК, наприклад, відповідну модифікацію приладу В7-40. Використання більш точних приладів, таких як В7-46, дозволяє забезпечити необхідну точність при вимірюванні на описаній установці також вольт-амперних характеристик структур, що досліджуються.

Технічні характеристики створеної установки наступні: точність вимірювання ємності 0.04 пф, точність встановлення напруги 300 мкВ, діапазон напруги зміщення -10.24 - +10.24В.

Для керування вимірювальною установкою розроблено програмне забезпечення, яке повністю дозволяє керувати приладами - встановлення режимів вимірювання, діапазонів, різних параметрів. За допомогою інтерфейсної плати ET 8848 через шину КСК на приладах В7-40 та E7-12 встановлюються необхідні режими, параметри та діапазони.

Плата ЦАП встановлює задане зміщення на зразку. Далі відбувається вимірювання ємності провідності та струму, результат вимірювання

через шину КСК передається до ПК, де відбувається подальша обробка результату - врахування внутрішнього опору вимірювача E7-12. Виміряні результати одразу відображаються на моніторі ПК, а також записуються в файл на жорсткому диску.

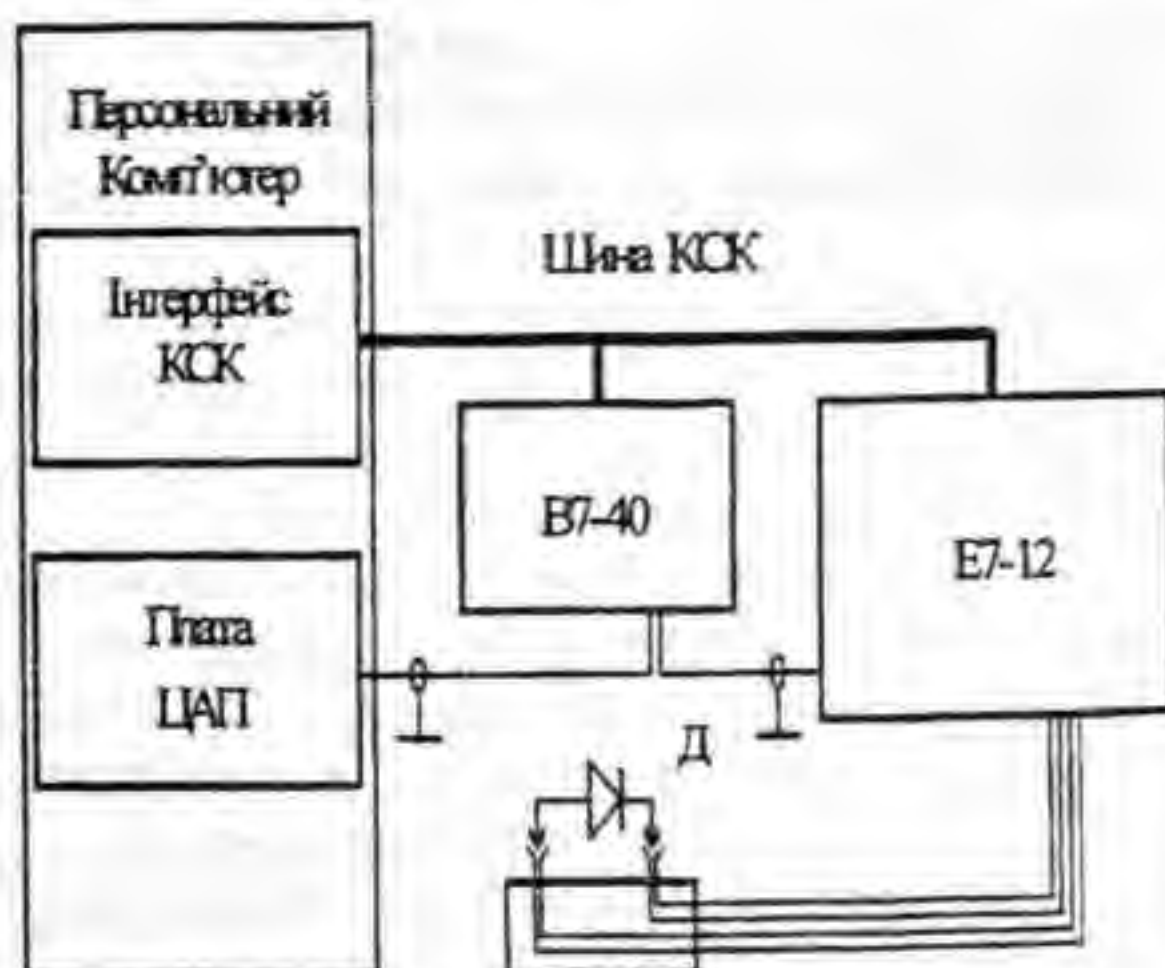


Рис. 1 Блок-схема вимірювальної установки.

Програмне забезпечення створене для установки дозволяє не тільки керувати вимірювальним комплексом, але й переглядати раніше виміряні дані, робити попередню обробку даних.

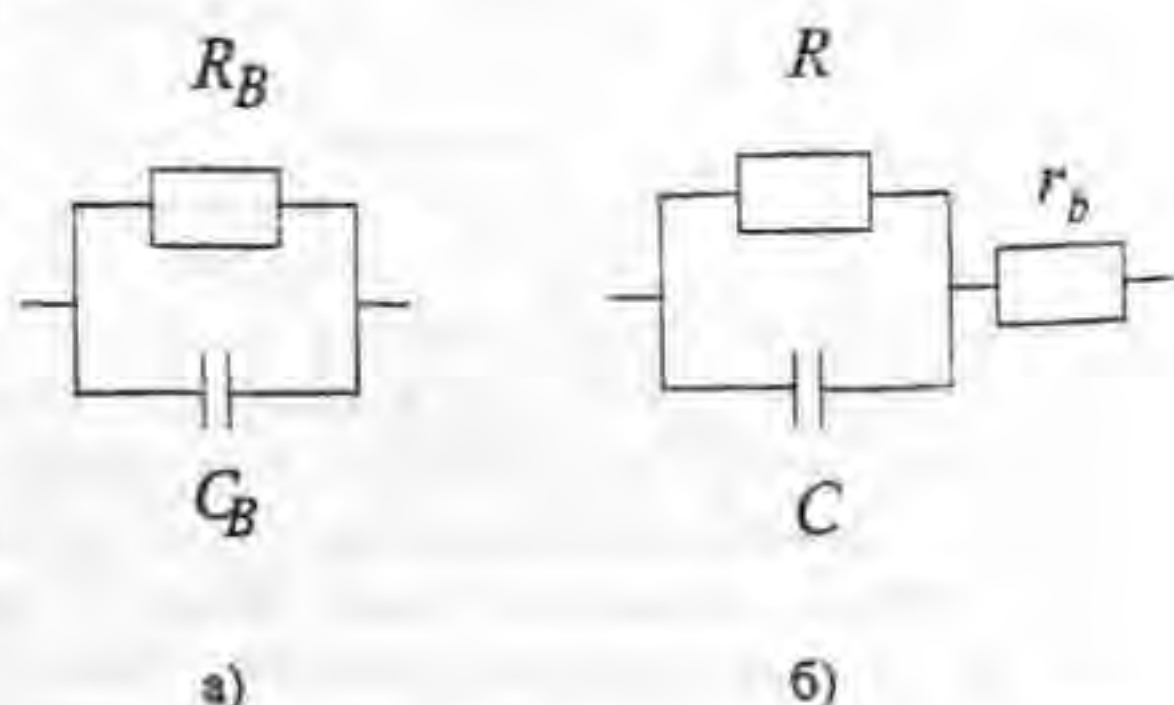


Рис. 2 Схема заміщення (а), та еквівалентна схема приладу, що досліджується (б).

Наприклад, для контакту метал-напівпровідник з бар'єром Шотткі зробити перерахунок з схеми за якою вимірює прилад до еквівалентної схеми самого зразка.

При цьому для перерахунку між параметрами наведених еквівалентних схем використовуються співвідношення:

$$R = R_B \frac{[(1 - r_b/R_B)^2 + \omega^2 C_B^2 r_b^2]}{1 - r_b/R_B - \omega^2 C_B^2 r_b^2},$$

$$C = \frac{C_B}{(1 - r_b/R_B)^2 + \omega^2 C_B^2 r_b^2}.$$

Особливості дослідження диференціальної ємності структур з квантовими точками. Оскільки наявність шарів квантових точок в області просторового заряду створює умови для накопичення значного електричного заряду в станах квантових точок його розподіл в області потенціального бар'єру з координатою стає суттєво неоднорідним.

За цих умов процеси захоплення носіїв та їх емісії з відповідних квантових станів квантових точок суттєво залежать від енергетичного положення цих станів по відношенню до рівня Фермі. Тому в даному випадку диференціальна ємність даних структур (див. Табл. 1) може суттєво змінюватись зі зміною зовнішньої напруги.

На Рис. 3, а наведено приклади типових вольт-фарадних залежностей отриманих для структур з бар'єром Шотткі на основі Si з Ge квантовими точками, що детально досліджувались в роботі [4].

Таблиця 1

Детальна структура Si p-n переходу з шарами Ge квантових точок

Матеріал	Товщина	Концентрація станів	Період
	(nm)	(cm ⁻³)	
	Ohmic contact		
	p ⁺ - Si		1
i-Si	150		
Ge	2,4 ML	1x10 ¹¹ cm ⁻²	x5
n-Si	20nm	1x10 ¹⁶ cm ⁻²	
n-Si	300	1x10 ¹⁶	1
	n ⁺ - Substrate		
	Ohmic contact		

При дослідженні таких об'єктів, для визначення концентрації заряду захопленого в квантові точки необхідно аналізувати похідні ВФХ, що стає можливим лише за умов їх вимірювання з дуже малим, всього 0,001 В, кроком по напрузі.

На Рис. 3, б неведено результати обробки даних проведених вимірювань за допомогою відомого співвідношення:

$$N(x) = \frac{2}{\epsilon_s \epsilon_0 q S^2} \frac{dV}{d\left(\frac{1}{C^2}\right)} \quad [5].$$

Слід відзначити, що проведення чисельного диференціювання отриманих залежностей вимагає великої кількості експериментальних точок отриманих з дуже дрібним кроком.

Завдяки автоматизації вимірювань та застосуванню устаткування, що дозволяло вимірювати диференціальну ємність з кроком 1 мВ вдалося по незначним перегинам на вольт-фарадних залежностях надійно отримувати інформацію про концентрацію квантових точок та місце розташування їх шарів в напівпровідниковій структурі.

Так, з графіків представлених на Рис. 3, випливає що концентрація станів квантових точок становить приблизно 4x10¹⁶ cm⁻³, що еквівалентно приблизно 0,7x10¹⁰ cm⁻² на один шар квантових точок і відповідає даним отриманим для цих структур з незалежних експериментів [4].

Крім того видно, що дана методика дозволяє з гарною точністю визначати відстань шарів квантових точок від міжфазної границі метал-напівпровідник. Для зменшення похибки вимірювань та подальшого розрахунку розподілу концентрації в програмі проведення вимірювань передбачено усереднення результатів по заданій кількості вимірів ємності для кожного значення напруги зміщення.

Для забезпечення більш високої точності вимірів в відповідній програмі проведення вимірювань передбачено врахування паразитних ємностей пов'язаних, наприклад, з існуванням розширеної металізації, впливом паразитної ємності підкладки, тощо. Збережені дані в файлі також можна легко перенести в інші прикладні пакети та провести більш детальну подальшу обробку результатів вимірювань.

Вимірювання, що проводилися в автоматичному режимі доволі тривалий час, дозволили накопичити переконливу статистику отриманих результатів, про що свідчить велика кількість (близько 500) експериментальних точок, представлених на Рис. 4 в діапазоні зовнішніх напруг від -0,6 В до -0,1 В.

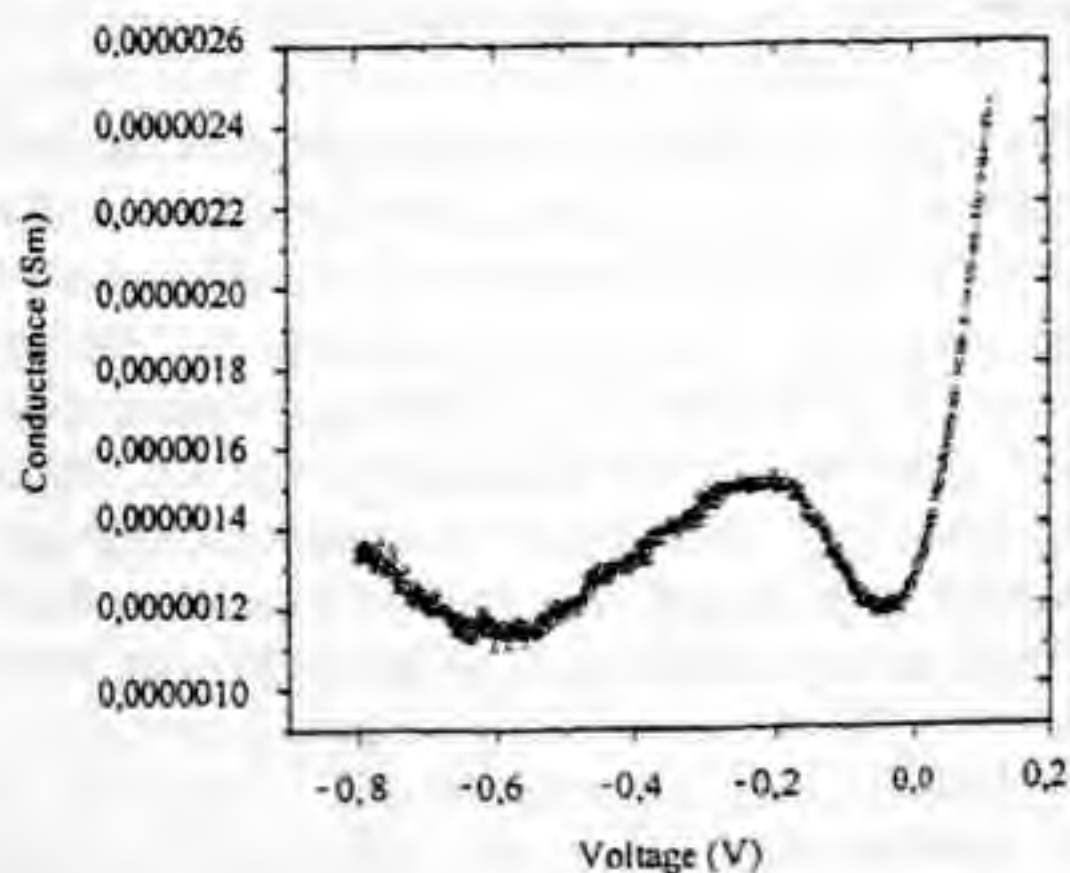


Рис. 4 Результати досліджень вольт-провідносних характеристик наногетероструктур з квантовими точками.

Висновки. На основі проведених в даній роботі експериментів можна зробити висновок, що класичні методики дослідження диференціальних провідності та ємності, відповідним чином адаптовані у випадку їх застосування до сучасних наногетероструктур з квантовими точками, дозволяють спостерігати тонкі ефекти, зумовлені впливом на ці параметри відповідних наночастинок квантових точок, можуть бути достатньо інформативними, а створена для їх вимірювання автоматизована експериментальна установка в подальшому може бути використана для їх більш детального дослідження.

Дана робота була виконана за підтримки Україно-Російської наукової програми „Нанофізика та Наноелектроніка” грант МОНУ М/175-2007р.

Список використаних джерел

1. Стриха В.І., Бузанева Е.В., Радзиевский І.А. Полупроводниковые приборы с барьером Шоттки.-М.: Сов. радио, 1974.- 248 с.
2. Blood P., Orton J.W. The Electrical Characterization of Semiconductors: Majority Carriers and Electron states. -UK Redhill, Surrey RH1 5HA: Philips research laboratories, 1991. -735 p.
3. Yakimov A I., Dvurechenskij A V., Nikiforov A.I. Germanium Self-Assembled Quantum Dots on Silicon: Growth, Electric Transport, Optical Phenomena, and Devices. // In: Handbook of Semiconductor Nanostructures and Nanodevices. Edited by A. A. Balandin and K. I. Wang. 2006, 1, American Scientific Publishers, P. 33-102.
4. Shkil M.V., Ilchenko V.V., Tretyak O.V., Chen P.S., Pei Z.W., and Tsai M.J. C-V and AS study of self-assembled Ge islands in Si P-N junction. //Sensor Electronics and Microsystem Technologies, 2004, No.2, P. 15-19.
5. Miesner C., Asperger T., Bruner K., and Abstreiter G. Capacitance-voltage and admittance spectroscopy of self-assembled Ge islands in Si.// Appl. Phys. Lett., 2000, 77, No.17, P. 2704-2706.

Надійшла до редколегії 29.11.07

УДК 535.5:621.029.7

Гожик І.А., студ., Григорук В.І., доктор фіз.-
мат. наук, проф., Онисько Ю.Т., пр. інж.,
Слінченко* Ю.А., асист.

Фізичні аспекти передачі двовимірного зображення по волоконним світловодам

В даній роботі проаналізовані фізичні засади передачі зображення через волоконні світловоди, реалізована двостороння передача двовимірного зображення (розподілу інтенсивності поперечного перерізу пучка збуджуючого випромінювання) через багатомодовий волоконний світловод з використанням явища обернення хвильового фронту при вимушеному розсіюванні Мандельштама-Бріллюена та наведені розрахунки умов можливості односторонньої передачі зображення через багатомодові волоконні світловоди.

Ключові слова: оптичне волокно, обернення хвильового фронту, вимушене розсіювання Мандельштама-Бріллюена.

*E-mail: yas@univ.kiev.ua

Вступ

Зростання потреб у об'ємах та швидкості передачі інформації робить актуальним пошук нових методів передачі та обробки зображення. Тому проблема передачі зображення без цифрового кодування по волоконним світловодам (ВС) залишається актуальною і сьогодні [3], незважаючи на свою давню історію [4,5].

Метою даної роботи є демонстрація можливості двосторонньої передачі двовимірного зображення через багатомодовий волоконний світловод (БВС) з обернення хвильового фронту (ОХФ) та розрахунки умов можливості експериментальної реалізації односторонньої передачі зображення через БВС.

Теорія

Розв'язання задачі передачі зображення по ВС можливе при використанні одномодових ВС [6], але у цьому випадку виникають певні

Gozhyk I.A., stud., Grygoruk V.I., Doct. Sci., Prof.,
Onys'ko Y.T., pr. eng., Slinchenko Y.A., as.

Physical aspects of two-dimensional image transmission through optical fibers

Physical principles of image transmission through optical fibers have been analysed in the paper. Two-way transmission of two-dimensional image (intensity distribution of transversal section of exciting beam radiation) through multimode optical fiber has been realized by use of phase conjugation by stimulated Brillouin scattering. Estimation of possibility of one-way transmission of the image through multimode optical fiber has been made.

Key Words: optical fiber, phase conjugation, stimulated Brillouin scattering.

ускладнення, пов'язані, зокрема, з введенням випромінювання у ВС та низькою яскравістю зображення.

У випадку використання багатомодових ВС (БВС) проблеми, які виникають при передачі двовимірного зображення, можуть бути пояснені таким чином. Вхідне випромінювання збуджує певну кількість мод у БВС, які формують розділні елементи майбутнього зображення. У кожній з мод своя стала поширення. Через це та міжмодову інтерференцію на виході БВС утворюється спекл-картина.

Вплив різниці сталих поширення на міжмодовий набіг фаз особливо наочно можна продемонструвати у випадку використання відрізка БВС довжиною l з профілем показника заломлення (ППЗ) типу "сходи́нка". З [1] та [2] з урахуванням ефекту Гооса-Хенхена можна отримати, що міжмодовий набіг фаз основної $HE_{1,1}$ та моди, що проходить найбільший оптичний шлях у БВС довжиною $l=10$ см $HE_{3,4}$ ($\lambda=1,3$ мкм, числова апертура $ЧА=0,17$) складає $\sim \frac{5}{6}\pi$.

Передача зображення по БВС можлива за рахунок використання ОХФ. ОХФ дозволяє: понизити шумові компоненти корисного сигналу (які виникають при передачі зображення у ВС); зменшити уширення імпульсів, що поширюються у ВС; керувати просторово-часовою структурою оптичного випромінювання.

Відомо, що ОХФ – наслідок низки нелінійно-оптичних процесів, зокрема і вимушеного розсіювання Мандельштама-Бриллюена (ВРМБ), та може бути використане для ефективного відновлення хвильового фронту випромінювання, спотвореного різноманітними просторовими неоднорідностями.

Розділяють два випадки передачі зображення по ВС: двосторонню чи двонаправлену (вперед і назад) та односторонню (вперед).

Ідея двосторонньої передачі полягає у тому, що збуджуюче випромінювання, поширюючись у основному відрізку БВС, спотворюється, а потім за рахунок ОХФ-відбивання від допоміжного БВС поширюється у зворотньому напрямку через той самий основний БВС і відбувається компенсація спотворень (експеримент – див. нижче). При цьому вихідне зображення утворюється у місці знаходження вхідного. Тому двостороння передача зображення через БВС з ОХФ [7] окрім демонстрації можливості самого явища більш актуальна для компенсації спотворення зображення чи оптичних імпульсів [8] при поширенні у ВС.

Більше практичне значення має одностороння передача зображення. У цьому випадку збуджуюче випромінювання, поширюючись у першому основному відрізку БВС, спотворюється, а потім за рахунок ОХФ-відбивання від допоміжного БВС поширюється у другому допоміжному БВС, ідентичному до першого, і відбувається компенсація спотворень (експеримент – див. нижче). При цьому вхідне і вихідне зображення виявляються просторово рознесеними.

Перші практичні результати з прямої (односторонньої) передачі зображення по БВС наведені у роботі [9]. Хоча автори і наголошують на практичній перевазі цього типу передачі зображення по ВС перед двостороннім, але у конкретному експерименті вихідна та кінцева точка передачі зображення жорстко пов'язані між собою і повинні знаходитися на видимій відстані для запису двох голограм (коректуючої та у фоторефрактивному кристалі – для ОХФ). Теоретичний аналіз більш практично цікавого випадку зі застосуванням двох ВС наведено у роботі [3].

Для аналізу впливу різниці довжин двох основних БВС l у випадку односторонньої передачі зображення на його спотворення здійснено аналіз додаткового набігу фаз двох різних напрямних мод серцевини БВС. Розглянуто набіг фаз для мод, що проходять найменший та найбільший оптичний шлях з усіх напрямних мод серцевини для різних БВС та різних довжин хвиль випромінювання.

Розрахунки проводились для відрізків стандартних кварц-кварцових БВС з діаметрами серцевини $a = 50$ мкм та оптичної оболонки $b = 125$ мкм, і збуджуючим випромінюванням з довжинами хвиль $1,3$ мкм та $0,85$ мкм. Були розглянуті БВС з ППЗ типу "схдинка" та параболічним і різними числовими апертурами – $0,17$ та $0,05$ (різниця показників заломлення – $0,01$ та $0,001$ відповідно).

Оптичний шлях моди $HE_{1,1}$, що поширюється вздовж вісі волокна (далі – нульова мода) $L(0)$ визначається як:

$$L(0) = l \cdot n_1, \quad (1)$$

де l – різниця довжин відрізків БВС, n_1 – показник заломлення серцевини БВС.

Оптичний шлях певної моди, у тому числі і найбільший, з індексами v, m (де v та m – азимутальний та радіальний порядки моди відповідно), визначається як [2]:

$$L(v, m) = l \cdot \frac{L_{v, m}}{Z_{v, m}}, \quad (2)$$

де $L_{v, m}$ – оптична довжина шляху v, m -ї моди між двома послідовними відбиттями, а $Z_{v, m}$ – відстань між точками послідовних відбиттів по осі z (вісі вздовж волокна).

З урахування ефекту Гооса-Хенхена, суттєвого лише для БВС з ППЗ типу "схдинка", маємо:

$$L(v, m) = l \cdot \left(L_{v, m} + \frac{\phi \cdot \lambda}{2\pi} \right) / (Z_{v, m} + \Delta Z_{v, m}), \quad (3)$$

де $\Delta Z_{v, m}$ – просторовий зсув світлового пучка при повному внутрішньому відбиванні (ПВВ) за рахунок ефекту Гооса-Хенхена вздовж межі поділу серцевина-оптична оболонка, а ϕ – поляризаційний набіг фази при ПВВ.

Очевидно, що величини $L_{v, m}$, $Z_{v, m}$ визначаються параметрами конкретного БВС.

Так, у випадку відрізка БВС з ППЗ типу "сходінка" маємо:

$$L(v, m) = l \cdot \left(\frac{n_1^2}{\beta_{v,m}} + \frac{\phi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{Z_{v,m}} \right) / \left(1 + \frac{\Delta Z_{v,m}}{Z_{v,m}} \right), \quad (4)$$

де [2]

$$Z_{v,m} = \frac{a \cdot \beta_{v,m} \sqrt{(kn_1)^2 - \beta_{v,m}^2 - l_{v,m}^2}}{(kn_1)^2 - \beta_{v,m}^2}, \quad (5)$$

а у випадку параболічного ППЗ [2]:

$$L(v, m) = l \cdot \frac{1}{2k} \left\{ \frac{(kn_1)^2}{\beta_{v,m}} + \beta_{v,m} \right\} \quad (6)$$

При цьому сталі поширення $\beta_{v,m}$ обчислюються з відповідних характеристичних рівнянь для v, m -ї моди: (7) – для ППЗ "сходінка", (8) – для параболічного ППЗ [1].

$$\left(m - \frac{1}{4} \right) \pi - \frac{\phi}{2} = a \cdot \sqrt{(n_1 \cdot k)^2 - \beta_{v,m}^2 - (v/a)^2} - v \cdot \arccos \left(\frac{v}{\sqrt{(n_1 \cdot k)^2 - \beta_{v,m}^2}} \right) \quad (7)$$

$$m - \frac{1}{2} = \left(\frac{n_1^2 - (\beta_{v,m}/k)^2}{n_1^2 - n_2^2} \right) \frac{V}{4} - \frac{v}{2} \quad (8)$$

де $V = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ – параметр волокна, а n_1 та n_2 – показники заломлення серцевини та оптичної оболонки БВС відповідно.

Нижче (рис. 1 - 4), для БВС різних типів і довжин хвиль у графічному вигляді наведено залежність набігу фаз від різниці довжин двох ідентичних БВС для моди, що поширюється вздовж вісі волокна ($HE_{1,1}$), та моди, що проходить найбільший оптичний шлях у ВС. На цих рисунках залежності 1 та 3 відповідають додатковому набігу фаз моди $HE_{1,1}$ для $\lambda=1,3$ мкм та $\lambda=0,85$ мкм відповідно. А залежності 2 та 4 – додатковому набігу фаз моди, що проходить найбільший оптичний шлях для $\lambda=1,3$ мкм та $\lambda=0,85$ мкм відповідно.

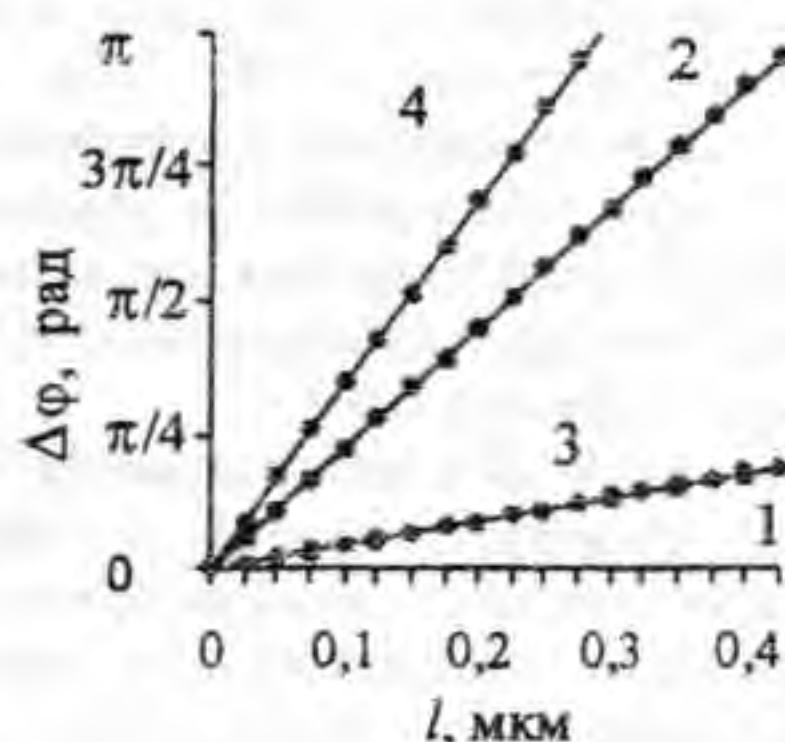


Рис. 1. Залежність додаткового набігу фаз $\Delta\phi$ від різниці довжин БВС l для ППЗ типу "сходінка" з $CA=0,17$. 1, 3 – мода $HE_{1,1}$, 2 – мода $HE_{8,3}$, 4 – мода $HE_{14,5}$.

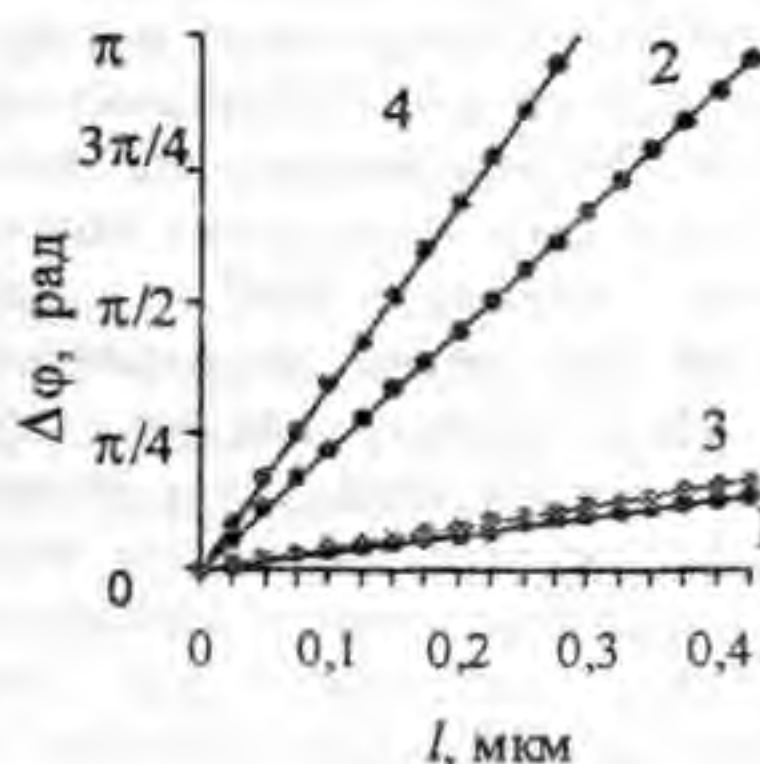


Рис. 2. Залежність додаткового набігу фаз $\Delta\phi$ від різниці довжин БВС l для ППЗ типу "сходінка" з $CA=0,05$. 1, 3 – мода $HE_{1,1}$, 2 – мода $HE_{5,2}$, 4 – мода $HE_{8,1}$.

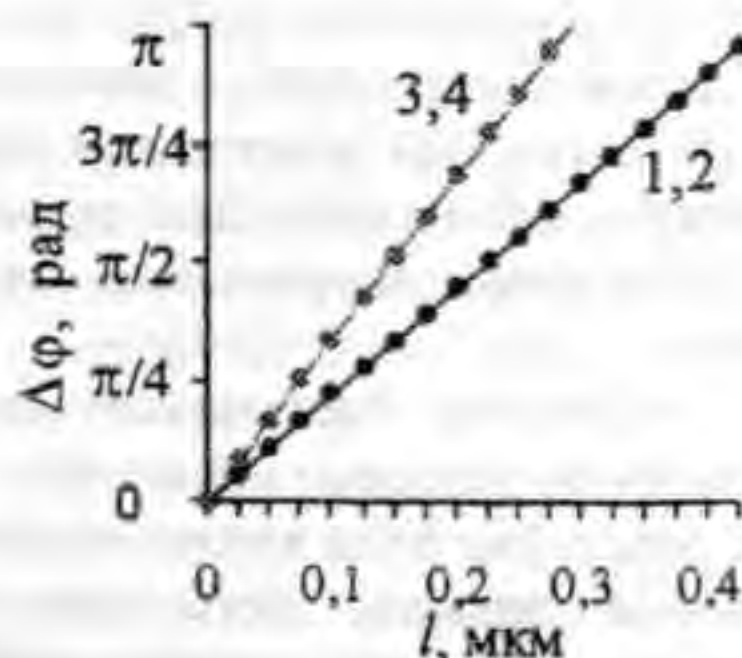


Рис. 3. Залежність додаткового набігу фаз $\Delta\phi$ від різниці довжин БВС l для параболічного ППЗ з $CA=0,17$. 1, 3 – мода $HE_{1,1}$, 2 – мода $LP_{9,1}$, 4 – мода $LP_{14,1}$.

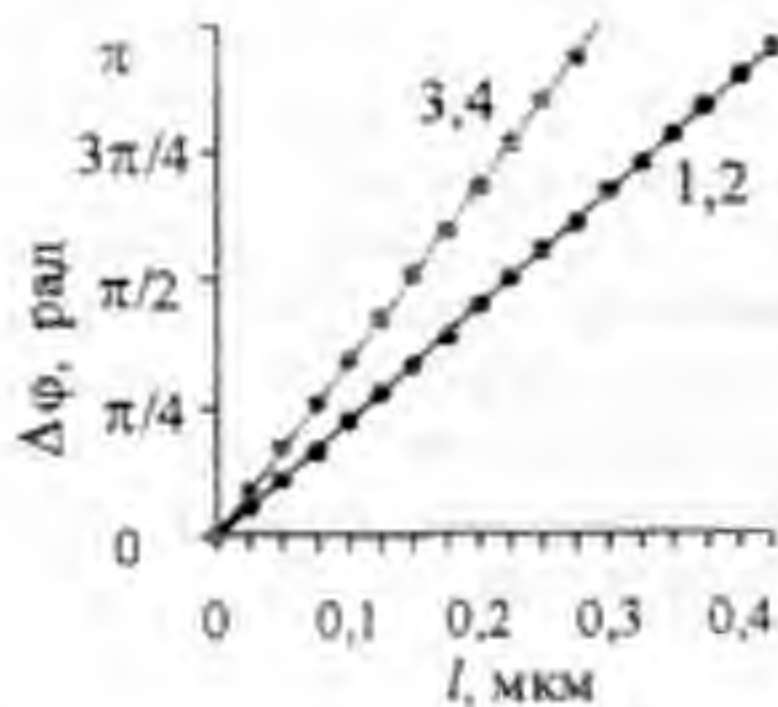


Рис. 4. Залежність додаткового набігу фаз $\Delta\phi$ від різниці довжин БВС l для параболічного ППЗ з $ЧА=0,05$. 1, 3 – мода $HE_{1,1}$, 2 – мода $LP_{2,1}$, 4 – мода $LP_{3,1}$.

З вищенаведеного випливає, що принципово можливий варіант односторонньої передачі двовимірного зображення через БВС з ОХФ на основі ВРМБ у ВС (схема та деталі експерименту обговорюються нижче), але існує певне обмеження на різницю довжин двох основних відрізків БВС. Так, окрім бажаної ідентичності двох основних відрізків БВС, різниця їх довжин не повинна перевищувати $\sim 0,2$ мкм, оскільки це призведе до міжмодового набігу фази (між однаковими модами у двох основних БВС) порядку $\pi/2$ (див. рис. 1 - 4) і, відповідно, до спотворення вихідного зображення.

Експериментальні результати та їх обговорення

Для демонстрації двосторонньої (вперед і назад) передачі двовимірного зображення була використана схема аналогічна до [8], рис. 5.

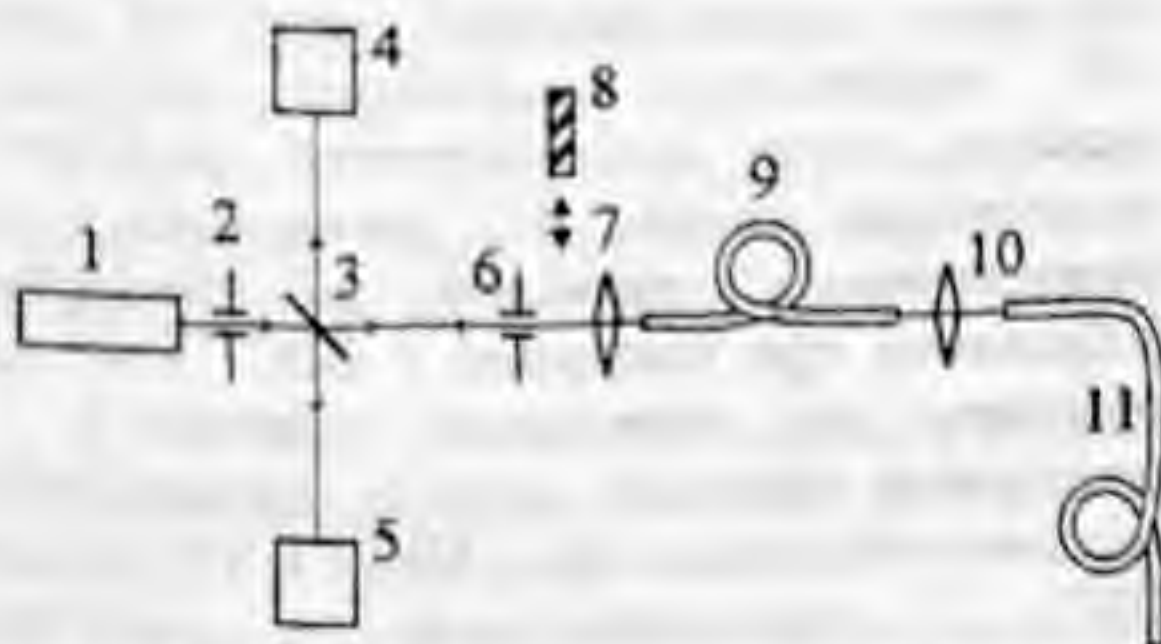


Рис. 5. Схема експериментальної установки для двосторонньої передачі зображення. 1 – джерело оптичного випромінювання, 2 та 6 –

діафрагми просторової фільтрації; 3 – напівпрозора платівка; 4, 5 – пристрої реєстрації; 7, 10 – об'єктиви для введення випромінювання у ВС; 9 – робочий відрізок БВС; 11 – відрізок допоміжного БВС для ОХФ при ВРМБ.

У якості джерела використовувався рубіновий лазер 1 (тривалість імпульсу ~ 20 нс, енергія $\sim 10^{-2}$ Дж, основна поперечна мода, спектральна ширина лінії $\sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$). Після просторової фільтрації за допомогою діафрагм 2 та 6 випромінювання за допомогою об'єктива 7 вводилось до досліджуваного відрізка багатомодового БВС 9. Після цього, за допомогою об'єктива 10 випромінювання попадало до відрізка допоміжного БВС 11. В роботі були використані кварц-кварцові ВС: 9 – діаметр серцевини 200 мкм, 11 – діаметр серцевини 20 мкм. Завдяки такій різниці діаметрів умови фокусування були підібрані так, що ВРМБ відбувалося у БВС 11, а у 9 його поріг не досягався. Частина збуджуючого випромінювання відгалужувалася за допомогою напівпрозорої платівки 3 на систему реєстрації 5, яка складалась з фотоелектричного перетворювача ФК-19, швидкісного осцилографа та пристрою відеофіксації зображення.

Випромінювання, що виходило з БВС 9, нелінійно "відбивалось" від БВС 11 внаслідок ВРМБ з ОХФ, та проходило у зворотному напрямку той самий шлях. За допомогою напівпрозорої платівки це випромінювання потрапляло на систему реєстрації 4, ідентичну до системи 5 та синхронізованої з нею. Для порівняння з випадком звичайного лінійного відбивання після діафрагми 6 вводилось дзеркало 8. Використовувались відрізки БВС: 9 з довжинами 2, 5 та 10 см; 11 – від 3 до 20 м. Для того, щоб позбутися френелівського відбивання на вхідному торці БВС 9, випромінювання падало на нього під кутом.

На рис. 6. наведено просторовий розподіл відбитого з ОХФ випромінювання.

У випадку коли довжина БВС 9 складала 2 см (рис. 6а), просторова структура розподілу інтенсивності відбитого випромінювання була практично повністю ідентична до такої для збуджуючого випромінювання та має меншу кутову розбіжність [8]. Фазові шуми у вигляді спекл-структури, що властиві когерентному випромінюванню на виході БВС, були практично повністю подавлені. Для порівняння, на рис. 6б наведено відбите випромінювання у випадку відсутності явища ОХФ. Зі збільшенням довжин

відрізків БВС 9 ступінь ОХФ зменшувалась, що призводило до збільшення шумів у відбитому з ОХФ випромінюванні (рис. 6). Головна причина цього полягає у тому, що частотний зсув при ВРМБ ($\sim 0,7 \text{ см}^{-1}$) призводить до суттєвого паразитного зсуву фази між окремими модами на відстанях від 10 см.

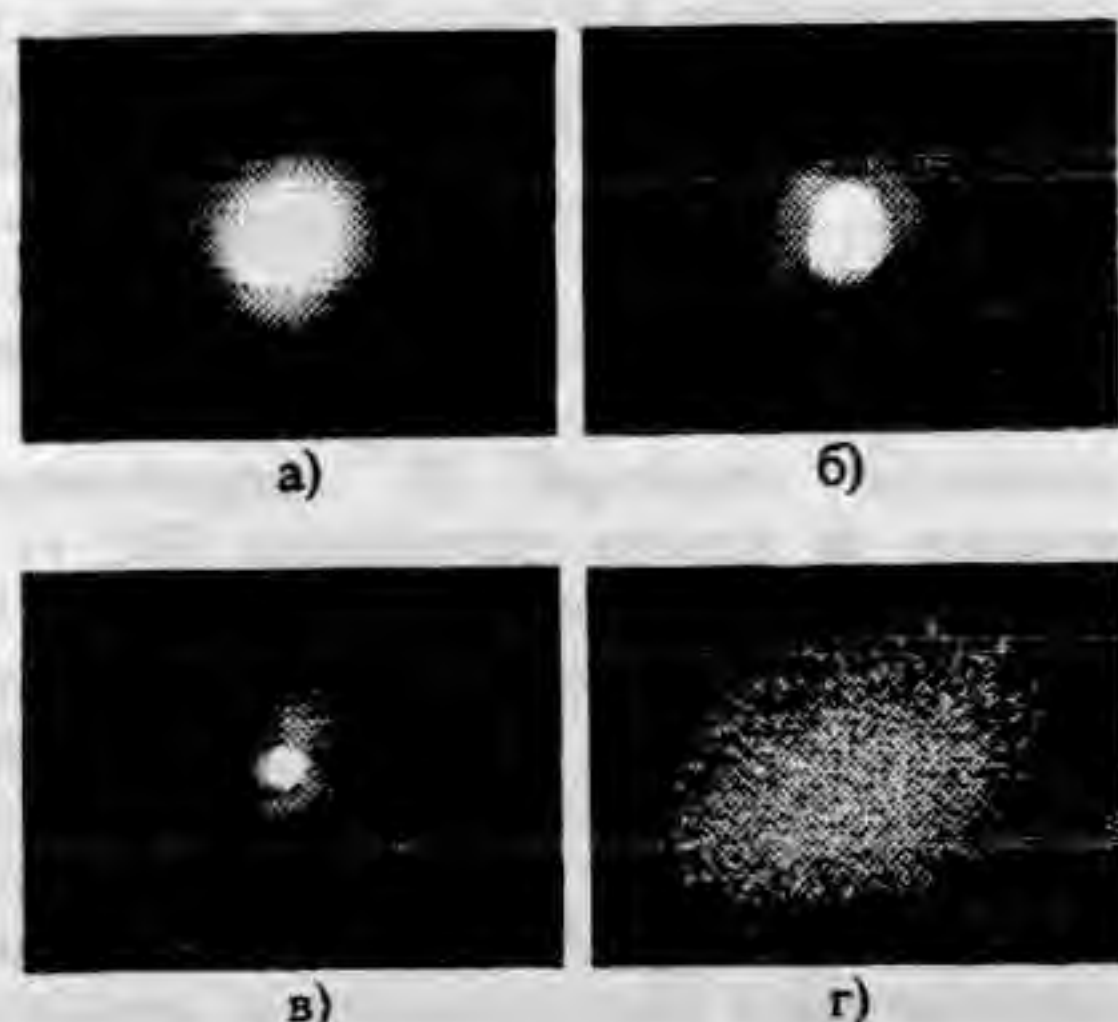


Рис. 6. Просторовий розподіл інтенсивності відновленого хвильового фронту випромінювання. Довжина БВС 9 складала: а) – 2 см, б) – 5 см, в) – 10 см. г) – відбите випромінювання у випадку відсутності явища ОХФ.

Форма імпульсів, відбитих з ОХФ, практично повністю співпадала з формою збуджуючих імпульсів (рис. 7). Результуючий коефіцієнт відбиття складав $\sim 40\%$.

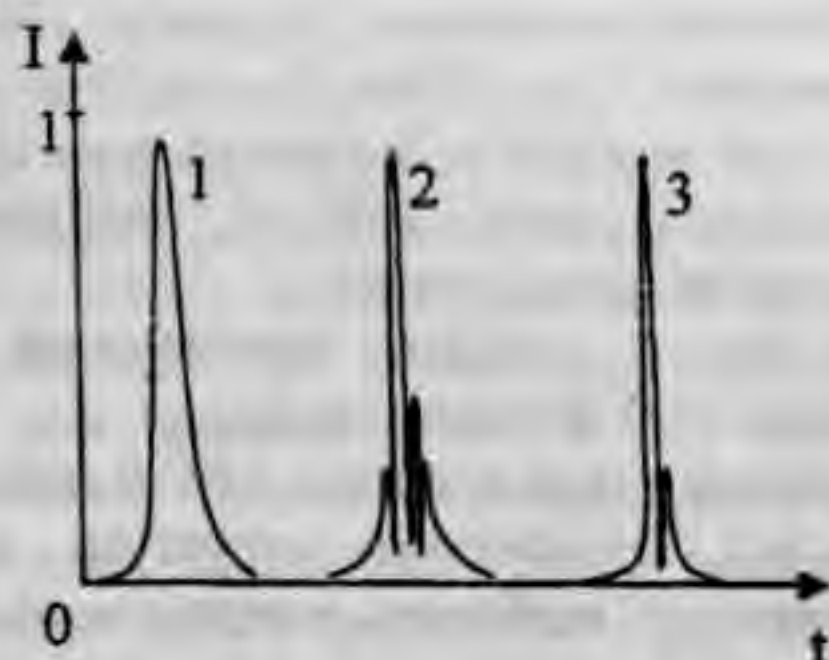


Рис. 7. Часова структура імпульсного випромінювання при ВРМБ у БВС. 1 – імпульс збуджуючого випромінювання; 2 та 3 – імпульси, відбиті з ОХФ.

Таким чином, результати роботи демонструють можливість практично повного

пригнічення фазових шумів на коротких сегментах БВС, а отже – можливість двосторонньої (двонаправленої) передачі двовимірного зображення.

Схема для односторонньої передачі випромінювання через БВС з використанням явища ОХФ при ВРМБ у БВС наведена на рис. 4. Параметри структурних одиниць схеми ідентичні до аналогічних для випадку двосторонньої передачі зображення (рис. 5).

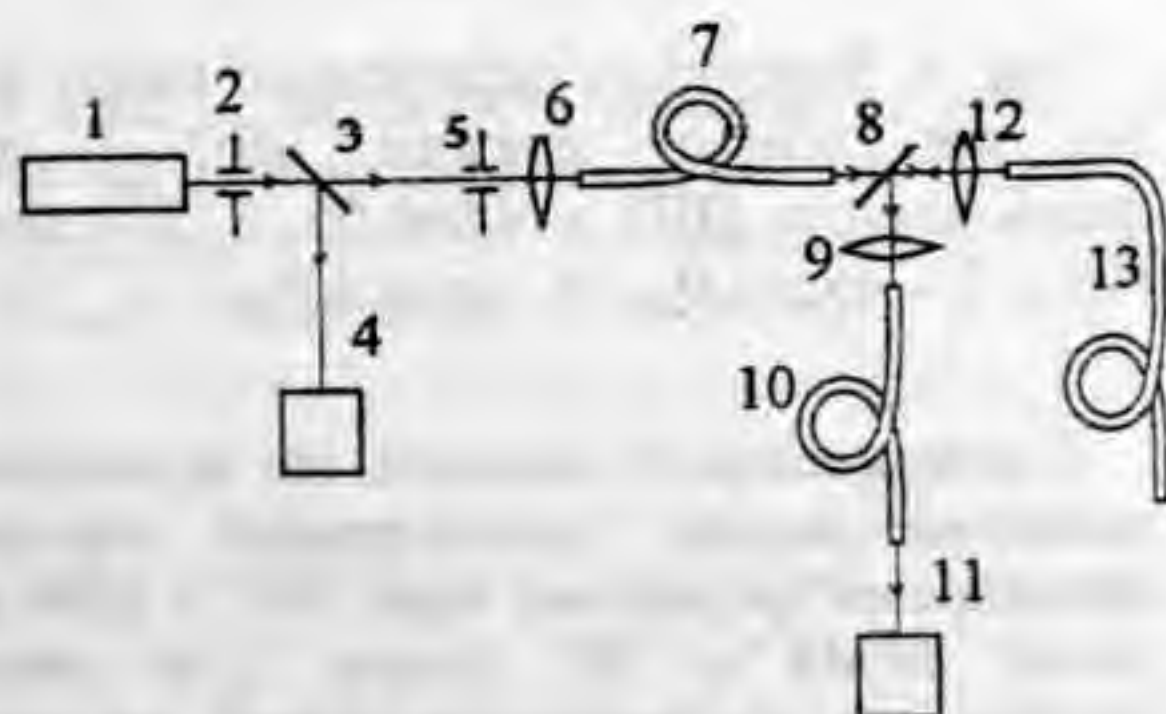


Рис. 8. Схема експериментальної установки для односторонньої передачі зображення. 1 – джерело оптичного випромінювання; 2 та 5 – діафрагми просторової фільтрації; 3, 8 – напівпрозорі платівки; 4, 11 – пристрої реєстрації; 6, 9, 12 – об'єктиви для введення випромінювання у ВС; 7, 10 – робочі відрізки БВС; 13 – відрізок допоміжного БВС для ОХФ при ВРМБ.

Зрозуміло, що у випадку спроби звичайної односторонньої передачі зображення по БВС (без ОХФ) на виході волокна отримаємо спекл-картину – спотворення зображення. Причина полягає з одного боку у багатомодовості випромінювання при поширенні у БВС, а з іншого – у наявності дефектів і неоднорідностей у ВС. Внаслідок зворотного поширення ОХФ-оберненого випромінювання через той самий БВС відбувається компенсація спотворень. Імовірно, вплив неоднорідностей, особливо у технологічно якісних ВС, значно менше ніж багатомодовість призводить до спотворення зображення при поширенні у БВС. Тому слід очікувати, що принципово можливо [], наслідуючи ідеологію випадку двонаправленої передачі зображення через БВС з ОХФ (з одним БВС), експериментально реалізувати односторонню передачу зображення (рис. 8) з використанням двох БВС. У даному випадку випромінювання, що пройшло крізь БВС 7 після

ОХФ-відбиття від БВС 13, через напівпрозору платівку 8 та об'єктив 9 потрапляє у БВС 10, ідентичний до БВС 7 та на 11 отримується вихідне зображення. При цьому випромінювання буде спотворюватися першим БВС – 7, ОХФ-обертатися допоміжним БВС – 13, а компенсація спотворень буде відбуватися при поширенні в БВС – 11. Очевидно, що при цьому зображення буде частково спотворене внаслідок не лише частотного зсуву при ВРМБ, але ще і тому, що волокна 7 та 9 мають різний розподіл неоднорідностей. Чим менше цих неоднорідностей, тим менше буде спотворене зображення. Обмеження на різницю довжин БВС 7 та 10 наведено вище (див. теорія).

Як і у випадку двосторонньої передачі зображення тут слід використовувати невеликі відрізки БВС. Більше того, ці короткі відрізки волокна слід відрізати послідовно один за одним від одного довгого відрізка БВС, тоді вплив власних неоднорідностей ВС буде мінімальним.

Таким чином, у роботі продемонстрована двостороння передача двовимірного зображення (розподілу інтенсивності поперечного перерізу пучка збуджуючого випромінювання) через БВС на основі ОХФ при ВРМБ у ВС. Використання саме явища ВРМБ, а не голографічного елементу значно полегшує отримання ефекту ОХФ. А використання для цього саме ВС (допоміжного БВС) дозволяє спростити схему та використовувати менші потужності випромінювання.

Окрім того обґрунтовано можливість односторонньої передачі зображення через БВС та наведено оцінки обмеження різниці двох основних БВС для різних типів БВС та різних довжин збуджуючого випромінювання.

5. Yariv A. On Transmission and Recovery of Three-Dimensional Image Information on Optical Waveguides // J. Opt. Soc. Amer. – 1976. – 66 – P.301.

6. Pack E. G., Zah C. E., Cheung K. W., and Curtis L. All-optical Image Transmission Through a Single-Mode Fiber, Optics Letters, 1992. – 17 – P.613-615.

7. Tomita Y., Yaholom R., Kyama K., Yariv A., Kwong N. Polarization and spatial information recovery by modal dispersal and phase conjugation: properties and applications // IEEE J. QE-25. – 1989. – P. 315-338.

8. Белоус А. И., Григорук В. А., Пасечный В. А., Стрижевский В. Л., Чернышев В. А. Подавление фазовых шумов при распространении гигантских лазерных импульсов в оптическом волокне на основе ОВФ // Квантовая электроника. – 1988. – 15, №1. – С. 180-181.

9. Volyar, A., Gnatovskii, A., Kukhtarev, N., and Lapaeva, S. Image Transmission via a Multimode Fiber Assisted by Polarization Preserving Phase Conjugation in the Photorefractive Crystal // Applied Physics. – 1991 - B52. – P. 400-401.

Надійшла до редколегії 06.12.07

Список використаних джерел

1. Унгер Г.Г. Теория планарных и волоконных оптических волноводов/ Пер. с англ. под ред. Шевченко В.В. – М., "Мир", 1980. – 656с.

2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов/ Пер. с англ. под ред. Дианова Е. М. и Шевченко В.В. – М., "Радио и связь", 1987. – 656с.

3. Jackson D. J. Technique for recovering images from tightly confined spaces // J. Opt. Soc. Am. – 1999. – A16. – P. 1072-1075.

4. Dunning G. J. and Lind R.C. Demonstration of Pictorial Transmission Through Fibers by Optical Phase Conjugation // Opt. Letters, 1982. – 7 – P.558.

УДК 519.9

Короновський В.Є., канд. фіз.-мат. наук

Оптичні явища у вісмут-заміщених плівках ферит-гранатів у зовнішньому електричному полі

Магнітоелектричні (МЕ) властивості епітаксійних плівок вісмут-заміщених феритових гранатів досліджувались з використанням методу оптичної поляриметрії (електромагнітооптичний (ЕМО) ефект). ЕМО ефект на багатодоменних ділянках досліджуваних плівок зареєстровано в поперечному електричному полі. Величина ЕМО сигналу залежала від зовнішнього магнітного поля і на однорідно намагнічених плівках. ЕМО ефект практично відсутній.

Ключові слова: ЕМО ефект, плівки вісмут-заміщених феритових гранатів, електричне поле.

E-mail: koron@univ.kiev.ua

Зовнішнє магнітне поле, підведене до кристала, викликає в ньому прояви індукованих оптичних явищ, залежних від напрямку поля, наприклад - ефекту Фарадея (ЕФ). Як було показано в [1], можливе також існування оптичних явищ в кристалах, індукованих зовнішнім електричним полем. Вказані явища мають різну природу. Так, магнітне поле H , може індукувати ЕФ (або інші оптичні явища) в будь-якому кристалі, а електричне поле E може індукувати оптичні явища (лінійні або квадратичні за E -полем) лише в кристалах з певною магнітною симетрією. Одне з таких явищ - ефект повороту площини поляризації світла в кристалі, індукований електричним полем, назване авторами [1,2] як електромагнітооптичний ефект (ЕМОЕ).

До матеріалів, в яких вдалось експериментально спостерігати оптичні явища, індуковані E -полем, відносяться і залізоїтрієві гранати (ЗІГ). В наших попередніх дослідженнях вказаного ефекту (повздовжній ЕМО ефект), лише квадратичний за E -полем ЕМОЕ вдалось виявити в епітаксійних плівках ЗІГ [3,4]. Лінійний за E -полем ЕМО ефект в плівках ЗІГ був нами зареєстрований як результат впливу зовнішнього механічного тиску на структуру досліджуваних плівок [5].

Koronovskyy V.E., Ph.D

Optical phenomena in bismuth-substituted ferrite garnet films in external electric field

The magneto-electric properties of bismuth-substituted ferrite garnet films are investigated with using optical polarimetry method (electromagneto-optical (EMO) effect). The EMO effect from multidomain sites of films is registered in transverse electric field. A value of EMO signal depends on external magnetic field and in the homogeneously magnetized films EMO effect is practically absent.

Key Words: EMO effect, bismuth-substituted ferrite garnet films, electric field.

В даній роботі повідомляється про результати експериментальних досліджень оптичних явищ у вісмут-заміщених плівках ферит-гранатів та епітаксійних плівках ЗІГ в поперечній за E -полем геометрії експерименту (E -поле паралельне поверхні плівки). Наскільки відомо автору, подібних експериментів у вказаній геометрії раніш не проводилось.

Експериментальна установка складається з лазерного поляриметра, детально описаного в [3]. Суть експериментального методу - реєстрація змін кута повороту площини поляризації світла під впливом E -поля, підведеного до зразка - $\alpha_{\text{ЕМО}}$ (ЕМОЕ). Досліджувані плівки ЗІГ та вісмут-заміщені плівки ферит-гранатів були вирощені на $\text{Gd}_3\text{Ga}_5\text{O}_{12}$ підкладках, товщиною біля 600 мкм. Намагніченість доменів - перпендикулярна до поверхні плівок. До зразка було підведено змінну електричну напругу U частотою (ω) 900 Гц і амплітудою до 3 кВ. Зразки досліджуваних плівок представляли собою пластини товщиною до 2,5 мм, які були розміщені між електродами. Вимірювання проводились на малих ділянках зразків (діаметр ділянки лазерного зондування не перевищував 1 мм). Схема дозволяла проводити дослідження як кута повороту площини поляризації світла під дією магнітного поля H , так і його зміни. $\alpha_{\text{ЕМО}}$ - викликані впливом на

зразок електричного поля E . В експерименті використовувався He-Ne лазер ($\lambda=0.63 \text{ }\mu\text{m}$). Експерименти проводились при кімнатній температурі в геометрії $E \perp k$, $H \parallel k$, де k – хвильовий вектор.

В трьох досліджуваних ЗІГ плівках (товщиною 0.92, 2.8 та 3.98 мкм) у вказаній геометрії: лінійного чи квадратичного за електричним полем ЕМОЕ не було зареєстровано. В двох зразках вісмут-замішених плівок ферит-гранату, була зареєстрована лише 2ω компонента ЕМО сигналу. Тому, в подальшому у даній статті, $\alpha_{\text{ЕМО}}^{2\omega} = \alpha_{\text{ЕМО}}$. Магнітопольову залежність $\alpha_{\text{ЕМО}}$, для одного із зразків вісмут-замішених плівок ферит-гранату (товщина плівки 2.7 мкм) представлено на Рис.1. Як видно з наведеного графіка, залежність має ряд особливостей:

- поворот площини поляризації світла під впливом зовнішнього низькочастотного електричного поля E в досліджуваній плівці в різній мірі проявляється лише в присутності магнітного поля H ;

- в області магнітних полів 0-90 Е, $\alpha_{\text{ЕМО}} \approx 0$;
- в магнітному полі, при $H \sim 100$ -140 Е, чітко реєструється область лінійного за магнітним полем росту величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$;

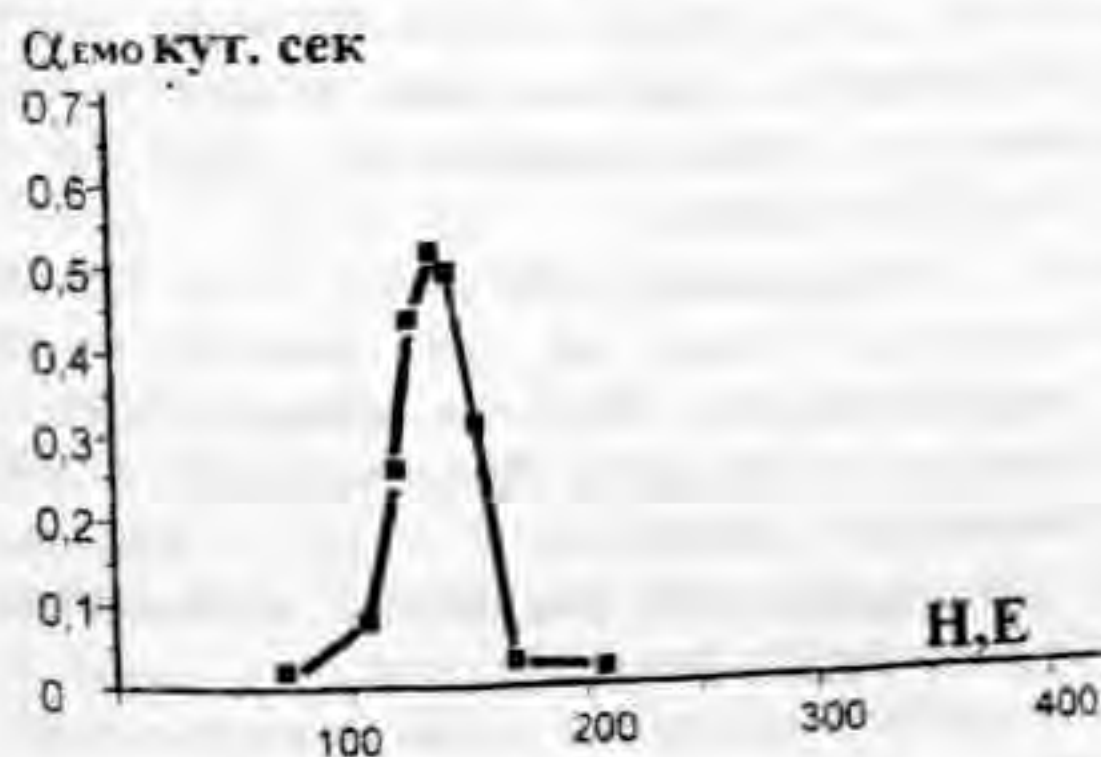


Рис. 1 Магнітопольова залежність величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$, виміряна на другій гармоніці електричного поля в геометрії $E \perp k$, $H \parallel k$.

- досягнувши максимальних значень (при $H \approx 145$ Е), ефект різко зменшується до нульових значень. ЕМО сигнал не змінюється при подальшому зростанні величини магнітного поля, коли напрямки H та M співпадають.

Подібні магнітопольові залежності $\alpha_{\text{ЕМО}}$ вимірювались на різних ділянках досліджуваних

плівок, при цьому максимум $\alpha_{\text{ЕМО}}$ приймав різні значення, а за характером магнітопольових залежностей, ЕМОЕ при скануванні лазерним променем різних ділянок зразка відрізнявся у незначній мірі. На Рис.2 представлено електропольові залежності $\alpha_{\text{ЕМО}}$ при фіксованих значеннях магнітного поля ($H_1=100$ Е, $H_2=125$ Е

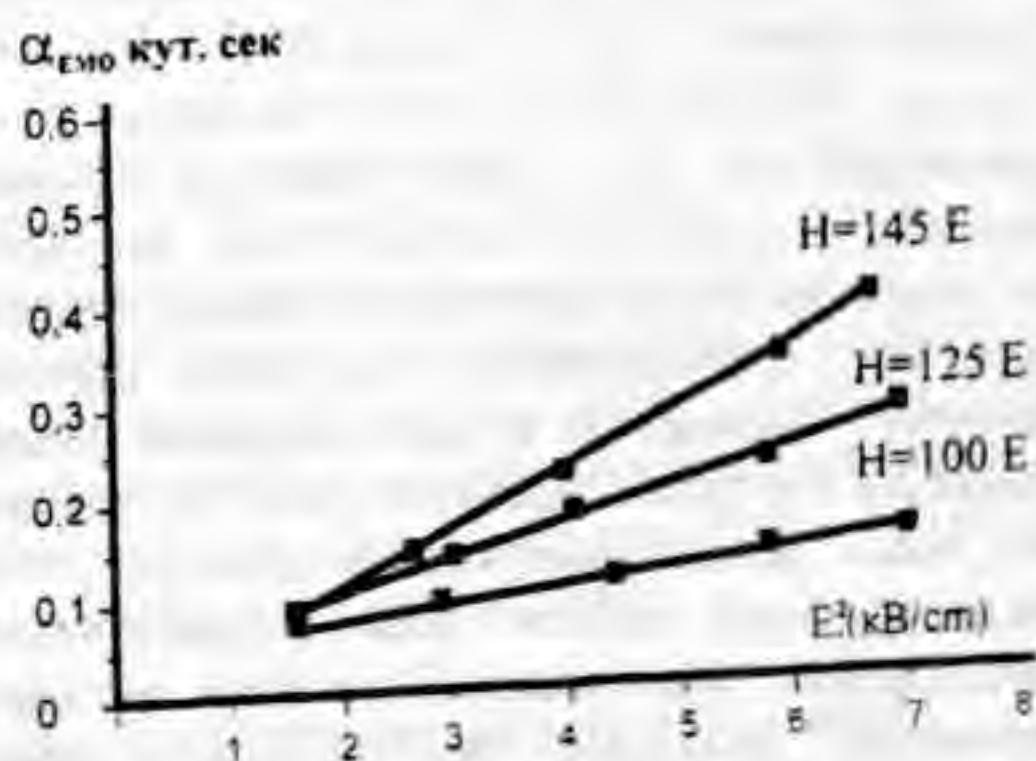


Рис. 2 Електропольові залежності величини $\alpha_{\text{ЕМО}}$, виміряні у геометрії $E \perp k$, $H \parallel k$ для трьох значень магнітного поля: $H_1=100$ Е, $H_2=125$ Е та $H_3=145$ Е.

та $H_3=145$ Е). Як видно з Рис.2, величина зареєстрованого сигналу залежить лінійно від квадрату електричного поля.

Результати вищевказаних експериментів показують, що зовнішнє електричне поле E впливає на магнітооптичний ефект Фарадея у плівках вісмут-замішених феритових гранатів, принаймні на досліджуваних ділянках плівок. Важливо те, що E -поле не змінює величину намагніченості плівки (про що свідчить відсутність ЕМО сигналу для монодоменоного стану плівки в полях $H > 160$ Е), яка головним чином визначає поворот площини поляризації світла. В даній геометрії експерименту $H \parallel k$, $E \perp k$ (в поперечному E -полі), характер впливу E -поля на магнітний стан плівки подібний до наведених в [3] результатів досліджень в геометрії $H \parallel E \parallel k$ (у повздовжньому E -полі). В обох геометріях, максимум ефекту спостерігається в межах граничного значення магнітного поля, перед переходом плівки до монодоменоного стану. Ефект відсутній для однорідно намагніченої плівки в обох конфігураціях експерименту.

Результати представлені на Рис. 1 та Рис. 2 показують очевидність запропонованого в [4] механізму впливу змінного електричного поля E на намагніченість феритових гранатів, як зміна магнітної анізотропії в E полі. Вказана зміна анізотропії проявляються по різному при намагнічуванні зразка в зовнішньому магнітному полі H і залежить від його напрямку. Магнітопольова залежність на Рис. 1 визначається активністю магнітних доменів плівки (як відгук на дію E -поля), яка знаходиться в ненасиченому стані. В геометрії $H \parallel E \parallel k$ (так само як і в геометрії $E \perp k, H \parallel k$), вплив E -поля призводить до малих змін положень доменних меж або ж їх ширини. Ці малі зміни впливають на величину магнітооптичного ефекту Фарадея, через його пропорційність локальному значенню магнітної індукції B в досліджуваній області. Локальне внутрішнє магнітне поле H_{int} залежить від полів розмагнічування. У випадку тонкої багатодоменної плівки, поле розмагнічування неоднорідне, і його локальні значення чутливі до положень доменних меж в околі області зондування.

Таким чином, E -поле практично не впливає на намагніченість плівки, при цьому E -поле може впливати на магнітну анізотропію через зміщення доменних меж чи зміну їх ширини, враховуючи, що розміри доменів зазвичай обернено пропорційні до константи магнітної анізотропії у певній степені [6]. Потрібно зазначити, що енергія доменних меж може бути описана лише в самих загальних рисах, бо вона дуже чутлива до структурних особливостей та дефектів зразка і може суттєво розрізнятись не лише для різних зразків плівок, а й для різних ділянок одного і того ж зразка. Саме цим і пояснюються отримані експериментальні результати, коли на різних ділянках досліджуваних плівок, максимум α_{EMO} приймає різні значення.

Важливим є результат, що у вказаній геометрії експерименту ЕМОЕ зареєстровано лише у вісмут-заміщених плівках ферит гранату і не спостерігається у ЗІГ плівках аналогічної товщини. Це можна пояснити тим, що введення

іонів вісмуту в структуру феритових гранатів, призводить до зміни їх магнітооптичних та магнітних властивостей: зростає намагніченість насичення при кімнатній температурі, зростають константи кубічної магнітної анізотропії та магнітострикції. Циркулярна магнітооптика, а як показали представлені нами результати експериментів і електромагнітооптика феритових гранатів різко підсилюється вже при порівняно малих домішках ізоелектронних іонів вісмуту, які заміщують рідко-земельні іони в решітці феритових гранатів.

Список використаних джерел

1. Кричевцов Б.Б., Писарев Р.В., Селицкий А.Г. Электромагнитооптический эффект в феррите-гранате иттрия // Письма в ЖЭТФ.- 1985.- Т.41, №6.- С.259-261.
2. Кричевцов Б.Б., Павлов В.В., Писарев Р.В. Гигантский линейный магнитоэлектрический эффект в пленках ферритов-гранатов // Письма в ЖЭТФ.- 1989.- Т.49, №8.- С.466-469.
3. Коваленко В.Ф., Короновський В.Є. Особливості електромагнітооптичного ефекту в епітаксialних плівках феритів-гранатів // УФЖ.- 2002.- 47, №10.- С.960-965.
4. V. E. Koronovskyy, S. M. Ryabchenko, and V. F. Kovalenko. Electromagneto-optical effects on local areas of a ferrite-garnet film // Phys. Rev. B 71, 172402 (2005).
5. V. E. Koronovskyy. Influence of an external mechanical strain on the character of the magneto-electric effect in epitaxial films of yttrium iron garnet // Phys. Stat. Sol. (a) 203, No. 8, 2007 (2006).
6. Вонсовский С.В. Магнетизм. – М.: Наука, 1971. – Гл.23.

Надійшла до редакції 4.12.2007

УДК 519.9

Коротков П. А., д. ф.-м. н., професор,
Фелінський Г. С., к. ф.-м. н.

Режим абсолютної прозорості одномодових кварцових волокон при ВКР підсиленні світла

Вимушене комбінаційне розсіяння (ВКР) дозволяє отримати підсилення світла у волокні з будь-яким складом серцевини, а не тільки у спеціально легованих волокнах. На відміну від відомого якісного визначення умов повної прозорості у Er^{3+} легovanому волокні в цій роботі проведено аналіз порогу абсолютної прозорості кварцових волокон при ВКР підсиленні. Показано, що порогову умову можна отримати безпосередньо з стандартних рівнянь для зв'язаних хвиль. Наведено кількісні залежності порогу абсолютної прозорості від довжини хвилі у деяких поширених волокнах.

Ключові слова: комбінаційне розсіяння, волоконна оптика, нелінійна оптика.

*E-mail: felinskvi@yahoo.com

1. Вступ

Можливість повної прозорості середовища для передачі оптичного сигналу була з'ясована у 1990-х зразу ж після розробки і впровадження розподілених підсилювачів світла у волокнах, легованих іонами Er^{3+} . Отримані експериментальні дані та якісний теоретичний аналіз показують [1], що на заваді досягненню ідеального режиму повної прозорості волокон для передачі інформації стоять природні недоліки Er^{3+} легованих волоконних підсилювачів (ЕЛВП). З практичної точки зору серед цих недоліків головними є обмежена смуга робочих довжин хвиль, яка значно вужча за вікно прозорості, та цілком неприйнятна вимога застосування виключно спеціалізованих волокон із заміною існуючих кварцових волокон.

Реальною альтернативою ЕЛВП є підсилення світла при вимушеному комбінаційному розсіянні (ВКР) світла. Свобода від недоліків ЕЛВП гарантована фізикою ВКР, що є ефектом нелінійної оптики, який не зв'язаний з інвертованим станом іонів домішки у волокні. Саме тому накачка для ВКР може мати будь-яку довжину хвилі, і ефект підсилення світла існує у волокні з будь-яким складом серцевини, а не тільки у спеціально легованих волокнах.

P. A. Korotkov, Doct. Sci., Professor,
G. S. Felinskyi*, Ph. D.

Absolute transparency regime of single mode silica fibres at SRS light amplification

Stimulated Raman scattering (SRS) can to give the light amplification in fibres with arbitrary core compound, not only in the special doped fibres. In contrast to known quality determination of full transparency condition in the Er^{3+} doped fiber, the analysis of the absolute transparency threshold of silica fibers is given in present work. It is shown that the threshold condition can be obtained directly from the coupled mode equations. The quantitative data on the absolute transparency threshold as function of wavelength are presented for the widely used optical fibers.

Key Words: Raman scattering, fiber optics, nonlinear optic.

Незважаючи на велику кількість публікацій (див. у [2-4]), присвячених моделюванню процесів у волоконних КР підсилювачах (ВКРП), значна частина спектроскопічних аспектів ВКР підсилення залишається не з'ясованою, і серед них актуальним є питання про абсолютне значення та частотну залежність потужності накачки, при якій забезпечується повна прозорість конкретного типу кварцового волокна.

В даній роботі поріг абсолютної прозорості розглядається у загальнотеоретичному сенсі як перехід речовини від звичайного ламбертівського стану з загасанням оптичної хвилі до підсилення оптичного сигналу при ВКР в одномодових волокнах. Такий підхід дозволяє отримати означену порогову умову безпосередньо з стандартних рівнянь для зв'язаних хвиль. Використовуючи результати моделювання профілю ВКР підсилення [5], розглянуті частотні залежності порогу ВКР для деяких широко застосованих волокон, що дозволяють кількісно визначити умови існування режиму абсолютної прозорості на будь-якій частоті в області стоксового зсуву.

2. ВКР підсилення у кварцових волокнах

До головних переваг ВКР підсилення над ЕЛВП відносять практичну можливість значного розширення смуги робочих довжин хвиль. На рис. 1а зображена смуга ЕЛВП, яка порівнюється зі смугою ВКРП (рис. 1б). Даний ВКРП реалізується у стандартному волокні типу True Wave RS™ з двома джерелами накачки з $\lambda_p=1,45$

де γ_R і g_R відповідають двом взаємозв'язаним означенням для коефіцієнта ВКР підсилення за потужністю, оскільки $\gamma_R = g_R P_p$. Не залежний від потужності накачки коефіцієнт g_R є головним матеріальним параметром нелінійної ВКР взаємодії.

Рівняння (1) часто записують для

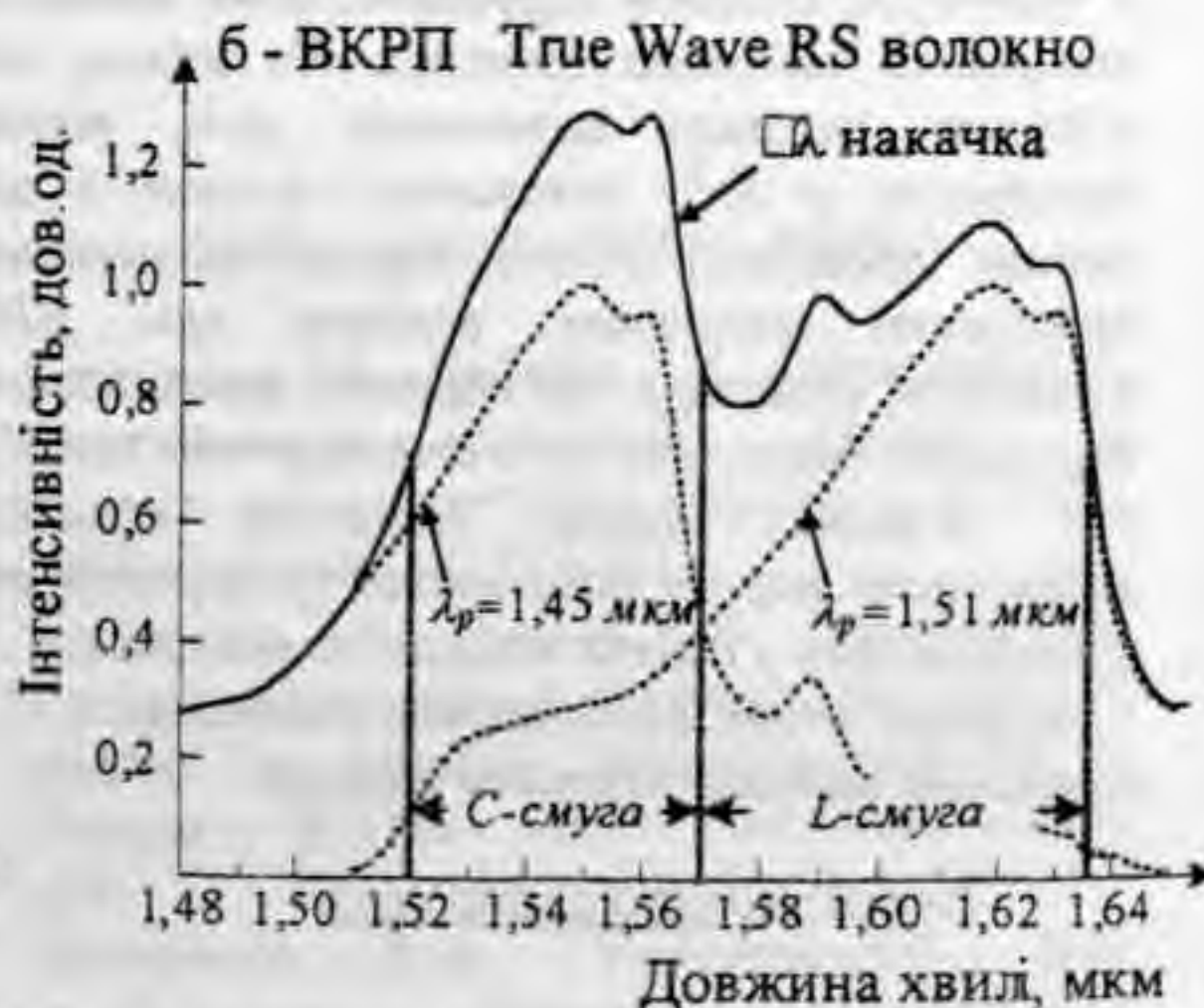
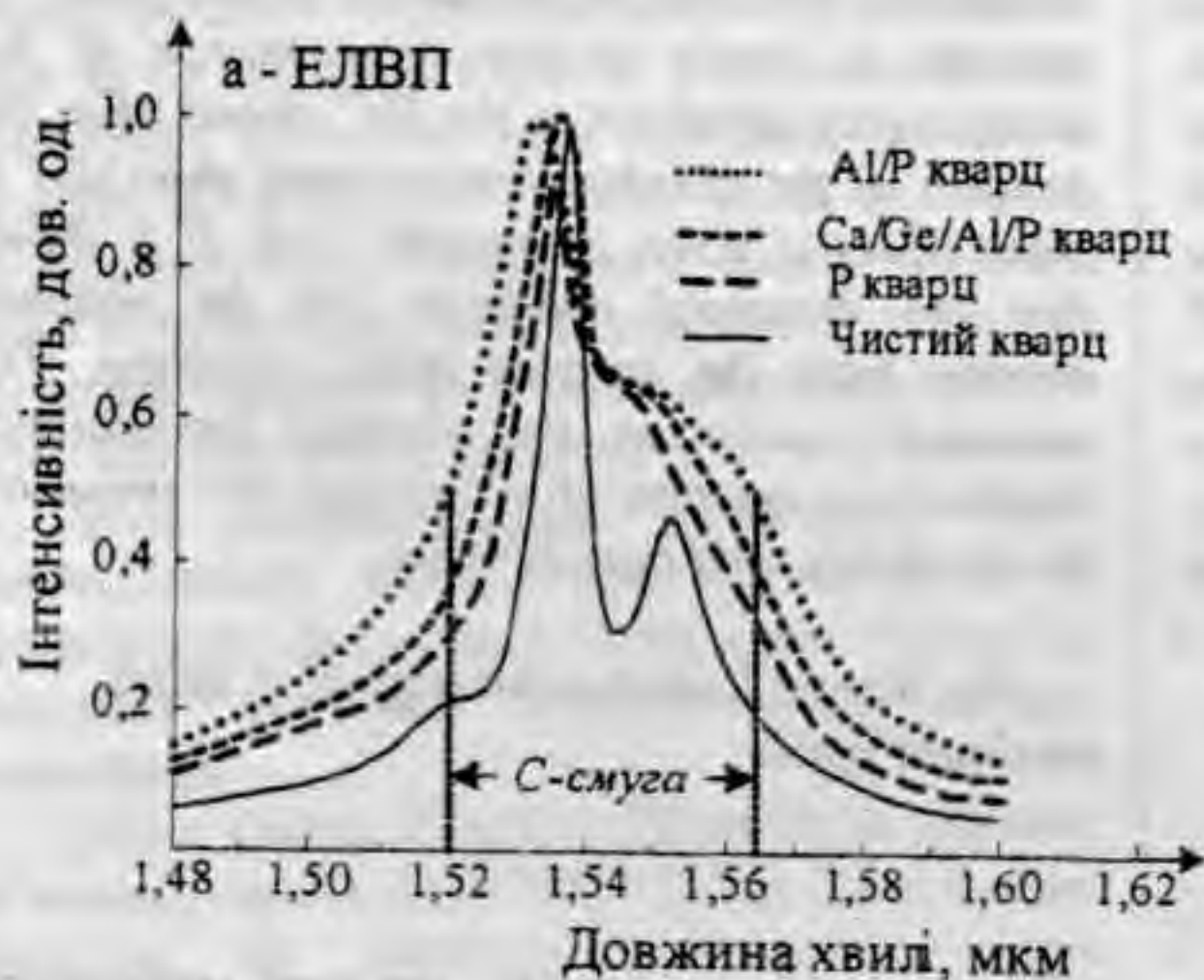


Рис. 1. Смути робочих довжин хвиль для двох типів підсилювачів оптичного випромінювання в одномодових волокнах: а) Er^{3+} легований волоконний підсилювач з додатковими домішками у матриці скла серцевини; б) волоконний КР підсилювач у стандартному волокні типу True Wave RS™ з двома джерелами накачки з $\lambda_p=1,45$ та $1,51$ мкм

та $1,51$ мкм.

Навіть у представленому найпростішому випадку з використанням всього двох джерел накачки звичайну смугу ЕЛВП (С-вікно) у ВКРП вдається подвоїти та перекрити С+L вікна прозорості кварцового волокна. Вводячи додаткові накачки з довжинами хвиль у проміжку між $1,45$ та $1,51$ мкм, смугу ВКР підсилення можна вирівняти до величини, що не перевищує $0,5$ дБ, і задовольнити найжорсткіші потреби практичних пристроїв для підсилення світла. Причому реалізація підсилення не потребує спеціалізованих волокон і може поєднуватися з передачею оптичного сигналу в стандартних кварцових волокнах.

Наростання потужності стоксової хвилі P_s у процесі розповсюдження по одномодовому волокну за рахунок синхронної ВКР взаємодії з накачкою, яка має задану потужність P_p , описується співвідношенням:

інтенсивності хвиль, що взаємодіють. У цьому випадку воно набуває вигляду:

$$\frac{dI_s}{dz} = \tilde{g}_R I_p I_s, \quad (1a)$$

де $\tilde{g}_R$ – коефіцієнт КР підсилення за інтенсивністю, I_p – інтенсивність накачки, I_s – інтенсивність стоксової хвилі.

Коефіцієнт КР підсилення за інтенсивністю $\tilde{g}_R$ та коефіцієнт КР підсилення за потужністю g_R зв'язані між собою як $\tilde{g}_R = g_R / A_{\text{eff}}$, де A_{eff} – ефективна площа серцевини волокна. Оскільки обидва коефіцієнти однозначно зв'язані між собою через постійну для кожного конкретного волокна ефективну площу A_{eff} , то у подальшому ми використовуємо одне позначення g_R для обох коефіцієнтів підсилення. Якщо звертати увагу на розмірність величин, то це не призводить до найменших непорозумінь.

ВКР підсилення оптичної хвилі в одномодовому волокні відбувається наступним чином. Якщо слабе випромінювання (інформаційний сигнал) з частотою ω , входить у волокно разом з накачкою на частоті ω_p , то воно буде підсилюватися стоксовою хвилею КР тоді, коли різниця частот $\omega_p - \omega$ буде знаходитися в межах смуги спектра КР. Нерівномірність посилення, яка повторює профіль $g_R(\omega)$, на практиці коригують за допомогою кількох джерел накачки (див. рис.1б), які дозволяють встановлювати максимум підсилення на потрібну довжину хвилі.

У випадку відсутності вхідного оптичного сигналу випромінювання накачки, потрапляючи на вхід волокна, збуджує спонтанне КР і створює слабкий сигнал, що діє як пробна хвиля, який підсилюється при розповсюдженні по волокну. Оскільки спонтанне КР генерує фонони в межах смуги спектра КР, то підсилюватися будуть всі частотні компоненти, які потрапляють в цю смугу. Безумовно, частотні компоненти поблизу максимуму $g_R(\omega)$ будуть посилюватися у максимально. Частоти коливань є характеристикою матеріалу волокна, в даному випадку плавленого (ізотропного) кварцу, в якому головний максимум стоксової хвилі $\sim 440 \text{ см}^{-1}$ ($\sim 13,2 \text{ ТГц}$). До того ж, як тільки потужність накачки перевищить поріг ВКР, то ці компоненти будуть підсилюватися за експонентою.

При напівкласичному розгляді [2] ВКР можна описувати за допомогою класичних електромагнітних хвиль для оптичного випромінювання, а молекулярну систему розглядають як гармонічний осцилятор під дією зовнішньої сили. Така модель встановлює зв'язок між диференційною поляризованістю $(\partial\alpha_q/\partial q_n)$ молекулярної системи і комплексним значенням нелінійної сприйнятливості $\chi^{(3)}$, тобто величиною, що є загальноприйнятою у нелінійній оптиці:

$$\chi_{ijk}^{(3)}(\omega) = \frac{N}{12\pi\epsilon_0 V} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} \sum_n \frac{\partial\alpha_q}{\partial q_n} \left(\frac{\partial\alpha_q}{\partial q_n} \right)^*, \quad (2)$$

де ω_c – резонансна частота фонуна без впливу загасання, ω – поточна частота фонуна, Γ – постійна загасання, q_i – узагальнена координата локального зсуву, що виникає під впливом залежного від часу електричного поля, m – маса, яка пов'язана з коливанням, N – кількість осциляторів в об'ємі взаємодії V , ϵ_0 – діелектрична проникливість вакууму.

Оскільки оптичні волокна виготовляються з кварцового скла, що є аморфним матеріалом, то тензор четвертого рангу $\chi^{(3)}$ є ізотропним. Таким чином, коефіцієнт КР підсилення на стоксовій частоті $\omega_s = \omega_p - \omega$ можна записати у вигляді [2]:

$$g_R(\omega) = - \frac{3\omega_s}{\epsilon_0 c^2 n_p n_s} \frac{\text{Im}[\chi_{iii}^{(3)}(\omega) + \chi_{sps}^{(3)}(\omega)]}{2A_{eff}} \quad (3)$$

Сприятливості третього порядку можна вважати такими, що не залежать від частоти. Тоді коефіцієнт підсилення g_R , окрім лінійної залежності від частоти стоксового зсуву, має частотну залежність, в основному таку, що визначається уявною частиною нелінійної сприйнятливості $\chi^{(3)}$, тобто резонансним знаменником гармонічного осцилятора фонуна (співвідношення (2)).

В свою чергу, $\chi^{(3)}$ зв'язана з перерізом спонтанного КР, що вимірюється експериментально. Кожне з численних КР активних коливань молекулярної системи волокна вносить свій вклад у формування спектра КР, який має достатньо складний вигляд [6]. Відповідно профіль ВКР підсилення має вигляд неоднорідного континуума. Для волокна типу TrueWave RSTM це ілюструє Рис.1б.

Спектр КР залежить від складу та домішок у серцевині волокна. Тому максимум КР підсилення g_{Rmax} може суттєво змінювати свою амплітуду і менш помітним чином своє частотне положення. Загальною особливістю спектрів КР кварцових волокон є те, що $g_R(\omega)$ має широкую півширину смуги $\sim 5 \text{ ТГц}$, а вся смуга підсилення простягається до частот $\sim 40 \text{ ТГц}$. Завдяки цьому КР підсилення в кварцових волокнах є безперервним в широкому діапазоні частот, що дозволяє використовувати оптичні волокна як активне середовище для підсилювачів з надзвичайно широкою смугою робочих частот.

КР спектр не можна точно описати за допомогою простої функції з одним максимумом, апроксимація трикутником дає надто грубе наближення, а наближення лише однією функцією осцилятора або гауссовою функцією у ряді випадків може виявитися незадовільним [7], наприклад для обчислення коефіцієнтів зв'язаних рівнянь при їх числовому розв'язку. Вирішення цієї задачі потребує застосування декомпозиції КР контуру за допомогою кількох коливальних мод.

3. Нелінійна апроксимація спектрів ВКР підсилення

Кожна коливна мода у плавленому кварці є надзвичайно широкою і може мати гауссовий або осциляторний ("Лорентцевого" типу) профіль. Така спектроскопічна класифікація лежить в основі декомпозиції та інтерпретації експериментального спектра КР підсилення.

Модельний аналіз спектра КР за допомогою гауссових профілів лінії заснований на наступному виразі:

$$g_R(\omega) \sim \sum_{i=1}^{N_m} A_i \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_{v,i})^2}{\Gamma_i^2}\right], \quad (4)$$

де N_m – кількість мод, що використовуються для декомпозиції, які вибираються, виходячи із

максимуму для i -ого гауссового профілю, яку звичайно використовують у спектроскопії. Величини амплітуд A_i спільно з $\omega_{v,i}$ та Γ_i ми використаємо як параметри для нелінійної апроксимації.

В основі обґрунтування фізичного змісту гауссової декомпозиції спектра КР підсилення лежить аморфність плавленого кварцу. Саме завдяки аморфності кожний загасаючий осцилятор з резонансною частотою вигляду (2) має довільну орієнтацію відносно своїх сусідів, які вносять випадкові збурення у частоту цього осцилятора. Тому суперпозиція великої кількості вузьких спектральних максимумів з нормальним розподілом випадкових значень частот для цих осциляторів формує гауссовий профіль.

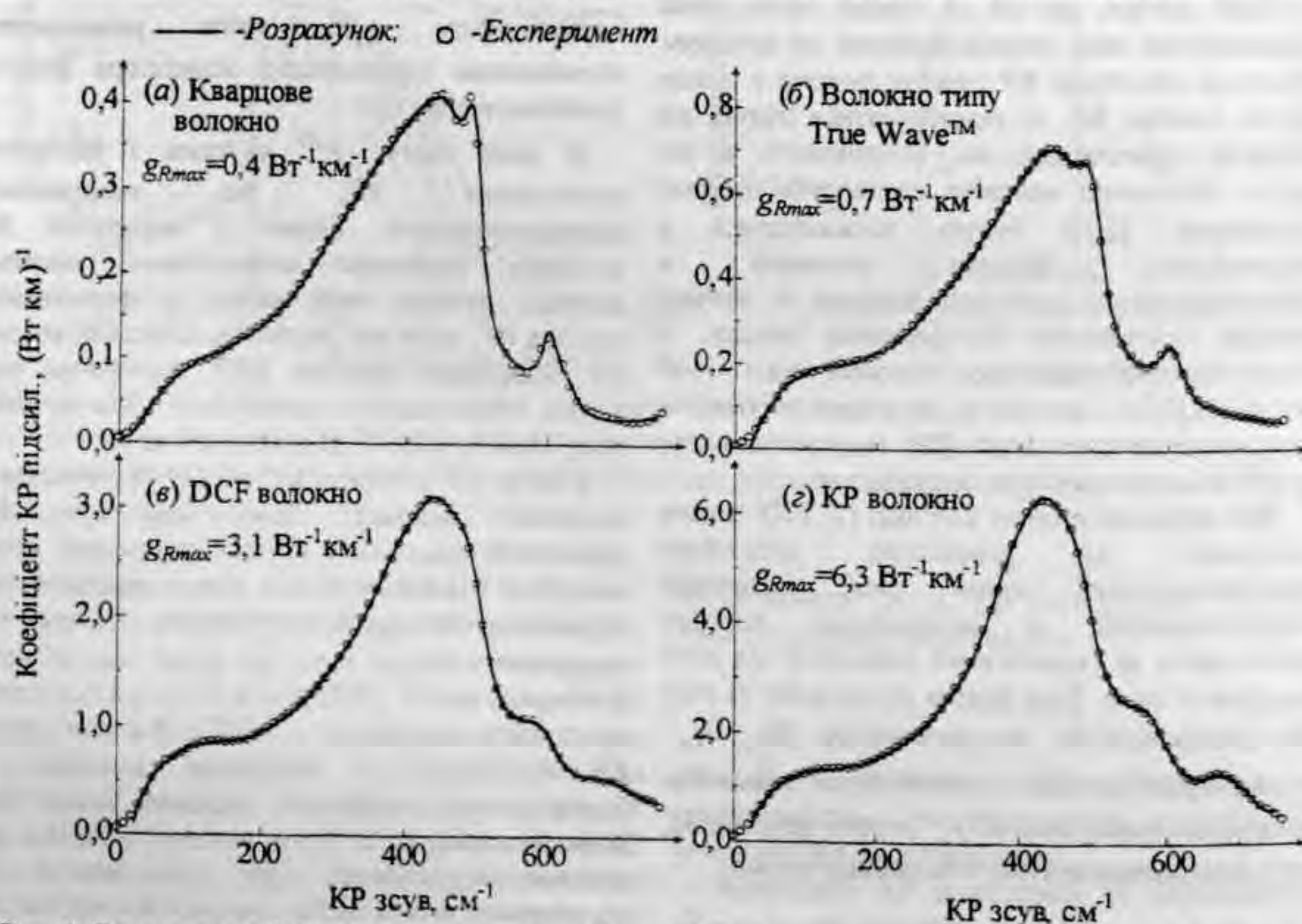


Рис. 2. Результат нелінійної апроксимації профілю ВКР підсилення у волокнах на основі плавленого кварцу: (а)- волокно з чистого кварцу; (б) – волокно типу True Wave RSTM; (в)– волокно з компенсованою дисперсією (DCF); (г)– КР волокно із вмістом ~20% GeO₂. Експериментальні дані з роботи [6].

спектрального діапазону, підлягаючого до аналізу ($N_m=10$ в [8] для області 0–800 cm^{-1} або $N_m=13$ в для області 0–1500 cm^{-1}), $\omega_{v,i}$ – центральна частота i -ого гауссового профілю, параметр $\Gamma_i = FWHM_i / (2\sqrt{\ln 2}) \approx 0.6 \cdot FWHM_i$, де $FWHM_i$ – повна ширина на половині від

Слід відзначити, що доцільність процедури декомпозиції має два аспекти. По-перше, це спектроскопічний аспект. Декомпозицію можна розглядати як можливий метод поділу щільності станів на цілком визначені внески. Смути КР з частотами, меншими за 1055 або 1180 cm^{-1} , відносяться [8], в основному, до однофонових

фундаментальних коливань, а область багато-фононних обертонів і складових тонів простягається, починаючи від лінії з частотою або 1180 см^{-1} , або 1460 см^{-1} до частоти 2600 см^{-1} і вище. Залишається не цілком ясним чи є лінія 1180 см^{-1} одно- або двофононним станом.

По-друге, є прикладний аспект декомпозиції, при якому за мету ставиться побудова, по можливості найбільш простої функції $g_R(\omega)$, яка б відповідала експериментальному профілю КР підсилення з максимальною точністю. Оскільки досягнення найкращої відповідності ставилось нами як основна задача декомпозиції, то у даній роботі ми застосували комп'ютерну процедуру нелінійної апроксимації за методом Левенберга-Марквардта. Цей метод використовує алгоритм пошуку мінімуму суми найменших квадратів

експериментальних інтегральних інтенсивностей відрізняється від одиниці менш, ніж на 0,5% для області від 0 до 700 см^{-1} .

Застосування нелінійної апроксимації дає достатньо високу точність при відносно простих аналітичних виразах для профілю КР. У даному випадку аналітичні вирази є лінійною комбінацією з 10 функцій Гаусса вигляду (4) від однієї незалежної змінної ω та набором постійних параметрів. Ці параметри представлені у таблиці 1 для декомпозиції кожного з експериментальних профілів КР підсилення, показаних на рис.2.

Аналітичний вираз частотної залежності для кожного профілю, що показаний на рис. 2, отримуємо шляхом прямої підстановки параметрів з таблиці 1 до співвідношення (4). На

Таблиця 1 Вихідні параметри гаусової апроксимації за методом Левенберга-Марквардта

№ моди	Кварцове волокно $g_{Rmax}=0,4 \text{ (Вт·км)}^{-1}$			True Wave RS TM $g_{Rmax}=0,74 \text{ (Вт·км)}^{-1}$			DCF волокно $g_{Rmax}=3,1 \text{ (Вт·км)}^{-1}$			КР волокно $g_{Rmax}=6,3 \text{ (Вт·км)}^{-1}$		
	A_i	ω_i [см^{-1}]	Γ_i [см^{-1}]	A_i	ω_i [см^{-1}]	Γ_i [см^{-1}]	A_i	ω_i [см^{-1}]	Γ_i [см^{-1}]	A_i	ω_i [см^{-1}]	Γ_i [см^{-1}]
1	0,11	77,3	48,8	0,11	72,5	41,2	0,06	56,7	28,9	0,06	55,6	33,8
2	0,23	162,8	81,4	0,19	133,4	70,4	0,16	103,4	61,5	0,15	104,7	65,6
3	0,44	295,1	89,9	0,45	298,5	123,2	0,30	235,6	124,6	0,20	217,2	93,4
4	0,75	418,4	90,3	0,56	418,5	85,7	0,65	401,3	106,3	0,42	355,1	94,3
5	0,25	465,0	36,2	0,28	465,3	47,5	0,42	464,2	70,6	0,57	427,8	62,5
6	0,35	494,7	13,9	0,24	496,9	19,1	0,09	489,5	22,0	0,22	477,0	36,0
7	0,17	603,8	24,7	0,13	603,3	21,3	0,16	584,9	39,4	-0,21	628,6	47,0
8	0,14	542,0	190,5	0,25	544,2	146,3	0,18	708,8	206,4	0,44	601,7	172,1
9	0,13	809,6	50,6	-0,63	804,8	57,5	1,22	805,1	45,2	1,11	808,6	68,3
10	-0,01	858,5	30,3	0,05	858,8	29,9	0,11	858,8	29,9	0,06	858,8	29,9

методом якнайшвидшого спуску до квадратичної мінімізації і він дозволяє одержати дуже гарні практичні результати при апроксимації спектра КР підсилення.

Після накладання розрахункових кривих на відповідний експериментальний профіль КР підсилення обидві криві виглядають як одна крива у будь-якому масштабі, прийнятному для відображення. На рис.4 зображені профілі КР підсилення для чотирьох типів волокон, що отримані шляхом апроксимації (суцільна лінія) в точках дискретизації експериментального спектра КР підсилення (заштриховані точки). Відношення розрахункових та

практиці реальний розподіл домішок у різних волокнах може давати деякі зміни інтенсивності слабких додаткових мод спектра, що може змінювати профіль КР підсилення та відповідно призводить до зміни величин параметрів апроксимації для функції $g_R(\omega)$. Однак більшість одномодових волокон у плавленому кварці має близькі параметри частот та напівширини ліній, тому повторне застосування процедури апроксимації не викликає труднощів при одержанні нового набору оптимальних параметрів.

4. Результати моделювання та обговорення

Для розрахунку порогу ВКР розглянемо взаємодію між хвилями Стокса і накачки. У випадку безперервної накачки ця взаємодія описується відомою системою рівнянь, яку можна представити у вигляді [5, 7]:

$$\frac{dI_s(z, \omega)}{dz} = g_R(\omega) I_p(z) I_s(z, \omega) - \alpha_s I_s(z, \omega). \quad (5)$$

$$\frac{dI_p(z)}{dz} = \frac{\omega_p}{\omega_s} g_R(\omega) I_p(z) I_s(z, \omega) - \alpha_p I_p(z), \quad (6)$$

де α_s і α_p – коефіцієнти поглинання, тобто втрати на частоті Стоксової хвилі та накачки. Зауважимо, що рівняння (5) і (6) описують зміну інтенсивності Стоксової хвилі та хвилі накачки у квазінеперервному наближенні та при повільній зміні амплітуд хвиль у процесі їх розповсюдження вздовж волокна, тобто за координатою z . Поточна частота взаємодіючих хвиль входить до рівнянь (5) і (6) як параметр, а відносно частотної залежності інших величин, які містять ці рівняння, можна застосувати наступні наближення. Ширину лінії накачки безумовно можна вважати нескінченно вузькою у порівнянні зі смугою стоксового випромінювання, тобто накачка залишається локалізованою на своїй частоті ω_p , а

$I_p(z, \omega) = I_p(z, \omega)|_{\omega=\omega_p} = I_p(z)$ і не залежить від частоти у будь-якій точці z вздовж волокна. Фактично рівняння (5) та (6) описують КР взаємодію монохроматичних хвиль накачки і стоксового випромінювання. Природно, що ступінь зв'язку хвиль для будь-якої заданої частоти ω стоксової хвилі однозначно визначається значеннями функцій $g_R(\omega)$ і $\alpha(\omega)$. Залежність $g_R(\omega)$ показано на рис. 2 для відповідних типів волокна, а залежність $\alpha(\omega)$, як правило, є достатньо слабкою. Тому коефіцієнти поглинання α_s та α_p можна вважати постійними і таким, що не залежать від частоти в рівняннях (5) і (6).

Не вдаючись до розв'язку рівнянь (5) і (6) для зв'язаних хвиль у процесі ВКР, можна не тільки визначити поріг абсолютної прозорості волокна, але і зробити кількісні оцінки щодо його частотної залежності, ґрунтуючись тільки на фундаментальних параметрах волоконного середовища, тобто $g_R(\omega)$ і $\alpha(\omega)$.

Дійсно, безпосередньо з рівняння (5) випливає, що залежно від потужності накачки

значення dI_s/dz може змінювати свій знак. За відсутності накачки або за малих її потужностях значення $dI_s/dz < 0$, що відповідає загасанню в процесі поширення стоксової хвилі за рахунок власних втрат у волокні. Зростання інтенсивності накачки I_p викликає ВКР підсилення стоксової хвилі, котре описується добутком $g_R I_p$, а його числове значення може перевищити власні втрати. В цьому випадку волокно перетворюється на підсилювальне середовище, оскільки $dI_s/dz > 0$, що відповідає наростанню стоксової хвилі при її розповсюдженні у волокні. Зокрема, у випадку $dI_s/dz = 0$ настає режим абсолютної прозорості волокна для стоксової хвилі, коли її інтенсивність залишається незмінною при поширенні вздовж волокна.

Умова абсолютної прозорості волокна за своїм фізичним змістом відповідає лазерному порогу для процесу ВКР. Співвідношення $dI_s/dz \geq 0$ спільно з рівнянням (5) приводить до граничного співвідношення вигляду $P_p(\omega) \geq \alpha_s A_{eff} / g_R(\omega)$, яке, в свою чергу, дозволяє записати умову лазерного порогу ВКР для монохроматичної стоксової хвилі:

$$P_p^{th}(\omega) = \frac{\alpha_s A_{eff}}{g_R(\omega)}. \quad (7)$$

Співвідношення (7) кількісно описує умову переходу середовища від природнього стану з загасанням стоксової хвилі до стану, в якому КР зміщена хвиля підсилюється за рахунок накачки. Оскільки функція $g_R(\omega)$ вимірюється експериментально і якщо її вважати відомою, то можна безпосередньо розрахувати граничну потужність джерела накачки, яка дозволяє отримати підсилення монохроматичної стоксової хвилі з довільною частотою в межах спектра КР. Слід зауважити, що порогова умова (7) містить тільки параметри волоконного середовища, і тому визначення порогу не залежить від умов спостереження, зокрема від довжини волокна.

Таким чином, за експериментальними даними вимірювань профілю коефіцієнта підсилення ВКР $g(\omega)$ і за відомим значенням загасання α у волокні безпосередньо визначається залежність границі повної прозорості волокна або лазерного порогу ВКР від частоти стоксового зсуву (або довжини хвилі) для довільної довжини хвилі джерела накачування. На рис. 3 зображені залежності порога абсолютної прозорості при ВКР накачуванні деяких поширених волокон джерелом з $\lambda_p = 1,45$ мкм від довжини хвилі в стоксовій області. Експериментальні профілі $g(\omega)$

і пікові значення коефіцієнтів КР підсилення g_{max} узяті з роботи [6] і становлять відповідно: $g_{max}=6,1$ (Вт·км)⁻¹ для спеціалізованого КР волокна; $g_{max}=0,4$ (Вт·км)⁻¹ – для стандартного волокна на основі плавненого кварцу; $g_{max}=0,74$ (Вт·км)⁻¹ – для магістрального волокна типу True Wave RS™ з мінімізованою дисперсією.

- $P_p = 18,0$ дБм (63 мВт) – для волокна типу True Wave RS™;
- $P_p = 20,7$ дБм (117,5 мВт) – для стандартного волокна на основі плавненого кварцу;

При розрахунках порогових умов, представлених на рис. 3, вважалося, що власні втрати на стоксовій частоті становлять $\alpha = 0,2$

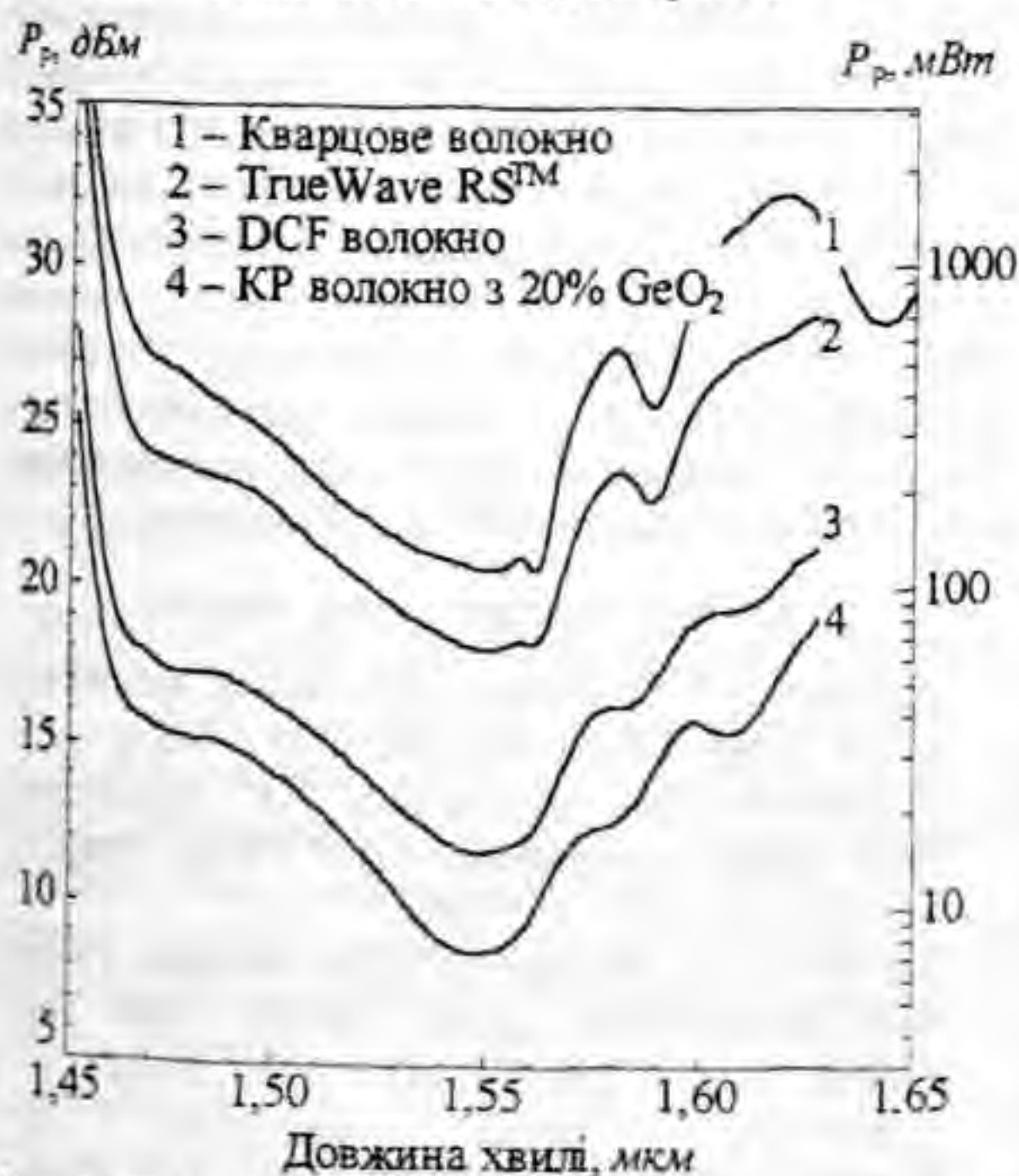


Рис.3 Границі порогу абсолютної прозорості при ВКР помпуванні з $\lambda_p = 1,45$ мкм для поширених волокон: 1) волокно з чистого плавненого кварцу; 2) волокно True Wave RS™; 3) DCF волокно; 4) КР волокно з підвищеним вмістом

Для КР волокна профіль $g(\omega)$ задовільно описується при використанні спрощеної лоренцової апроксимації, тоді як для інших волокон необхідно використовувати описану дещо складнішу, але більш точну модель багатомодової декомпозиції ВКР спектра з використанням гауссової апроксимації за допомогою функцій виду. Для зручності абсолютні значення оптичної потужності на рис. 3 наведено в одиницях дБм (децибелі стосовно 1 мВт – на лівій вертикальній осі) і в міліватах (на правій вертикальній осі). Як видно на рис. 3, режим посилення монохроматичного стоксового сигналу з $\lambda_s = 1,55$ мкм настає при потужності накачування P_p ($\lambda_p = 1,45$ мкм):

- $P_p = 8,9$ дБм (7,8 мВт) – для спеціалізованого КР волокна;
- $P_p = 11,7$ дБм (14,8 мВт) – для волокна зі зміненою дисперсією (DCF-волокно);

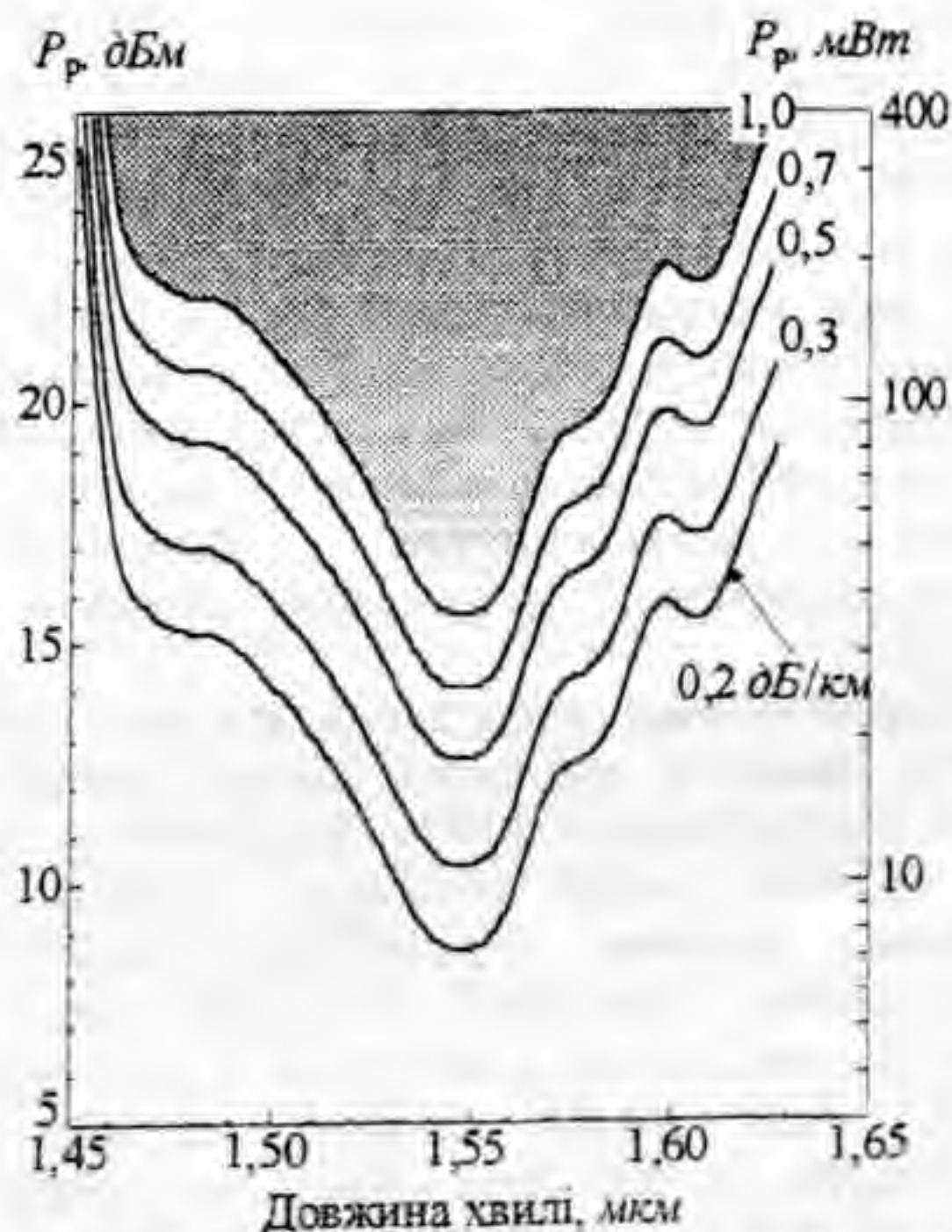


Рис.4 Залежність порогу ВКР ($\lambda_p = 1,45$ мкм) від довжини хвилі для КР волокна з різними втратами. У тонованій області ВКР підсилення реалізується навіть при $\alpha = 1$ дБ/км, а у світлій області під кривими стоксова хвиля загасає.

дБ/км, при яких КР волокно може стати активним підсилювальним середовищем при потужності накачування, що менша за 10 мВт.

Слід зазначити, що при виготовленні КР волокна значне підвищення КР підсилення цього волокна досягається за рахунок підвищеного вмісту GeO_2 (типово ~20%), однак цей процес, на жаль, супроводжується помітним підвищенням власних втрат у волокні, із мінімальними значеннями $\alpha \sim 0,3-1,0$ дБ/км. Тому на рис. 4 наведено залежності лазерного порогу ВКР ($\lambda_p = 1,45$ мкм) для КР волокна з різними значеннями власних втрат, які змінюються в діапазоні від 0,2 до 1,0 дБ/км. При зростанні власних втрат від 0,2 до 1,0 дБ/км гранична потужність для монохроматичного стоксового сигналу на $\lambda_s = 1,55$ мкм природньо зростає приблизно від 9 мВт до

40 мВт. При допорогових значеннях потужності накачування, у світлій області під кривими на рис.4, стоксові хвилі мають загасання, а в тонованій області ВКР підсилення реалізується у світлій області.

Представлені розрахунки показують, що незалежно від реальних втрат у волокні, якщо потужність накачування досягає декількох сотень мВт, то така накачка переводить волокно через поріг абсолютної прозорості. Волокно перетворюється на активне підсилювальне середовище для монохроматичного стоксового сигналу в досить широкому спектральному діапазоні. У цьому випадку при накачуванні з $\lambda_p = 1,45$ мкм посилення оптичного сигналу, а також лазерну генерацію можна одержати в діапазоні приблизно від 1,5 до 1,6 мкм, тобто у всій смузі максимальної прозорості волокон. Ці теоретичні оцінки підтверджуються численними експериментальними результатами останнього часу [2-7].

Запропонований підхід досить корисний для аналізу динаміки підсилення монохроматичної хвилі в розподіленому ВКРП. Застосування (7), що визначає режим абсолютної прозорості волокна, дозволяє безпосередньо оцінити підсилювальні властивості будь-якої заданої точки волокна для довільної частоти ω стоксової хвилі, якщо відомо значення потужності накачування в цій точці. Крім того аналіз допускає безпосереднє узагальнення на випадок довільної кількості оптичних сигналів і накачок.

Висновки

Таким чином, досліджені умови режиму абсолютної прозорості кварцових волокон при ВКР взаємодії монохроматичних хвиль - накачування й стоксового випромінювання. Цей режим виникає під впливом накачування, що переводить серцевину волокна у підсилююче середовище для монохроматичної оптичної хвилі. При такому визначенні лазерний поріг виражається тільки через матеріальні параметри волокна й не залежить від умов спостереження, зокрема, від довжини волокна. Безпосередньо зі стандартних рівнянь для зв'язаних хвиль при взаємодії хвилі накачування й стоксового випромінювання отримано простий аналітичний вираз для визначення ВКР лазерного порогу. Це співвідношення застосоване для обчислень порогових умов повної прозорості та лазерної генерації монохроматичної стоксової хвилі з

довільною частотою у чотирьох типах поширених волокон.

Зображено залежності лазерного порога від частоти для широко використовуваних волокон. Продемонстрована можливість кількісного розрахунку значень лазерного порогу для довільної частоти з області стоксового зсуву й наведено числові значення граничних потужностей накачування. Запропонований підхід також виявляється корисним для аналізу динаміки посилення монохроматичних хвиль у розподілених ВКР підсилювачах. Відзначимо, що представлений аналіз припускає пряме узагальнення на випадок присутності множини оптичних сигналів і кількох довжин хвиль накачки з можливістю подальшого застосування при розробці реальних ВКР підсилювачів.

Список використаних джерел

1. Agrawal G.P. Nonlinear Fiber Optics, second ed. – San Diego, CA: Academic, 1995. – 592 p.
2. Коротков П.А., Фелінський Г.С. Волоконні ВКР лазери неперервної дії // УФЖ. Огляди. – 2007. – 4, № 1. – С. 36-60.
3. Dianov E.M., Prokhorov A.M. Medium-Power CW Raman Fiber Lasers // IEEE J. Sel. Top. Quant. Electr. – 2000. – 6, N6 – P. 1022-1028.
4. Islam M.N. Raman amplifiers for telecommunications // IEEE J. Sel. Top. Quan. Electr. – 2002. – 8, N 3 – P. 548-559.
5. Коротков П.А., Фелінський Г.С. Особливості виникнення ВКР-підсилення монохроматичного світла в кварцових одномодових волокнах // УФЖ – 2007. – 52, №4 – С.335-345.
6. Bromage J., Rottwitt K., Lines M.E. A method to predict the Raman gain spectra of germanosilicate fibers with arbitrary index profiles // IEEE Photon. Technol. Lett. – 2002. – 14, N 1 – P. 24-26.
7. Felinskyi G.S., Korotkov P.A. Simulation of multiwave pumped fiber Raman amplifiers // Semicond. Phys. Quant. Electr. & Optoelect. – 2006. – 9, N 3 – P. 83-93.
8. Walrafen G. E., Krishnan P. N.. Model analysis of the Raman spectrum from fused silica optical fibers // Appl. Opt. – 1982. – 21, N3 – P. 359-360.

Надійшла до редколегії 29.11.07

УДК 519.9

Курашов В.Н., канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Пилиповський О.В., студент.

Трійкова логіка та квантові обчислення

В статті запропоновано систему трійкової логіки для виконання логічних і арифметичних операцій на квантовому комп'ютері. Розглянуто можливе трактування трьох логічних станів та принцип їх реалізації на основі ядерного магнітного резонансу в Кремнії, легovanому Азотом або Літієм.

Ключові слова: трійкова логіка, трійкові логічні елементи, квантові обчислення, ядерний магнітний резонанс.

*E-mail: vnk@univ.kiev.ua engraver@univ.kiev.ua

Вступ

Сучасні методи виготовлення процесорних систем наближаються до своєї фізичної межі розвитку. Все складніше стає збільшувати тактову частоту, квантові ефекти починають грати помітну роль у функціонуванні мікросхем. Тому з'являється потреба у пошуку альтернативних технологій. Найбільш універсальним наступником сучасних цифрових процесорів вважається квантовий комп'ютер (КК). Завдяки законам квантової механіки на ньому задачі експоненціальної складності для звичайного комп'ютера можуть бути зведені до задач поліноміальної складності (як приклад: алгоритм факторизації числа [1]). Вже в лютому 2007 року компанія D-Wave запропонувала його діючу модель [2].

У проблемі нарощування розрахункових потужностей виникає питання доцільності використання двійкової системи числення. Справді, за теоремою, фон Неймана число n можна представити мінімальним набором символів у системі числення з основою e , до якого найближчою є не двійкова, а трійкова система числення. Крім того, її застосування дозволить економити пам'ять, а разом з нею, кошти, витрачені на обчислювальну машину. З історичних причин поширеною є техніка, що використовує двійкові обчислення. З іншого боку, не виникає суперечок щодо значення третього стану у логіці. Певний аналог трійкової логіки використовується у програмуванні цифрових мікросистем: так званий високоімпедансний стан (у схемі з виходом типу 3C). У післявоєнні роки проводилися широкі

Kurashov V.N, PhD, associated professor,
Pilipovsky O.V., student.

Ternary logic and quantum calculations

We propose ternary logic system for logic and arithmetical operations on quantum computer. It is considered possible treatment of three logic states and its realization principle in terms of nuclear magnetic resonance in Silicon, alloyed Nitrogen or Lithium.

Key Words: ternary logic, ternary logic elements, quantum calculations, nuclear magnetic resonance.

дослідження в галузі побудови трійкових автоматів. У СРСР 1961 року була побудована перша у світі трійкова обчислювальна машина (ОМ) «Сетунь» під керівництвом Брусенцова. Вона виконувала кілька сот операцій на секунду і займала площу 25-30 м².

Нові можливості використання трійкових обчислень з'являються у КК. В природі існує багато систем, на яких у перспективі можливо реалізувати найрізноманітніші квантові обчислення. Використання трійкової системи числення зможе значно оптимізувати розрахунки в таких системах.

Зауважимо, що КК може використовувати лише оборотні дії через фундаментальні принципи квантової механіки. Дослідження обґрунтовують [3], що вимога оборотності задовольнятиметься, якщо КК працюватиме лише у двійковій або трійковій системах числення. Це задовольняє оптимальному випадку вищезгаданої теореми фон Неймана. Найбільше суперечностей викликає реалізація таких обчислень на трійковій логіці в КК. В цій статті ми розглядаємо одне з можливих трактувань обчислень в трійковій системі числення та принцип їх реалізації на основі ядерного магнітного резонансу в легovanому кремнії.

Трійкова логіка

Існує багато міркувань щодо реалізації трійкової логіки та розрахунків за її допомогою. Пітер Лабланс [4] запропонував схему дії TER для використання при передачі інформації по цифровим лініям, вигляд якої наведений у таблиці 1. В обчислювальній машині «Сетунь» використовувалася трійка знакових елементів

TER	0	1	2
0	1	0	2
1	0	2	1
2	2	1	0

Таблиця 1

$\{-1, 0, 1\}$ для спрощення операцій зі знаковими числами. Дж. Апасі [5] запропонував модель трійкової логіки, де елемент «1» означає TRUE, «2» – FALSE, а «0» займає проміжне значення між ними.

Розглянемо зв'язок між трійковою логікою та арифметикою. Кушнеров [6] зазначає, що трійкова логіка не визначає трійкової системи числення і наводить багато прикладів трійкових систем числення, не пов'язаних між собою. Тому, оскільки ОМ повинна виконувати арифметичні та логічні операції, останні можна визначити через перші. Проте, це не є єдино можливим шляхом, а лише намаганням уникнути суперечностей щодо розуміння і використання третього стану. Трійкова ОМ повинна виконувати наступні операції при обчисленнях: перенос при додаванні, порівняння, кон'юнкцію та диз'юнкцію. При цьому ці операції повинні асоціюватися зі своїми аналогами у двійковій системі числення (двійковій логіці), оскільки КК обов'язково має класичний цифровий модуль (двійковий комп'ютер), який виконує управління ним.

Розпишемо трійкові цифри у їх двійковому

Таблиця 2

a_3	a_2	$NOT(a_2)$	$NOT(a_3)$	$(2a_3) \bmod 3$
0	00	11=10+01	10=1+2	0
1	01	10	2	2
2	10	01	1	1

записі та застосуємо двійковий NOT до них (Таблиця 2) (тут індекс знизу означає систему числення):

Як видно з таблиці, трійкову операцію NOT можна означити формулою з останнього стовпчика як

$$NOT(a_3) = (2a_3) \bmod 3, \quad (1)$$

беручи останній розряд числа з четвертого стовпчика таблиці. При цьому зберігатиметься еквівалентність однойменних операцій у двійковій та трійковій системах числення, що важливо при обміні інформацією між квантовим та класичним модулями ОМ. В такому розумінні операція заперечення співпадає із запропонованою в [5].

Для реалізації суматора необхідна взаємодія кількох елементів пам'яті, операцію над якими

виконує певний елемент ($CONTROLLED NOT$, або скорочено $CNOT$ за Фейнманом [7]) з кількома вхідними та вихідними лініями. Він повинен переводити пару чисел (a, b) за законом

$$(a, b) \rightarrow (a, (a+b) \bmod 3). \quad (2)$$

Тоді дію трійкове $CNOT$ можна розуміти як додавання по модулю 3 числа на лінії самого до себе. У моделюванні КК задля забезпечення оборотності необхідно збереження значення контролюючої лінії a . Для випадку двійкової логіки приходимо до класичної операції заперечення, якщо брати остачу від ділення на основу системи числення 2.

Для арифметичних обчислень необхідно мати операцію, що дає перенос одиниці при додаванні двох однорозрядних чисел. Для збереження оборотності вона потребуватиме на виході 3 лінії, 2 з яких не змінюватимуть значення, а в третій отримуємо результат. Оскільки перенос може здійснитись за наявності на контролюючих лініях хоча б одного трійкового стану «2», можна вважати, що цей перенос здійснює операція OR , тобто на виході отримується ненульовий результат («1»), якщо на контролюючих немає невизначеності (трійкового нульового стану «0») і є хоч би один найвищий стан («2»). Відповідно до цього можна означити трійкову операцію AND , яка дає на виході ненульовий результат («1»), якщо на контролюючих лініях присутні лише максимальні значення. Таким словесним описам відповідають двійкові логічні операції кон'юнкції та диз'юнкції, якщо не розрізняти невизначеність і «хибність». Означене вище можна подати у вигляді Таблиці 3. На вхід логічних елементів, наведених у ній, подаються змінні, зазначені у дужках, і на виході отримуються пари, трійки або одне число в залежності від вимог оборотності елемента. Розглянемо їх оборотність. NOT обертається будь-якою непарною кількістю дій самого себе, а інші операції необхідно виконати три рази для повернення на лінії початкових значень, що впливає з повторюваності остач.

Щоб не розглядати трійкові числа у значеннях «правда», «хибність» чи щось інше, можна ввести поняття пріоритетності стану. Якщо ми маємо сукупність значень $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, то значення k вважатимемо таким, що має k -й пріоритет і воно є більш пріоритетним, ніж m , якщо $k > m$. Тоді логічні операції можна означити з точки зору пріоритетів значень, що подаються на вхід логічних елементів. Логічні елементи розрізняють вхідні елементи за їх пріоритетністю: дія не буде виконана, якщо на

Таблиця 3

a	b	c	$NOT(a)$	$CNOT(a,b)$	$OR(a,b,c)$	$AND(a,b,c)$
0	0	0	0	(0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
		1			(0, 0, 1)	(0, 0, 1)
		2			(0, 0, 2)	(0, 0, 2)
	1	0		(0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)
		1			(0, 1, 1)	(0, 1, 1)
		2			(0, 1, 2)	(0, 1, 2)
	2	0		(0, 2)	(0, 2, 0)	(0, 2, 0)
		1			(0, 2, 1)	(0, 2, 1)
		2			(0, 2, 2)	(0, 2, 2)
1	0	0	2	(1, 1)	(1, 0, 2)	(1, 0, 2)
		1			(1, 0, 1)	(1, 0, 1)
		2			(1, 0, 2)	(1, 0, 2)
	1	0		(1, 2)	(1, 1, 0)	(1, 1, 0)
		1			(1, 1, 1)	(1, 1, 1)
		2			(1, 1, 2)	(1, 1, 2)
	2	0		(1, 0)	(1, 2, 1)	(1, 2, 0)
		1			(1, 2, 2)	(1, 2, 1)
		2			(1, 2, 0)	(1, 2, 2)
2	0	0	1	(2, 2)	(2, 0, 2)	(2, 0, 2)
		1			(2, 0, 1)	(2, 0, 1)
		2			(2, 0, 2)	(2, 0, 2)
	1	0		(2, 0)	(2, 1, 1)	(2, 1, 0)
		1			(2, 1, 2)	(2, 1, 1)
		2			(2, 1, 0)	(2, 1, 2)
	2	0		(2, 1)	(2, 2, 1)	(2, 2, 1)
		1			(2, 2, 2)	(2, 2, 2)
		2			(2, 2, 0)	(2, 2, 0)

контролюючих вхідних ліній сума пріоритетів не перевищує певного значення. Так, на вході жодного логічного елемента не повинно бути нульового пріоритету для виконання дії.

Звичайно, трійкові логічні стани зовсім не зобов'язані якимось чином співставлятися з двійковими. Дійсно, якщо ми маємо лише два можливих стани для характеристики певного твердження, то їм можна поставити у відповідність «правду» і «хибність», але це не означає, що не може бути інших можливих характеристик цього твердження. Тому можна абстрагуватися від значень «правда»/«хибність» і оперувати лише з пріоритетностями. Наприклад, двійкова бінарна операція «і» повертає ненульове значення, якщо сума пріоритетів лівого та правого тверджень для неї дорівнює двом. Так само діє двійкова бінарна операція «або», якщо сума пріоритетів не менша одиниці.

З іншого боку, з огляду на суперечливість трактування трійкових чисел у логіці, зручним також може бути (в залежності від реалізації) виконання у трійковому квантовому модулі лише

числових перетворень, а логічні операції, що визначають, яке саме числове перетворення робити, виконувати у класичному модулі. Тоді можна не розглядати різноманітні трактування «третього стану» і пов'язані з ним невизначеності.

Фізична реалізація трійкових квантових обчислень

Фізично взаємодію елементарних об'єктів для виконання обчислень можна представити у вигляді системи у переплутаному стані. Це можна описати так званими станами Белла (СБ) [8]. Поняття про СБ $\Phi^{\pm}$ та $\Psi^{\pm}$ можна поширити на трійкові стани. Особливістю СБ є можливість визначення стану другого об'єкту знаючи стан першого. Особливістю трійкових СБ є те, що для визначення стану третього об'єкту необхідно знати два інших.

Назвемо кутрітом елементарний квантовий об'єкт, що має три диференційовані стани, які можна встановити або визначити якимось способом. Він буде логічною «коміркою» для КК (за аналогією з бітами в ОМ).

Кутрітом може бути довільна трирівнева квантова система. Надалі розглядатиметься найпростіша модель кутріта на атомних ядрах зі спіном $I = 1$ та магнітним числом $m_I \in \{-1, 0, 1\}$ в магнітному полі.

Запишемо модель взаємодії при магнітному резонансі в такій системі. Введемо базис

$$|\Psi\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle + a_3|3\rangle \quad (3)$$

де кет-вектори $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ є власними векторами відповідного незбуреного гамільтоніану даної системи $\hat{H}_0$, а квадрати коефіцієнтів a_i позначають вірогідності спостерігати атом в відповідному стані i . Запишемо їх у вектор-стовпчик $a^T = (a_1 \ a_2 \ a_3)$. Подіємо на систему зовнішнім збуренням $\delta\hat{V}$ що виконує лінійне перетворення

$$a \rightarrow a' : a' = Aa \quad (4)$$

Оператор A переставляє коефіцієнти місцями, маючи зміст зміни стану системи. Його легко записати для кожної з дій, що розглядалися вище. В загальному випадку оператор над кутрітом повинен складатись із серії окремих імпульсів, що виконують перехід між енергетичними рівнями квантової системи.

Елементи матриці оператора $\delta\hat{V}$ матимуть вигляд (тут і надалі розглядається для спрощення випадок точного резонансу):

$$\begin{aligned} \delta V_{jj} &= 0, j = \overline{1,3}, \\ \delta V_{12} &= \delta V_{21} = h_1 H_m e^{-i\omega_{12}t} \equiv \delta V_1, \\ \delta V_{13} &= \delta V_{31} = h_2 H_m e^{-i\omega_{13}t} \equiv \delta V_2, \\ \delta V_{23} &= \delta V_{32} = h_3 H_m e^{-i\omega_{23}t} \equiv \delta V_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \omega_{12} &\equiv \omega_1, \\ \omega_{13} &\equiv \omega_2, \\ \omega_{23} &\equiv \omega_3, \end{aligned} \quad (6)$$

де ω_m — резонансні частоти відповідних переходів (Рис.1), H_m — амплітуда зовнішнього НВЧ магнітного поля, в якому знаходиться атом, h_i — коефіцієнти дипольної магнітної взаємодії:

$$h_i = \mu_N g m_i, \quad (7)$$

μ_N — ядерний магнетон, g — ядерний g -фактор.

З рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \delta\hat{V})\Psi \quad (8)$$

отримаємо три лінійні рівняння для коефіцієнтів a_i :

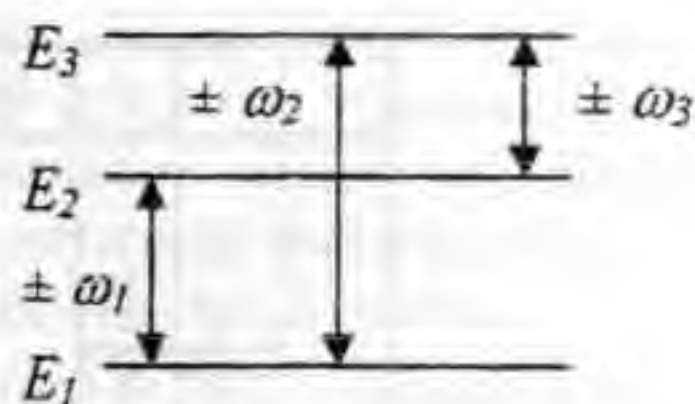


Рис. 1 Відповідність частот та енергетичних рівнів.

$$i\hbar \frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \langle i | \delta\hat{V} | j \rangle a_j e^{i\omega_{ij}t}, i, j = \overline{1,3} \quad (9)$$

Відповідно для трьох переходів між енергетичними рівнями матимемо три форми збурення, які в залежності від виконання необхідної операції можуть діяти паралельно або послідовно у часі. Розглянемо для прикладу перехід між рівнями 1–2. Для його здійснення ненульовими мають бути елементи δV_{12} і δV_{21} оператора $\delta\hat{V}$. Тоді система рівнянь (9) набуде вигляду:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a}_1 = \delta V_{12} a_2 \cdot \exp(i\omega_1 t) \\ i\hbar \dot{a}_2 = \delta V_{21} a_1 \cdot \exp(-i\omega_1 t) \\ i\hbar \dot{a}_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

при початковій умові

$$a_1(0) = 1, a_2(0) = a_3(0) = 0 \quad (11)$$

Одразу можна покласти $a_3(t) = 0$ з тих міркувань, що переходи на рівень 3 не відбуваються. В цьому випадку схема взаємодії не відрізняється від загальновідомої схеми інверсії стану в дворівневій системі. Знайдемо розв'язок у вигляді:

$$a_i = C_1 \exp(iqt) + C_2 \exp(-iqt), \quad (12)$$

$$q = |h_1 H_m / \hbar|. \quad (13)$$

Амплітуди C_1 і C_2 знайдемо з початкової умови при $t = 0$:

$$a_1^2(0) = 1, a_2^2(0) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 1/2 \quad (14)$$

$$\begin{cases} a_1 = \cos(qt) \\ a_2 = -i \sin(qt) \\ a_3 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Для отримання стану $a_1^2 = 1, a_2^2 = 0$ тривалість імпульсу збудження має бути:

$$T_{12} = |\pi \hbar / 2 h_1 H_{m12}| \quad (16)$$

Діючи аналогічно, можна знайти розв'язки для інших переходів:

$$E_1 \rightarrow E_3 : T_{13} = |\pi \hbar / 2 h_2 H_{m13}|, \quad (17)$$

$$E_2 \rightarrow E_3 : T_{23} = |\pi \hbar / 2 h_3 H_{m23}|. \quad (18)$$

Таким чином можна сформувати 3 матриці операторів, що перетворюють кутріт: δV^{12} , δV^{13} і δV^{23} , де індекси позначають переходи між відповідними рівнями. З них можна легко сформувати блочну матрицю будь-якого перетворення системи кутрітів.

Реалізувати кутріти можна на атомах з магнітним числом, що приймає значення $\{-1, 0, 1\}$. Цій вимозі задовольняють стабільні ізотопи азоту N_7^{14} [9] та літію Li_3^6 [9]. Технології легіювання кремнію обидвома елементами відомі (див., напр. [10], [11]), які можуть бути використані для практичної реалізації кутрітів. Керування станом кутрітів, як і в конструкціях звичайних бінарних КК, здійснюється імпульсами зовнішнього НВЧ-випромінювання відповідної резонансної частоти. Безумовно, якщо кутріти є спінами на донорі у напівпровіднику, вони можуть взаємодіяти з ядерними спінами матриці. Тому матриця повинна бути побудована на стабільних ізотопах, ядра яких мають нульовий спін. Для кремнію такий ізотоп існує: Si_{28} . До того ж, кремнієва технологія найбільш поширена в сучасній мікроелектроніці.

Висновки

Запропоновано варіант трійкової логіки, побудований на арифметичних властивостях логічних операцій по аналогії з двійковою. Показана можливість реалізації трійкового квантового комп'ютера на основі ЯМР у кремнійовій матриці, легованій літієм або азотом. Слід зауважити, що в даній роботі не розглядається одна з ключових проблем, яка, так чи інакше, виникає при аналізі будь-якої фізичної реалізації квантового комп'ютера, а саме, можливість встановлення ефективного керованого зв'язку між кутрітами. Хоча загальний підхід до цієї проблеми принципово не відрізняється від свого двійкового аналогу (див. напр. [12]), проте, в цьому випадку він має свої особливості, які будуть розглянуті в окремій публікації.

Подяка

Автори щиро вдячні професору Данилову В.В. за постановку проблеми та плідне обговорення результатів.

Список використаних джерел

1. Шор П. Полиномиальные по времени алгоритмы разложения числа на простые множители и нахождения дискретного логарифма для квантового компьютера. В Сб. Квантовый компьютер. Квантовые вычисления. Под ред. Садовниченко В.А. – Ижевск: 1999. – с.200
2. <http://www.dwavesys.com/index.php?mact=News,cntnt01,detail,0&cntnt01articleid=9&cntnt01origid=15&cntnt01returnid=21> (2007)
3. Buscemi F., Chiribella G., D'Ariano G.M. Inverting Quantum Decoherence by Classical Feedback from the Environment. // Phys. Rev. – 1979. – B20. – P.1886-1901.
4. Lablans P. <http://www.multivaluelogic.com>
5. Arpasi J.P. A Brief Introduction to Ternary Logic. 7th Nov. — 2003.
6. Кушнеров О. Троицкая цифровая техника. Ретроспектива и современность.
7. Фейнман Р. Квантовомеханические компьютеры. В Сб. Квантовый компьютер. Квантовые вычисления. Под ред. Садовниченко В.А. – Ижевск: 1999. – с.125.
8. Nagata K., Laskowski W., Paterek T. Bell inequality with an arbitrary number of settings and its applications. // Phys. Rev. A 74, 62109 (2006).
9. The Berkeley Laboratory Isotopes Project's <http://ie.lbl.gov/education/isotopes.htm>
10. Воронов В.В., Воронкова Г.И., Батушина А.В., Головина В.Н., Арапкина Л.В., Тюрина Н.Б., Гуляева А.С., Мильвидский М.Г. Мелкие термодоноры в монокристаллах кремния, легированных азотом. // Физика твердого тела, – 2002. – т.44, вып. 4.
11. Graetz J., Ahn C. C., Yazami R., and Fultz B. Highly Reversible Lithium Storage in Nanostructured Silicon. // Electrochemical and Solid-State Letters, 6 (9) A194-A197 (2003).
12. Pershin Yu.V., Vagner I.D., Wyder P. Indirect hyperfine interaction between nuclear spin qubits in mesoscopic wires and rings. // J. Phys.: Condens. Matter 15 (2003) 997–1006.

Надійшла до редколегії 30.11.2007

тіла. Це вже приводить до деякого збільшення ймовірності коливної релаксації.

За аналогією з процесом $V-T$ релаксації (де можна ввести характерний час встановлення рівноваги між коливними та поступальними ступенями вільності молекули в об'ємі газу) можна ввести час поверхневої ($S-T$) релаксації для коливно-збуджених молекул. Це типовий час втрати коливного збудження молекули, що зазнала зіткнення з поверхнею. Порівняння характерних часів об'ємної та поверхневої релаксації (експериментальні дані [1]) демонструє, що $S-T$ процеси домінують над $V-T$ в низькотемпературній плазмі до концентрацій порядку 10^{17} см^{-3} .

Аналіз експериментальних даних показує, що ймовірність $S-T$ релаксації зменшується при збільшенні коливного кванта та з переходом від металевої до діелектричної поверхні. Це пояснюється тим, що у випадку металів частоти ω_D більш великі. Відзначимо також, що одним з головних результатів [7] є порівняно мале значення ймовірності $S-T$ релаксації для низьких рівнів коливного збудження. Але ситуація повинна змінитись, коли стан системи буде нерівноважним, а кількість високо-збуджених молекул не буде експоненційно малою.

В цьому випадку можна вважати, що розподіл молекул по коливальних числах є тринорівським [4]. Знаходженню ймовірності $S-T$ релаксації для зазначених умов є метою цієї роботи.

Для подальшого аналізу, при наявності умови адіабатичності процесу, потрібний явний вигляд потенціалу взаємодії молекули з поверхнею. Нажаль, детальний хід його є невідомим, тому за аналогією з роботами [5, 7], використаємо його модель, що враховує лише відштовхування на малих (порядку a) відстанях:

$$U = A[\exp(-z_1/a) + \exp(-z_2/a)] \quad (1)$$

де z_1 та z_2 – відстані першого і другого атомів від поверхні. Зауважимо, що при $z_2 \rightarrow \infty$ потенціал (1) зводиться до потенціалу взаємодії безструктурної частинки, який обраний в [5] для обчислення коефіцієнту акомодатії атома. В подальшому $U - U_0$ розглядається як збурення, що викликає переходи у квантових степенях вільності молекул (коливні рівні) і поверхні (поверхневі фонони). Рух центру мас молекули можна за визначених умов розглядати класично. Якщо припустити, що рівноважна відстань між ядрами $r_0 \ll a$ (це можливо тому, що розмір a визначає максимально можливе зближення

молекули з поверхнею, коли починається сильне відштовхування), то можна вважати рух центру мас молекули таким, що не залежить від її обертання та визначається кутом, під яким вона входить в область взаємодії. Розподіл по кутах можна вважати однаково ймовірним. За таких умов можна стверджувати, що обертальний спектр не збурюється. На користь цього твердження можна додати той факт, що приріст імпульсу при втраті коливного збудження молекули спрямований вздовж її вісі і тому не змінює її обертальної енергії.

Ймовірність переходу $n \rightarrow n'$ у коливному спектрі молекули з одночасною зміною квантових чисел осциляторів поверхні $p \rightarrow p'$ можна обрахувати у першому порядку теорії збурень:

$$w_{np}^{n'p'} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{np}^{n'p'}(t) dt \right|^2 \quad (2)$$

де $V_{np}^{n'p'}(t)$ – матричний елемент збурення (1), який обчислено на хвильових функціях осциляторів поверхні. Останні обираються у вигляді гармонічних осциляторів. Після інтегрування по часу в (2), результат потрібно усереднити по всім орієнтаціям вісі молекули та по напрямках хвильового вектора поверхневих коливань. Останні теж можна обрати однаково ймовірними. Однак для порівняння з даними експерименту треба провести усереднення за розподілом швидкостей молекул в потоці J , що падає на поверхню:

$$J = \frac{m}{T} \exp\left\{-\frac{mv^2}{2T}\right\} v dv \quad (3)$$

Тут T – температура поступального руху молекули, m – її маса. Усереднення по частотному розподілу осциляторів поверхні $F(\omega)$ провадиться в припущенні, що цей розподіл є планківським:

$$F(\omega) = V \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c_s^3} \frac{1}{\exp[\hbar\omega/T_s] - 1} \quad (4)$$

де V – об'єм твердого тіла, c_s – швидкість звуку в ньому, T_s – температура поверхні. Такий розподіл існує для гармонічних коливань, що знаходяться у тепловій рівновазі з поверхнею. Після зазначених інтегрувань отримуємо таку формулу для ймовірності дезактивації симетричної двоатомної молекули внаслідок зіткнення з поверхнею:

(2)

$$w_n^{n-1} = \sqrt{\pi} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^{3/2} m \omega_0 a^2 / \hbar \alpha^{1/2} \exp(-\alpha) \left[1 + \frac{2T_s^2}{3\pi^2 a^2 \rho c_s^3 \hbar} R\left(\frac{\Theta}{T_s}\right) \right] \langle n \rangle \quad (5)$$

де $\alpha = 3[\pi a \omega_0 / v_T]^{2/3}$, $\Theta = \hbar \omega_D$ – температура Дебая, $\rho = M/V$ – густина твердого тіла.

Функція $R\left(\frac{\Theta}{T_s}\right)$ – є результатом усереднення

ймовірності дезактивації по розподілу Планка для поверхневих фононів і в загальному випадку є досить складною інтегральною функцією [8, 7], $\langle n \rangle$ – середній квантовий стан коливань молекул (за тринорівським розподілом).

Як відомо [4], у випадку нерівноважної плазми, коли кількість високозбуджених молекул є достатньо високою, розподіл по енергіях коливних станів повинен враховувати ангармонізм коливань. Заміна планківського розподілу на тринорівський викликана тим, що на високих рівнях збудження частота переходу від стану n до $n-1$ починає залежати від номеру стану:

$$\omega_{n,n-1} = \omega_0 (1 - 2x_e n)$$

де x_e – стала ангармонізму, для молекули водню ця величина становить $x_e = 0,028$ [1].

Якщо перейти від розподілу по дискретних квантових числах до неперервного розподілу по частотах (енергіях E), можна записати тринорівський розподіл молекул так [4]:

$$f(E) = B \exp\left(-\frac{E}{T_v} + \frac{x_e E^2}{T_s \hbar \omega_0}\right) \quad (6)$$

тут $B = \text{const}$. Введення коливної температури можливе за наявності зв'язку:

$$T_v^{-1} = -\frac{\partial \ln f}{\partial E} | (E \rightarrow 0)$$

та помітного впливу процесів обміну коливаннями (VV-процеси), принаймні на нижніх коливних рівнях. Взагалі на формування цього розподілу великий вплив дають IV, V-T, eV (процеси збудження коливань молекул електронами) та в нашому випадку - S-T. Останні, як було зазначено вище, домінують в розрідженій пристінковій плазмі. В загальному випадку потрібно ще враховувати нерезонансний IV'-

обмін та хімічні реакції. Але ці питання становлять предмет окремої задачі.

В наших умовах великий відсоток збуджених молекул відповідає значній коливній температурі. Розподіл (6) в такому випадку має типову плато, яке починається з помірних рівнів і закінчується так званою зоною дисоціації. Після квантового номера $n_0 \approx D/\hbar \omega_0$ (де D – енергія дисоціації) розподіл Тринора різко спадає. Це дозволяє зробити просту оцінку для $\langle n \rangle$ в (5). Оскільки параметри $(x_e n_0)$ та ω_D/ω_0 є малими, то з такою точністю ймовірність S-T релаксації (5) збільшується на множник

$$\exp\left(+\frac{x_e D}{3\hbar(\omega_0 - \omega_D)}\right) \quad (7)$$

Для молекули водню, збуджених на рівень $n \geq 4$ з коливною температурою $T_v \sim 10^3$ К, ймовірність поверхневої релаксації зростає у кілька разів. Треба зауважити, що при низьких газових температурах коливно-збуджені молекули спершу адсорбуються у зв'язані стани на поверхні та проводять певний час на ній, втрачають збудження, а потім покидають поверхню. Беручи до уваги такий механізм, можна показати (за аналогією з [7]), що ймовірність релаксації збільшується на множник

$$\exp\left(\frac{Q}{T_s}\right), \text{ де } Q - \text{теплота адсорбції.}$$

Порівняно висока температура поверхні, що контактує з плазмою, дозволяє зробити припущення про відсутність адсорбованих молекул. Тоді ймовірність S-T релаксації високозбудженої молекули на поверхні дивертора з температурою 1500 – 2000 К становить біля 10^{-3} .

При низьких температурах, коли адсорбція молекул є суттєвою, ймовірність релаксації високозбуджених молекул становить біля 10^{-2} . Це дає можливість стверджувати, що зіткнення таких молекул з поверхнею має бути ефективним засобом її чищення від молекул, що вже сіли на неї.

Робота виконана за часткової підтримки
бюджетної теми 06БФ052-01.

Список використаних джерел

1. Радциг А.А., Смирнов Б.М., Справочник по атомной и молекулярной физике. М.: Атомиздат, 1980 – 351 с.
2. Кондратьев В.Н., Никитин Е.Е., Кинетика и механизмы газофазных реакций. - М.: Наука, 1975. – 547 с.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: Наука, 1966. – 823 с.
4. Русанов В.Д., Фридман А.А., Физика химически активной плазмы - М.: Наука, 1984. – 421 с.
5. Ландау Л.Д., К теории коэффициента аккомодации. // Избранные труды, т.1, С.146 – 149, - М.: Наука, 1969.
6. Krashenninnikov S.I., Prigov A.Yu. and Sigmar D.J. ; Plasma recombination and divertor attachment // Phys.Letter - 1996- A214, - P.285-289.
7. Коган Е.Я., Мальнев В.Н., Гетерогенная релаксация колебательно возбужденных молекул газа // Укр..Физ.. Жур., - 1983 - т.28, № 3, С. 374-385.
8. Malnev V.M., Martysh Ye.V. and Nedospasov A.V., Surface Relaxation of Highly Vibration Excited Diatomic Molecules in the Plasma Edge, Cont. Papers of 24th European Physical Society Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, 9-14 June 1997, Germany, 1997, V.1. P.433-436.

Надійшла до редакції 29.11.2007.

СУЧАС

СУЧАСНА ФІЗИКА

САРАЧНА ФИЗИКА

УДК 532; 534. 286-8

Адаменко І.І., доктор фіз.-мат. наук., професор,
Григор'єв А.М., канд. фіз.-мат. наук.,
Кузовков Ю.Г., канд. фіз.-мат. наук., ст. наук. сп.

Вплив тиску на пружні властивості розчинів молекулярних рідин з конфігураційними ступенями вільності

Проаналізовано вплив тиску на пружні властивості бінарних розчинів лінійних та циклічних вуглеводнів на базі отриманих експериментальних даних по швидкості поширення ультразвуку. Зроблено висновок про те, що сили відштовхування між молекулами, як і у випадку індивідуальних рідин, відіграють більшу роль у поведінці пружних властивостей розчинів при високих тисках. Що стосується внутрішньомолекулярних конфігураційних перетворень, то вони суттєво впливають на пружні властивості розчинів при низьких тисках.

Ключові слова: розчини молекулярних рідин, пружні властивості, конфігураційний внесок, міжмолекулярна взаємодія.

*E-mail: agrigoriev@univ.kiev.ua

Відомо, що пружні властивості індивідуальних рідин визначаються переважно силами відштовхування між молекулами, сили притягання можна розглядати при цьому як збурення [1, 2]. Щодо розчинів, то а priori не можна стверджувати теж саме, оскільки властивості розчинів більш чутливі до деталей потенціала взаємодії як між молекулами одного сорту, так і між різносортовними молекулами [3]. Метою цього дослідження було з'ясування впливу різних ділянок потенціалу міжмолекулярної взаємодії та внутрішньомолекулярних конфігураційних перетворень на характер концентраційних залежностей пружних властивостей розчинів молекулярних рідин. При цьому, на наш погляд, в якості відповідної макровластивості найбільш доцільно вибрати саме швидкість поширення ультразвуку, оскільки її значення, як і значення густини можна точно отримати з експеримента. Це дає змогу надійно визначити адиабатичну стисливість рідинних систем. На відміну від останньої визначення ізотермічної стисливості вимагає здійснення математично некоректної операції чисельного диференціювання, що помітно позначається на точності результату.

I.I. Adamenko, professor
A.N. Grigoriev,
Yu.I. Kuzovkov

Pressure effect on elastic properties of molecular liquid mixtures with configurational degrees of freedom

Pressure effect on elastic properties of binary mixtures of linear and cyclic hydrocarbons have been analysed using experimental data on ultrasonic speed. At high pressures repulsive forces between molecules seem to play an important role in determining elastic properties of mixtures as well as in a pure liquids. As to intramolecular configuration transitions they affect on elastic properties at low pressures.

Key Words: molecular liquid mixtures, elastic properties, configurational contribution, intermolecular interaction

Нами були проведені вимірювання швидкості поширення ультразвуку c в системах розчинів *n*-гексакан – *n*-гексан та *n*-гексакан – циклогексан з концентраціями 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 та 1.0 мольних часток в інтервалі температур $T=(293-393)$ К і тисків $P=(0.1-98.1)$ МПа. Вимірювання виконувалися імпульсно-фазовим методом [4] на частоті 28 МГц, яка значно нижча за частоту релаксації в цих об'єктах [5]. Відносна похибка вимірювання c не перевищувала 1%.

Вибір об'єктів дослідження обумовлений такими міркуваннями. По-перше, характер взаємодії між молекулами вуглеводнів визначається лише дисперсійними силами [6], що при подальшому аналізі дозволяє не враховувати різні орієнтаційні ефекти, які можуть бути обумовлені далекодіючою диполь-дипольною взаємодією або водневим зв'язком. По-друге, розмір молекул та інтенсивність міжмолекулярної взаємодії компонентів розчину повинні суттєво відрізнятися, для того щоб концентраційні залежності досліджуваних величин істотно відрізнялися від їхніх аналогів в ідеальному розчині (молекули *n*-гексакану з одного боку та молекули циклогексану або *n*-гексану – з іншого). Нарешті, вибрана пара

Представлено:
з.ф.-м.н., проф. Адаменко І.І.

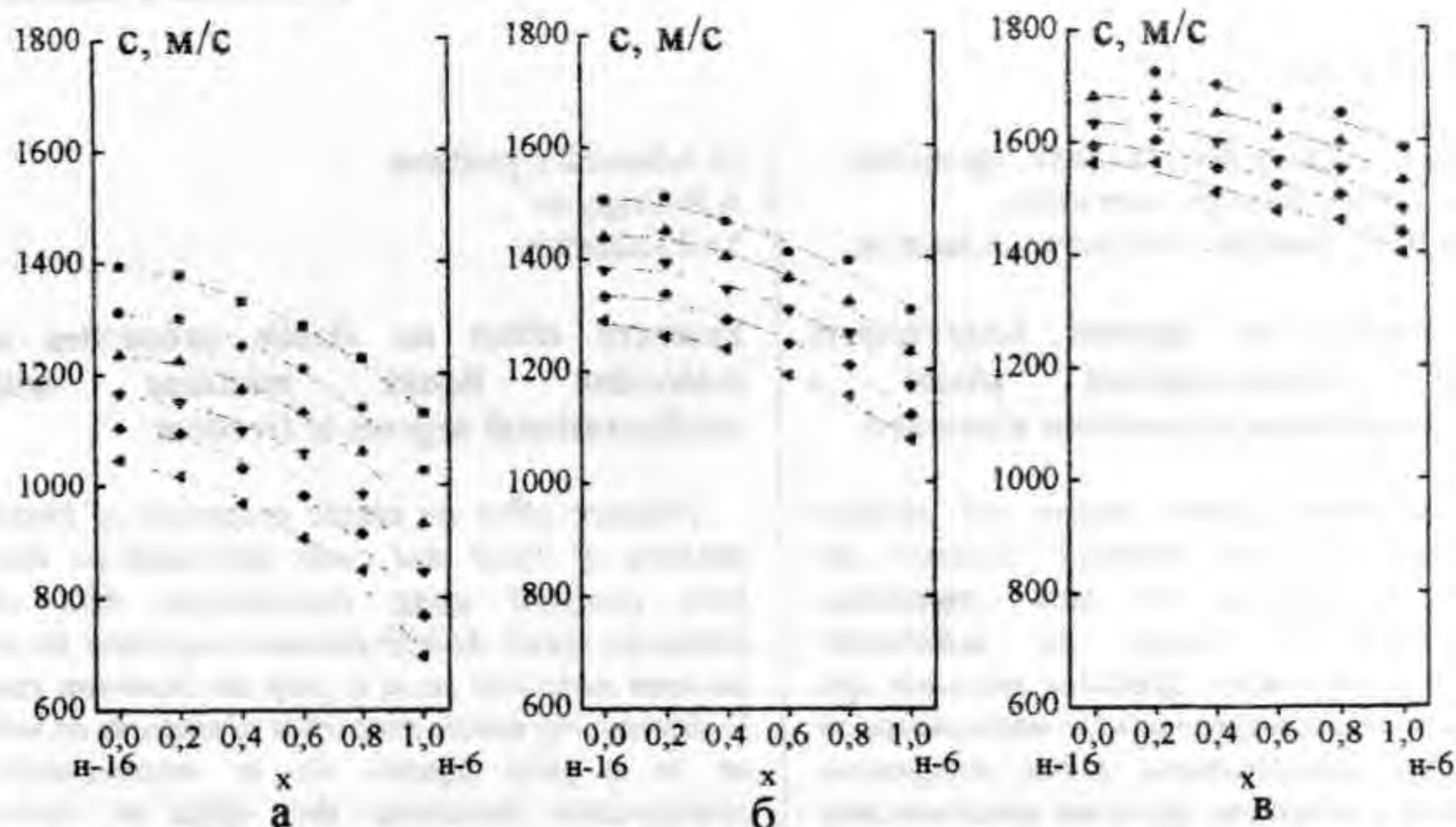


Рис 1. Концентраційна залежність швидкості поширення ультразвуку в системі н-гексадекан - н-гексан (а - $P=0.098$ МПа, б - $P=39.2$ МПа, в - $P=98.1$ МПа; ■ - $T=293$ К, ● - $T=313$ К, ▲ - $T=333$ К, ▼ - $T=353$ К, ◆ - $T=373$ К, ◀ - $T=393$ К).

молекул н-гексану та циклогексану має близьку масу, об'єм та енергію парної взаємодії, але ці молекули відрізняються наявністю в одній з них конфігураційних ступенів вільності. Таким чином, різниця в значеннях надлишкових величин двох досліджених систем мала б бути обумовлена в значній мірі конфігураційним внеском в надлишкову ентропію.

На рис. 1 і 2 представлені концентраційні

залежності швидкості поширення ультразвуку в розчинах н-гексадекан - н-гексан і н-гексадекан - циклогексан відповідно. Як видно з рисунків, для розчинів н-гексадекану з циклогексаном швидкість поширення ультразвуку є лінійною функцією концентрації при всіх тисках, а для системи н-гексадекан - н-гексан вона при малих тисках є нелінійною і опуклою до осі концентрацій.

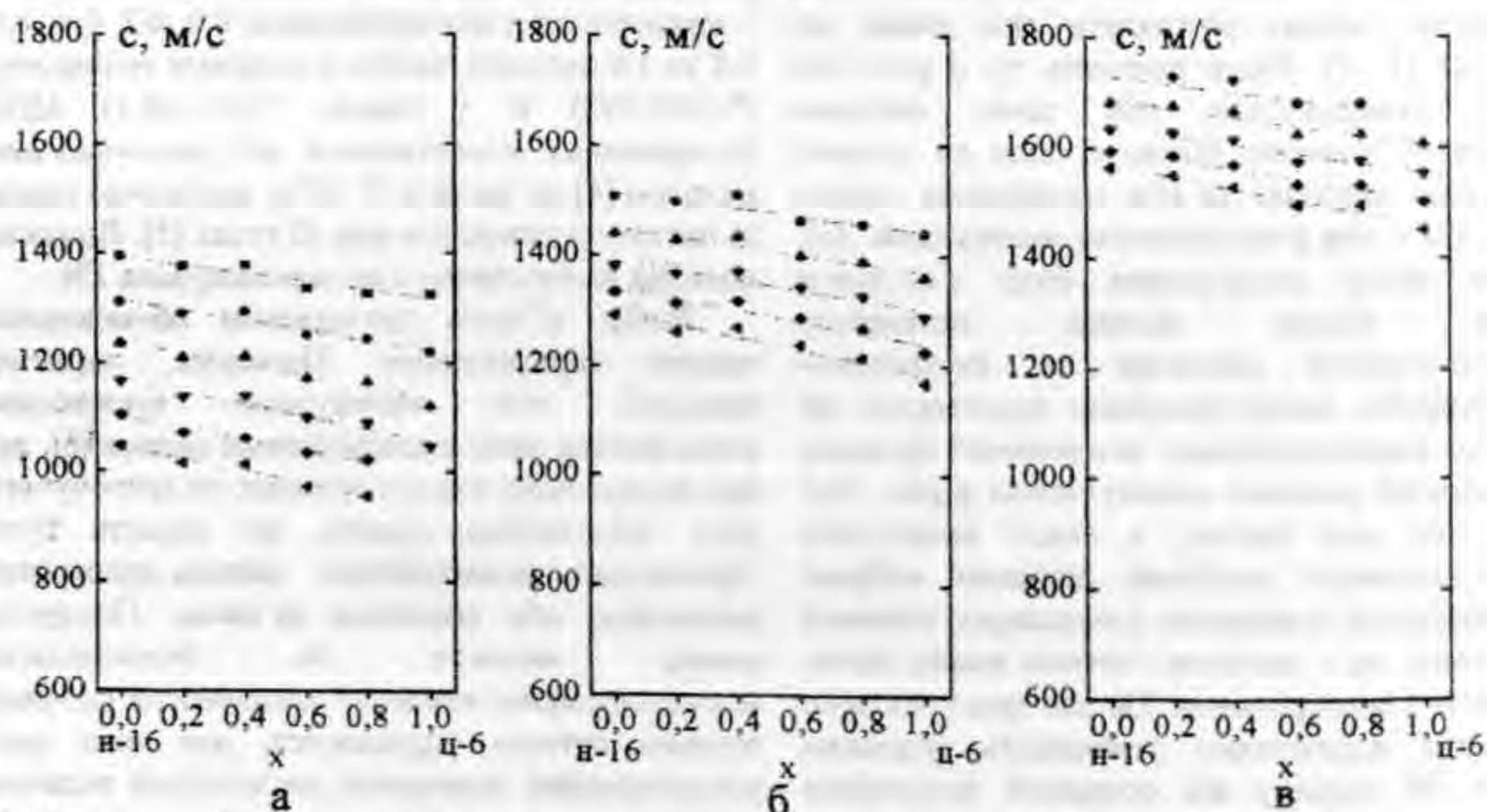


Рис 2. Концентраційна залежність швидкості поширення ультразвуку в системі н-гексадекан - циклогексан (а - $P=0.098$ МПа, б - $P=39.2$ МПа, в - $P=98.1$ МПа; ■ - $T=293$ К, ● - $T=313$ К, ▲ - $T=333$ К, ▼ - $T=353$ К, ◆ - $T=373$ К, ◀ - $T=393$ К).

Більш зручною для аналізу величиною є не швидкість поширення ультразвуку безпосередньо, а її комбінація з густиною ρ і молярною масою M :

$$\frac{M}{\rho^2 c^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad (1)$$

де γ – відношення молярних теплоємностей при сталому тиску та об'ємі. Оскільки значення γ для всіх рідких вуглеводнів близьке до 1.2, то

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \approx 1.2 \frac{M}{\rho^2 c^2}. \quad (2)$$

Ізотермічна похідна молярного об'єму по тиску досить легко розраховується для багатьох модельних систем, серед яких доцільно розглянути систему твердих сфер та систему твердих сфер з притяганням, як найбільш прості. Можливість ефективного застосування сферичного модельного наближення до опису рівноважних, зокрема пружних властивостей рідин з різною (несферичною) формою молекул, доведена раніше [7].

Рівняння стану бінарного розчину твердих сфер має вигляд [8]

$$P = nk_B T \left[\frac{1}{1-\eta} + \frac{ns_m r_m}{(1-\eta)^2} + \frac{n^2 s_m^3}{12\pi} \left(\frac{1-\eta}{3} \right) \right] \quad (3)$$

де

$$\eta = \frac{\pi n \sigma^3}{6},$$

$$\sigma^3 = x_1 \sigma_1^3 + x_2 \sigma_2^3,$$

$$r_m = 0.5(x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2),$$

$$s_m = \pi(x_1 \sigma_1^2 + x_2 \sigma_2^2),$$

n – числова густина, k_B – стала Больцмана, x_1 і x_2 – концентрація першої і другої компоненти в мольних частках, σ_1 і σ_2 – діаметри сфер першої і другої компоненти.

Похідна тиску по числовій густині дорівнює

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T = \frac{P}{n} + k_B T n \left(\frac{\partial Z}{\partial n} \right)_T, \quad (4)$$

де

$$Z = \frac{P}{nk_B T}.$$

З рівняння (3) знаходимо

$$\begin{aligned} n \left(\frac{\partial Z}{\partial n} \right)_T &= \frac{\eta + ns_m r_m}{(1-\eta)^2} + \\ &+ \frac{\eta^2 + n \pi s_m r_m + \frac{n^2 s_m^3}{6\pi} \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)}{(1-\eta)^3} + \\ &+ \frac{n^2 \pi s_m^3}{4\pi} \left(1 - \frac{\eta}{3} \right) \frac{1}{(1-\eta)^4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для системи твердих сфер з притяганням в наближенні Шнайдера-Херрінгтона [3] рівняння стану має вигляд

$$P = P^{HS} - \frac{a}{V^2}, \quad (6)$$

де

$$a = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (7)$$

$$a_{ij} = -2\pi N_A^2 \int_{\sigma_{ij}}^{\infty} \varphi_{ij}(r) r^2 dr, \quad (8)$$

$\varphi(r)$ – потенціал сил притягання, P^{HS} – тиск у системі твердих сфер без притягання, обчислений за формулою (3).

В якості потенціала сил притягання нами був вибраний потенціал Сазерленда

$$\varphi_{ij}(r) = \begin{cases} \infty, & r < \sigma_{ij} \\ -\epsilon_{ij} \left(\frac{\sigma_{ij}}{r} \right)^6, & r \geq \sigma_{ij} \end{cases} \quad (9)$$

параметри якого для випадку взаємодії молекул різних сортів розраховувалися за правилом Лоренца-Бертло [1, 3]:

$$\epsilon_{12} = \sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22}} \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Значення параметрів потенціала Сазерленда для індивідуальних компонент відомі [7].

З формул (4) і (6) випливає, що

$$n \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_T = n \left(\frac{\partial P^{HS}}{\partial n} \right)_T + \frac{2P^{HS}}{n}, \quad (10)$$

де

$$p^{int} = \frac{a}{V^2}$$

Похідна $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ пов'язана з похідною $\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T$ співвідношенням

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{M}{\rho} \frac{1}{n \left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T} \quad (11)$$

Розрахунок за формулами (3) – (11) дозволив визначити внесок сил відштовхування і притягання у значення ізотермічної похідної об'єму по тиску для досліджених систем і порівняти їх з відповідними експериментальними значеннями. Результати експерименту та розрахунку представлені на рис. 3 і 4 відповідно для систем н-гексадекан – н-гексан і н-гексадекан – циклогексан для температури $T=373$ К і тисків $P=0.1$ та 98.1 МПа.

Як видно з рисунків, концентраційна залежність $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ модельної системи твердих сфер адекватно передає відповідну експериментальну залежність. При високих тисках криві майже збігаються, а при низьких тисках експериментальні значення $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ визначаються переважно „твердосферним” внеском. Отже, можна зробити висновок про те, що у випадку розчинів, як і у випадку індивідуальних рідин, пружні властивості визначаються переважно силами відштовхування. При цьому із збільшенням тиску сили відштовхування починають відігравати більш суттєву роль.

Що стосується концентраційних залежностей $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ реальних систем н-гексадекан – н-гексан та н-гексадекан – циклогексан, то можна констатувати їх якісну відмінність, а саме, різний характер цих залежностей при низьких тисках. Для системи н-гексадекан – циклогексан концентраційна залежність $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ є практично лінійною, тоді як для системи н-гексадекан – н-гексан вона суттєво нелінійна (див. рис. 3 і 4). При високому тиску концентраційні залежності

$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ обох систем мають однаковий лінійний характер.

Ці експериментальні факти пояснюються, на наш погляд, різною початковою щільністю упаковки низькомолекулярних компонентів розчинів (н-гексана і циклогексана) з урахуванням впливу конформаційних факторів. Відомо, що молекули н-парафінів існують у вигляді поворотних ізомерів – ланцюгових структур різної конфігурації, утворених поворотами на кут близький до 120° навколо однієї або декількох С-С зв'язків ланцюга. Розподіл молекул н-парафінів по конфігураціям при низькій щільності упаковки частинок, тобто при низьких тисках, визначається температурою (наближення ізольованих молекул [6]). Прямий вплив тиску на розподіл молекул рідких н-парафінів по конфігураціям теж існує, але для ланцюгових компонентів досліджуваних нами систем, як показує експеримент [9], він є суттєвим, починаючи з тисків у декілька сот мегапаскалів. Отже, для дослідженого діапазона тисків (0.1-98.1) МПа цим ефектом можна знехтувати.

Відмінність н-гексадекану від н-гексану, з точки зору впливу конформацій на щільність міжмолекулярної упаковки, можна розглядати як відмінність у „жорсткості” (або „гнучкості”) їх молекул. Відповідно, молекули н-гексану є „жорсткими” порівняно з молекулами н-гексадекану, тому що в н-гексані реалізується менший набір конформацій порівняно з н-гексадеканом (при заданій температурі). Внаслідок цього за однакових термодинамічних умов структура, що складається із „жорстких” молекул є менш щільною, а густина, відповідно, меншою порівняно з густиною н-гексадекана. Якщо додати у цю нещільну структуру додати н-гексадекан, то його „гнучкі” молекули легко заповнюють існуючі порожнини (вільний об'єм).

Саме цим пояснюється різке падіння $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ при додаванні н-гексадекана до н-гексана. При підвищенні тиску вільний об'єм у н-гексані зменшується, тому ефекти, пов'язані з різною здатністю до пакування „гнучких” і „жорстких” молекул майже не проявляються (див. рис. 3).

Молекули в рідкому циклогексані упаковані щільніше ніж у н-гексані, про що свідчить більша густина циклогексану при майже однаковій з н-гексаном молекулярній масі. Об'єм, що припадає на одну CH_2 групу в циклогексані, мало відрізняється від такого об'єму

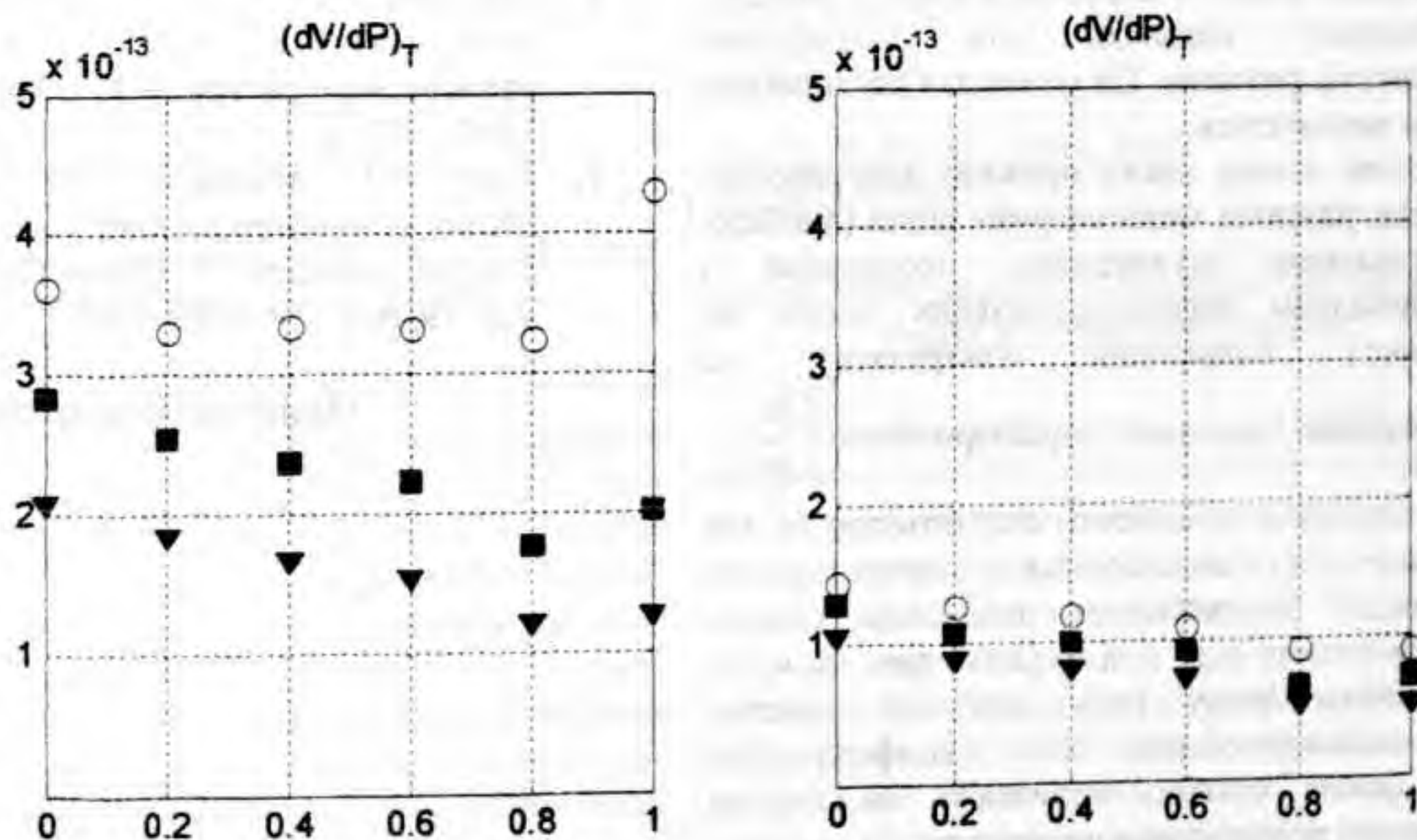


Рис 3. К Концентраційна залежність $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, $\text{м}^3/\text{Па}$ в системі н-гексадекан – н-гексан при температурі $T=373\text{ К}$ і тисках $P=0.098\text{ МПа}$ (зліва) і $P=98.1\text{ МПа}$ (справа) ($\circ$ – експеримент, $\blacksquare$ – модель твердих сфер, $\blacktriangledown$ – модель твердих сфер з притяганням).

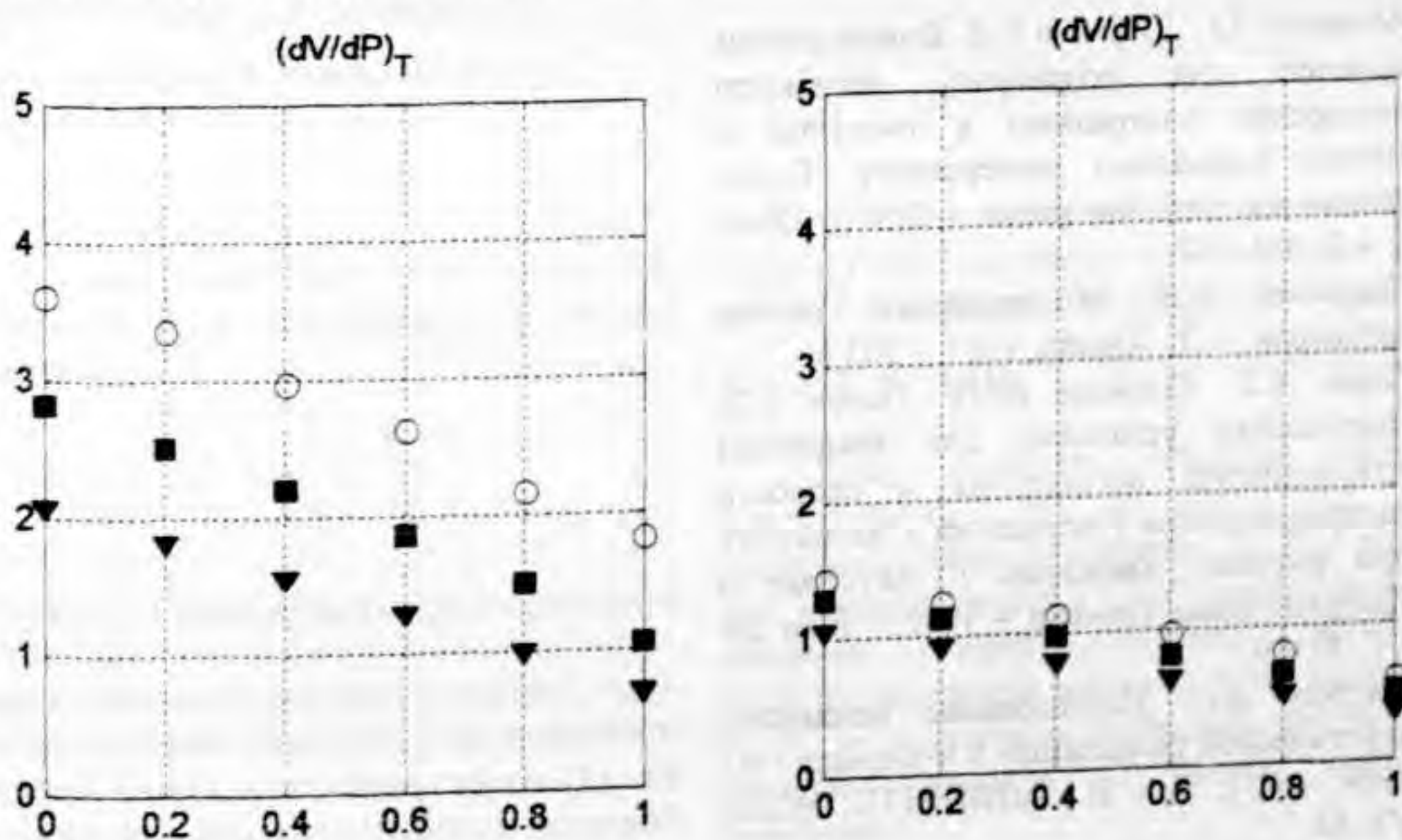


Рис 4. Концентраційна залежність $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, $\text{м}^3/\text{Па}$ в системі н-гексадекан – циклогексан при температурі $T=373\text{ К}$ і тисках $P=0.098\text{ МПа}$ (зліва) і $P=98.1\text{ МПа}$ (справа) ($\circ$ – експеримент, $\blacksquare$ – модель твердих сфер, $\blacktriangledown$ – модель твердих сфер з притяганням).

високомолекулярного компонента розчинів – н-гексадекана – за однакових тисків і температур. Отже, додавання н-гексадекану до циклогексану не повинно суттєво змінювати щільність упаковки в системі, про що свідчить майже лінійний характер концентраційної залежності $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. Слід зауважити, що

проведений аналіз є коректним лише у випадку однотипності взаємодії між молекулами компонентів розчинів. Ця умова для досліджених систем виконується.

Таким чином, аналіз пружних властивостей бінарних розчинів молекулярних рідин (лінійних та циклічних вуглеводнів), проведений з використанням експериментальних даних по швидкості поширення ультразвуку та інформаційно змістовної характеристики $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

(концентраційні залежності) свідчить про те, що в розчинах, як і в індивідуальних рідинах, пружні властивості визначаються переважно силами відштовхування між молекулами, при цьому із збільшенням тиску роль цих сил зростає. Внутрішньомолекулярні конфігураційні перетворення суттєво впливають на пружні властивості розчинів при низьких тисках.

Список використаних джерел

1. Адаменко І.І., Булавін Л.А. Фізика рідин та рідинних систем. – К.: АСМІ, 2006. – 660 с.
2. Адаменко І.І., Дубровін Є.В. Використання моделей для розрахунку швидкості поширення ультразвуку в н-гептані // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2000. – Вип. 3. – С. 361-367.
3. Смирнова Н.А. Молекулярные теории растворов. – Л.: Химия, 1987. – 335 с.
4. Голик А.З., Кузовков Ю.И., Нагин В.Я. Импульсная установка для измерения коэффициента поглощения и скорости распространения ультразвука в жидкостях при высоких давлениях // Акустика и ультразвуковая техника. – 1989. – Вып. 24. – С. 81-89.
5. Сперкач В.С. Исследование механизма акустической релаксации в н-алканах / К., 1984. – 40 с. Деп. В УкрНИИНТИ, №1280 УК-84.
6. Дашевский В.Г. Конформации органических молекул. – М.: Химия, 1974. – 432 с.
7. Adamenko I.I., Grigoriev A.N., Kuzovkov Yu.I. Description peculiarities of viscous and elastic properties of dense molecular liquids on the basis of the model of Lennard-Jones (n-6) fluid // J. Mol. Liq. – 2005. – 120, №1-3. – P. 63 – 65.
8. Юхновский И.Р., Головкин М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – К.: Наукова думка, 1980. – 372 с.
9. Wong P.T., Mantsch H.H., Snyder R.G. Effects of pressure on conformer equilibrium in liquid n-hexane // J. Chem. Phys. – 1983. – Vol. 79, №5. – P. 2369-2374.

Надійшла до редколегії 29.10.07

УДК 532.536

Альошин О.Д., доктор ф.-м. наук, професор
Білоус О.І., кандидат ф.-м. наук

Порівняльний аналіз рівнянь в'язкості рідин поблизу критичної точки

В роботі розглянуто і проведено короткий порівняльний аналіз існуючих рівнянь в'язкості рідин поблизу критичної точки. Ці рівняння співставлені з існуючими експериментальними даними в'язкості подвійних розчинів поблизу критичної температури розшарування. Це дало можливість визначити область застосування кожного з них. Зроблено висновок про кінцевість в'язкості рідин в критичній точці, що підтверджує вид рівняння в'язкості М.Фіксмана.

Ключові слова: флуктуаційна частина в'язкості, критична температура розшарування,

*E-mail: alekhin@univ.kiev.ua, o_bilous@ua.fm

Представлено акад. НАН України, д.ф.-м.н.,
проф. Булавиним Л.А.

В'язкість рідин в околі критичної точки (КТ) реально повинна бути представлена у вигляді двох доданків:

$$\eta(T) = \eta_p(T) + \eta_{fl}(T) = \eta_p \left(1 + \frac{\eta_{fl}}{\eta_p} \right), \quad (1)$$

Де $\eta_p(T) = A \exp \frac{B}{T}$ - регулярна частина в'язкості, в якій не враховуються флуктуації в системі; η_{fl} - флуктуаційна частина в'язкості. У відповідності до динамічної теорії критичних явищ [1], ця складова в'язкості пов'язана з радіусом кореляції системи $R_c = r_0 t^{-\nu}$ [2] і представляється у вигляді:

$$\eta_{fl} \sim (R_c(t))^{z_\eta} = r_0^{z_\eta} (t)^{-\nu z_\eta}, \quad (2)$$

де $\nu=0,63$ і $z_\eta \approx 0,06$ - критичні показники радіуса кореляції та в'язкості; $t = (T - T_c)/T_c$, T_c - критична температура системи.

У відповідності до [3, 4] необхідною умовою степеневі розбіжності $\eta_{fl}(t)$ (2) поблизу КТ являється сильна нерівність $\eta_{fl}(t) \gg \eta_p$. Але в

радіус кореляції
УДК 532.536

Alekhin A.D., Dr. of Sci., Prof.
Bilous O.I., Ph.D.

Comparative analysis of equations for viscosity of liquid near the critical point

The short comparative analysis of the existing equations of viscosity of liquid near the critical point has been made in the work. These equations have been compared with existing experimental data of the viscosity of binary solutions near the consolute critical temperature. This gave possibility to determine the range of application for each of them. It has been concluded that the finiteness of the viscosity of liquid at the critical point, which confirms the form of the equation of the viscosity of M.Fixman.

Keywords: fluctuation part of viscosity, the consolute critical temperature, correlation length

реальних умовах проведення експерименту в області ($t \geq 10^{-5}$) ця умова не виконується. Реально в цій області температур відношення

$$\frac{\eta_{fl}}{\eta_p} \approx (0,15 \div 0,2).$$

Тому в'язкість системи $\eta(t)$, яка представлена в (1), не може бути описана степеневим співвідношенням (2). Для подолання цієї невідповідності в [5, 6] запропоновано, що аномалія в'язкості поблизу КТ носить мультиплікативний характер. Тоді, відповідно до [5, 6], ця пропозиція приводить до того, що за степенем законом (2) може змінюватись відношення:

$$\frac{\eta}{\eta_p} = (q R_c)^{z_\eta} = (q r_0)^{z_\eta} (t)^{-\nu z_\eta}, \quad (3)$$

де q - параметр, що має розмірність хвильового вектора.

На жаль в [5, 6] конкретно не визначена температурна область застосування цього співвідношення.

Як видно з (3) при підході до критичної температури ($t \rightarrow 0$) відношення $\frac{\eta}{\eta_p}$ необмежено зростає. Однак аналіз великої кількості експериментальних даних $\eta(t)$ свідчить про скінченність величини в'язкості в критичному стані. Відносно скінченності в'язкості в критичному стані свідчать і розрахунки М.Фіксмана [7], які, на жаль, не знайшли необхідної уваги з боку сучасних авторів динамічної теорії критичних явищ.

В зв'язку з цим в даній роботі базуючись на теоретичних ідеях М.Фіксмана [7] запропоновано напівемпіричне рівняння для флуктуаційної частини в'язкості у вигляді [8]:

$$\eta_{\text{фл}} = \frac{\Delta\eta_0 t^{-\nu}}{(1 + q^2 R_c^2)^{1/2}} \quad (4)$$

Це співвідношення, як і достатньо складне інтегральне рівняння М.Фіксмана [7], враховує просторову дисперсію системи, що забезпечує скінченність в'язкості в критичній точці. До того ж в граничному випадку $(qR_c)^2 \ll 1$ (4) збігається з результатами М.Фіксмана $\eta_{\text{фл}}(t) \sim R_c \sim t^{-\nu}$.

Перевіримо тепер відповідність рівнянь (2) і (4) існуючим експериментальним даним $\eta(t)$ і визначимо температурну область їх застосування. Необхідно відмітити, що ця область повинна відповідати також і області мультиплікативності в'язкості (3), яку введено в [5, 6]. Для цього спочатку із співставлення між собою співвідношень (1) та (3) знаходимо вигляд флуктуаційної частини в'язкості:

$$\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1} = [(qr_0)^{-2} t^{-\nu Z_s} - 1]^{-1}, \quad (5)$$

Порівняємо вигляд цієї залежності з експериментальними даними флуктуаційної частини в'язкості подвійних розчинів: метанол-гептан і триметилперидин-важка вода поблизу критичної температури розшарування [9, 10]. Ці дані представлено на рис. 1 і 2. Параметри співвідношень (4), (5) дано в табл.1. Як видно

теоретичні криві $\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1}(t)$ описують експериментальні дані [9, 10] лише у вузькій області температур $10^{-5} < t < 10^{-4}$, де величина $qR_c \gg 1$.

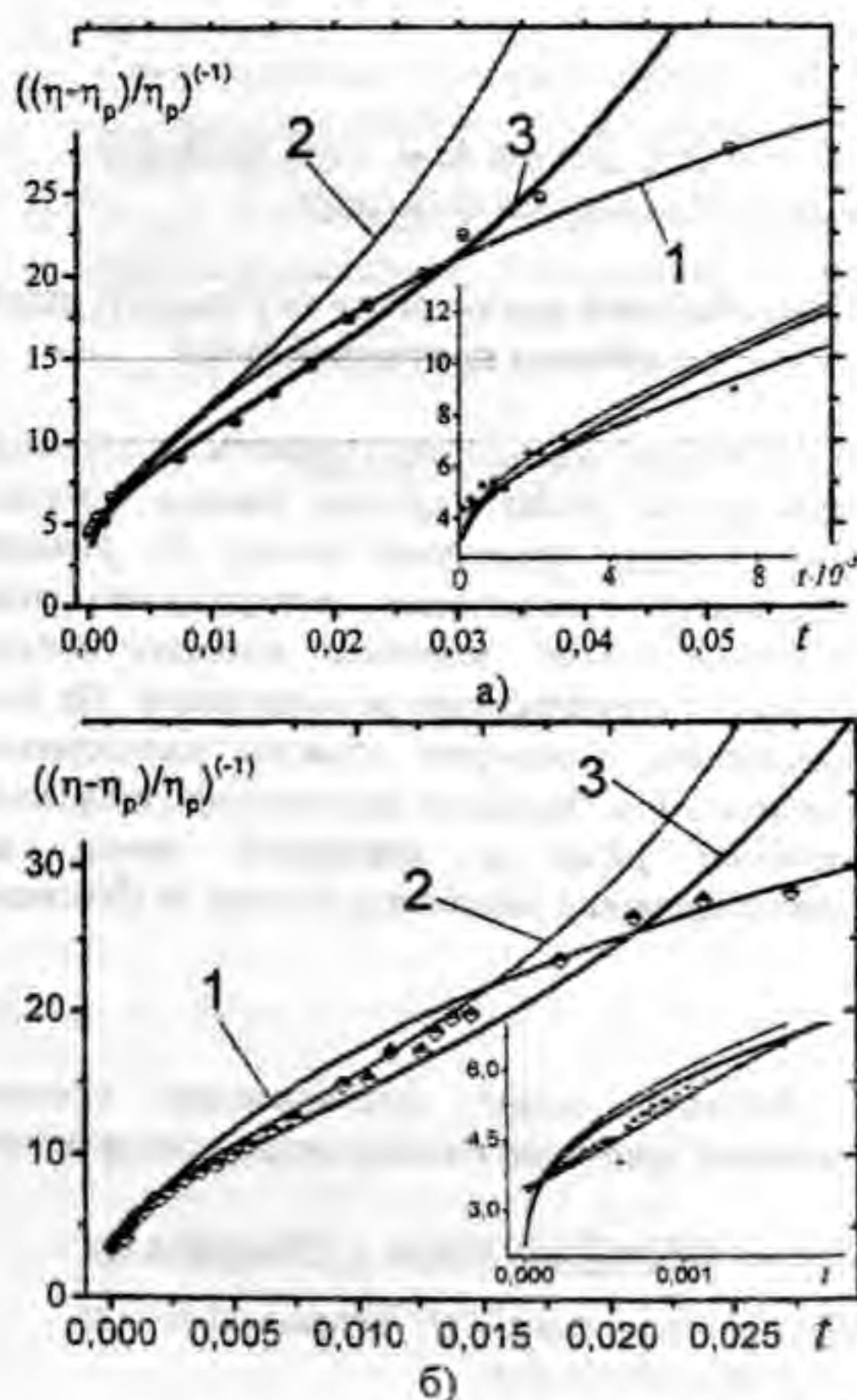


Рис. 1. Залежність відношення $\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1}$ від зведеної температури: а) подвійний розчин метанол-гептан, б) подвійний розчин триметилперидин+важка вода (ЗМП+D₂O).

Точками представлені експериментальні дані, а кривими результати теоретичного аналізу: (крива 1) – відповідно до рівняння (4), (крива 2) – відповідно до рівняння (5), (крива 3) – відповідно до рівняння (7). Тоб-то саме цю область температур можна охарактеризувати як область мультиплікативності в'язкості [5, 6].

Як видно з рис.1, 2 в області $t < 10^{-5}$, коли відношення $\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1} \rightarrow 0$ експериментальні дані

$\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1}$ відхиляються від теоретичної кривої (3) та прагнуть до постійної границі $\left(\frac{\eta_{\text{фл}}}{\eta_p}\right)^{-1}(t \rightarrow 0) \rightarrow \text{const.}$

При віддаленні від критичної точки в області параметру $t > 10^{-4} \div 10^{-3}$ спостерігається систематичне віддалення теоретичної кривої (3) від результатів експерименту.

Для того, щоб зменшити цю розбіжність вводиться в роботі [11] кросоверна функція $\Phi(x)$ параметру $x=(qR_c)^{-1}$. У відповідності до [12] кросоверна функція може бути представлена у вигляді:

$$\Phi(x) = (1 + Ax) = (1 + Bt^\nu). \quad (6)$$

Тоді на підставі (4) та (5) маємо:

$$\left(\frac{\eta_{\phi_1}}{\eta_p}\right)^{-1} = [(qr_0)^{z_\eta} t^{-\nu z_\eta} \Phi(x) - 1]^{-1} = \quad (7)$$

$$[(qr_0)^{z_\eta} t^{-\nu z_\eta} (1 + Bt^\nu) - 1]^{-1},$$

Ця функція (7) в області температур $t > 10^{-4}$ показана на рис. 1, 2. Як видно лише завдяки використанню кросоверної функції $\Phi(x)$ вдається узгодити теоретичні розрахунки (3) та (5) з експериментальними даними $\eta(t)$ в широкій області температур $t = 10^{-4} \div 10^{-2}$.

Перевіримо тепер відповідність формули (4) [8] представленим експериментальним даним $\eta(t)$ рис. 1, 2. Як видно теоретична крива (4) адекватно описує експериментальні дані $\eta(t)$ в області температур $t = 10^{-4} \div 10^{-2}$ без врахування кросоверної функції $\Phi(x)$ (6), а також забезпечує скінченність в'язкості в критичній точці.

Список використаних джерел

1. P.C.Hohenberg, B.I. Holperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
2. Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. – М.: Наука, 1982. – 381 с.
3. R. Perl, R.A. Fettel, Phys. Rev. A. **6**, 2358 (1972).
4. F. Garisto, R. Kapral, Phys. Rev. A. **14**, 2350 (1976).
5. T. Ohta, J. Phys. C **10** **14**, 791 (1977).
6. P. Colmettes, Phys. Rev. Lett. **39**, 1151 (1977).
7. M.Fixman, J. Chem. Phys **36**, 1961 (1962).

Таким чином на основі проведених співставлень теоретичних співвідношень (3), (5), (7) і (4) з експериментальними даними поведінки в'язкості рідин поблизу КТ можуть бути зроблені наступні висновки:

1. Рівняння в'язкості (3), яке отримано в наближенні мультиплікативного характеру в'язкості [5, 6] за умови коли $\left(\frac{\eta_{\phi_1}}{\eta_p}\right) \gg 1$ може бути використано лише в близькому околі критичної точки $t \approx 10^{-5}$.
2. При віддаленні від критичної температури в область температур $t = 10^{-4} \div 10^{-2}$ для співставлення теорії (5), (7) з результатами експерименту необхідно використовувати кросоверну функцію $\Phi(x)$ (6).
3. Використання вигляду флуктуаційної частини в'язкості (4), яке якісно узгоджується з результатами ранніх робіт М.Фіксмана [7] дає можливість адекватно описати експериментальні дані $\eta(t)$ в усьому діапазоні температур $t = 10^{-2} \div 10^{-5}$, включаючи скінченне значення в'язкості при $t=0$.

8. О.Д. Альохін, Вісник Київського університету. Серія фізико-математичних наук **1**, 74 (2004).
9. А.Д. Алехин, О.И. Билоус, Сборник трудов международной конференции "Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах", 162 (2005).
10. О.Д. Альохін, В.С. Сперкач, О.І. Білоус, Вісник Київського університету. Серія фізико-математичних наук **3**, 374 (2000).
11. D. Beysens, G.Poladin, A. Bourgon, J. Phys. Lett. **44**, 649 (1983).

Надійшла до редколегії 14.11.07

УДК 532.536

Атамась* Н.О., канд.фіз.-мат.-наук,
Атамась О.О., канд.фіз.-мат.наук.

Енергетичні та температурні особливості сильно розбавленого водного розчину пропанолу

Метод Монте Карло використаний для вивчення процесів гідрофобної гідратації пропанолу у воді в інтервалі температур від 283К до 323К при концентрації пропанолу $x_{cl}=0.004$ м.д.. З комп'ютерного експерименту отримані енергетичні характеристики для взаємодій між молекулами різних компонент розчину, на основі яких проаналізовано вплив температури молекули пропанолу на зміну локальної структури розчину.

Ключові слова: Монте Карло, водний розчин, пропанол, енергія міжмолекулярної взаємодії

*E-mail: atamasphys@mail.univ.kiev.ua

Дослідження гідратаційних ефектів навколо молекул неелектролітів проводиться вже достатньо довгий час. Використовуючи комп'ютерне моделювання існує можливість досить ефективно вивчати статистичні, енергетичні та динамічні властивості розчинів. Практично важливим класом неелектролітів, які використовуються для такого роду досліджень є органічні молекули, а саме, аміно-окисли та спирти. Ці молекули мають одночасно як гідрофільну полярну групу так і гідрофобну групу, що утворює своєрідний баланс контрастних властивостей. На практиці такий баланс гідрофільних та гідрофобних властивостей зустрічається при дослідженнях довгих біополімерних молекул у воді [1]. Першим кроком до розуміння процесів, які відбуваються у воді при розчиненні біологічних об'єктів є використання відносно простих біфункціональних молекулу. В якості модельних можуть виступати молекули органічних спиртів з відносно невеликою метильно-етильною групою. З цієї точки зору, має сенс детальне дослідження структури водного розчину навколо спиртових молекул. Найбільш широко проведені дослідження для найпростіших представників ряду спиртів, а саме для метилового та етилового спиртів. Ці дослідження показали існування аномальних термодинамічних властивостей та зміну локальної структури розчину в залежності від температури та концентрації введеної

N.A.Atamas., A.A.Atamas,

Monte Carlo Study of Diluted Water- Propanol Solution at Various Temperatures.

In the present study includes results from Monte Carlo simulations study of hydrophobic hydrations of two-component systems water-propanol at various temperatures. The analysis of the energetics of solutions were done. Conducted calculations allowed us to obtain information on the structural characters of the two-component water-propanol solution at different temperatures. The influence of polar solvent molecule on water's local structure and the hydrogen bonds nets were analyzed.

Key Words: Monte Carlo, water, propanol solution.

речовини. Але дослідженням енергетичних властивостей розчинів приділено дуже мало уваги.

Метою цієї роботи є дослідження впливу введеної молекули на зміну сітки водневих зв'язків у воді, її вплив на зміну повної енергії міжмолекулярної взаємодії при різних температурах.

Метод дослідження

Інформація про локальну структуру рідини та енергетичні властивості розчину може бути одержана як експериментальним так і теоретичним шляхом. Комп'ютерне моделювання дає можливість проводити детальний аналіз локальної структури складних багатокомпонентних систем. За допомогою метода Монте Карло можуть бути розраховані радіальні функції розподілу молекул у рідині, які в свою чергу дають інформацію про довжини міжатомних зв'язків та про число найближчих сусідів. Також цей метод дозволяє розрахувати повну енергію міжмолекулярної взаємодії, її складові та термодинамічні властивості системи.

Модель

Для молекул води та молекули пропанолу при розрахунках нами було використано модель трьох силових центрів, в якій атоми кисню О,

водню Н та група C_3H_7 представлені окремими силовими центрами [2]. Вважалось, що між-атомні зв'язки в молекулах є жорсткими, а міжмолекулярна взаємодія є парною та адитивною. При проведенні розрахунків взаємодія між силовими центрами описувалась оптимізованим потенціалом для рідких систем OPLS. Міжмолекулярна взаємодія в системі може бути представлена в вигляді суми Леннард-Джонсової U_{LJ} та кулонівської U_{Coul} складових [3]:

$$U = U_{LJ} + U_{Coul} = \sum_{ij} 4\epsilon_{ij} \left[\left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma_{ij}}{r_{ij}} \right)^6 \right] + \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (1)$$

де $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ – параметри потенціала Леннард-Джонса, r_{ij} – відстань між взаємодіючими атомами, q_i – заряд на атомі. Використанні в наших розрахунках геометричні параметри молекул, а також заряди та параметри σ та ϵ а також значення заряду на силових центрах були представлені групою Йоргенсена у роботах [3,4]. Параметри σ і ϵ для взаємодії між атомами води та пропанолу розраховувались з використанням комбінаційного правила Лоренца-Бертло [5].

Деталі комп'ютерного експерименту.

При проведенні комп'ютерного експерименту розчин вода-пропанол було представлено 124 молекулами води та однією молекулою пропанолу. Система вода-пропанол моделювалась при температурах 283К, 293К, 303К і 313К, густини яких відповідали експериментальним при даних температурах [6]. Взаємодія між атомами розраховувалась за допомогою (2). Для генерації нової конфігурації ансамблю, нами довільним чином обиралась молекула, яку ми обертали навколо однієї з її осей в межах ± 0.15 град, а потім зміщували центр координат молекули в межах ± 0.15 Å. Використання такого методу генерації нових конфігурацій дозволяє одержати біля 50% вдалих змін конфігурацій. Всі розрахунки проводились на наступною схемою: $2 \cdot 10^6$ кроків для врівноваження системи в NVT ансамблі, наступні 10^6 кроків – для одержання структурних даних і наступні $3 \cdot 10^6$ кроків для одержання енергетичних властивостей досліджуваної системи.

Енергія міжмолекулярної взаємодії в системі вода-пропанол при різних температурах.

Повна енергія міжмолекулярної взаємодії U в системі вода-пропанол може бути представлена в вигляді суми взаємодій молекул води між собою U_{WW} та взаємодії молекул води з молекулою пропанолу U_{PW} . З іншого боку U також можна представити в вигляді суми атом-атомних взаємодій:

$$U = U_{PW} + U_{WW} = U_{Ow-Ow} + U_{Ow-Hw} + U_{Hw-Hw} \quad (2) \\ + U_{Ow-Op} + U_{Ow-Hp} + U_{Ow-Cp} + U_{Hw-Hp} \\ + U_{Hw-Op} + U_{Hw-Cp}$$

а саме взаємодій U_{PW} – енергія взаємодії між атомами води та пропанолу, U_{WW} – енергія взаємодії між атомами молекули води, U_{Ow-Ow} – енергія взаємодії між атомами кисню молекули води, U_{Ow-Hw} – енергія взаємодії між атомами кисню та атомами водню молекули води, U_{Hw-Hw} – енергія взаємодії між атомами водню молекули води, U_{Ow-Op} – енергія взаємодії між атомами кисню води та атомом кисню молекули пропанолу, U_{Ow-Hp} – енергія взаємодії між атомами кисню води та атомами водню молекули пропанолу, U_{Ow-Cp} – енергія взаємодії між атомом кисню молекули води та C_3H_7 групою молекули пропанолу, U_{Hw-Hp} – енергія взаємодії між атомами водню молекули води та атомами водню молекули пропанолу, U_{Hw-Op} – енергія взаємодії між атомами водню молекули води та атомами кисню молекули пропанолу, U_{Hw-Cp} – енергія взаємодії між атомами водню води та метильно-етильною групою C_3H_7 молекули пропанолу.

Таблиця 1.

Повна енергія міжмолекулярної взаємодії U системи вода-пропанол та її складові U_{PW} , U_{WW} , U_{LJ} , U_{Coul} (ккал/мол) при різних температурах.

T, K	U	U_{PW}	U_{WW}	U_{LJ}	U_{Coul}
283	-6,1	-0,1	-5,9	-1,4	-4,6
293	-6,0	-0,2	-5,9	-1,5	-4,5
303	-6,0	-0,1	-5,8	-1,5	-4,5
313	-5,9	-0,1	-5,7	-1,5	-4,4

Як видно з табл.1, найбільший внесок в повну енергію міжмолекулярної взаємодії системи вода-пропанол дає кулонівська взаємодія між зарядами на силових центрах молекул. Також встановлено, що з збільшенням температури відбувається зменшення абсолютного значення повної енергії міжмолекулярної взаємодії та її складових U_{HW} , U_{COUL} .

В той же час складова енергії, яка відповідає за взаємодію між молекулами води та пропанолу U_{PW} незначним чином зростає при температурах 293К и 303К за рахунок взаємодії між воднем молекули води та киснем молекули пропанолу.

відповідає енергії взаємодії між атомами кисню та водню різних молекул води.

Така взаємодія може приводити до утворення сильного водневого зв'язку між молекулами води (див.табл.2-3). Абсолютні значення енергій взаємодій вода-пропанол завжди суттєво менше абсолютних значень енергій міжмолекулярних взаємодій вода-вода, що пояснюється малим вмістом пропанолу у воді. Енергії взаємодій між молекулами води та молекулою пропанолу U_{HW} , U_{OW-Cp} та U_{OW-Hp} , які можуть приймати участь в утворенні водневого слабкого зв'язку мають один порядок величин, який менше енергії взаємодії вода - вода на два порядки.

Таблиця 2

Енергії міжатомних взаємодій U_{OW-OW} , U_{OW-HW} , U_{OW-Hp} , U_{OW-Cp} (kcal/mol) в системі вода-пропанол при різних температурах

T, К	U_{OW-OW}	U_{HW-HW}	U_{OW-HW}	U_{OW-Cp}
283	7.2	1.8	-14.6	-6.0
293	7.3	1.8	-14.5	-5.8
303	7.2	1.8	-14.5	-5.8
313	7.3	1.8	-14.4	-5.9

Таблиця 3

Енергії міжатомних взаємодій U_{OW-Hp} , U_{OW-Op} , U_{HW-Cp} , U_{OW-Cp} , U_{HW-Op} , U_{HW-Hp} (kcal/mol) в системі вода-пропанол при різних температурах

T, К	U_{OW-Hp}	U_{OW-Op}	U_{HW-Cp}	U_{HW-Op}	U_{HW-Hp}
283	-3.4	9.7	3.0	-4.9	1.7
293	-3.3	9.4	2.9	-4.7	1.6
303	-3.3	9.4	3.0	-4.8	1.6
313	-3.3	9.4	3.0	-4.7	1.6

Абсолютне значення Леннард-Джонсової складової U_L повної енергії є більшим при температурах 293К, 303К та 313К ніж при 283К. Зазначимо, що найбільше абсолютне значення має складова повної енергії взаємодії U_{OW-HW} , яка

Список використаних джерел

1. Stubbs J., Bin Chen, Potoff J. // Fluid Phase Equilibria. – 2001. – № 183. – С.301-309.
2. Yoshida K., Yamasuchi T. // J. Phys. Chem. – 2002. – № 106. – С.5024-5049.
3. Jorgansen W. // J. Am. Chem. Soc. – 1981. – № 103. – С. 335-340.
4. Jorgansen W. // J. Phys. Chem. – 1986. – № 90. – С. 1276-1281.
5. Allen M.P., Tildesley D.Y. Computer Simulation of Liquids. – Oxford: Clarenton Press, 1995, – 620с.
6. Timmermans J.. Physical-Chemical Constants of Binary Systems . – London : Inter-science Publishers LTD, 1978, –1320с.

Надійшла до редколегії 29.09.07

УДК 539.2:539.4

Байдулаєва А., канд. фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник
Велешук В.П., аспірант
Власенко О.І., доктор фіз.-мат. наук, професор
Ляшенко О.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент
Даулетмуратов Б.К., канд. фіз.-мат. наук, докторант
Чуприна Р.Г., інженер

Співставлення процесів акустичної емісії та флуктуацій квантового виходу і струму в гетероструктурах.

В роботі виявлено кореляцію між процесом виникнення акустичної емісії (АЕ) та флуктуаціями квантового виходу та струму, що вказує на однаковий механізм їх походження. Методом АЕ встановлено наявність декількох активаційних механізмів (джерел) АЕ, яким відповідають фізичні процеси локальної перебудови структури матеріалу з різною енергією активації: АЕ при деградації структури, АЕ при пробі, АЕ при різкому охолодженні після руйнування структури.

Ключові слова: акустична емісія, гетероструктура

Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАН України.
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: vvvit@ukr.net

Детермінований зовнішній вплив приводить до детермінованої реакції лінійної системи [1]. Більшість відомих фізичних процесів у твердих тілах є детермінованими - тобто в рамках певної системи рівнянь вони можуть бути описані (передбачені) виходячи із заздалегідь заданих початкових умов [1]. Одним з відомих виключень є граничне нелінійне й хаотичне явище - акустична емісія (АЕ) матеріалів. Традиційні теоретичні підходи до акустичної емісії (АЕ) визначають її або як нелінійний, або як абсолютний-хаотичний процес, що викликано складністю точного формулювання задачі АЕ [2].

Незважаючи на широке застосування методу АЕ, на сьогодні майже відсутня інформація про природу та механізми утворення та спрацьовування джерел АЕ в складних структурах, зокрема в світловипромінюючих напівпровідникових гетероструктурах.

Однією з істотних проблем виготовлення та

А. Baidullaeva, Ph. D., senior researcher
V.P. Veleschuk, post-graduate stud.
A.I. Vlasenko, doctor sciences, professor
*O.V. Lyashenko, Ph. D., senior lecturer
B.K. Dauletmuratov, Ph. D., senior researcher
*R.G. Chuprina, engineer

Comparison of the processes of acoustic emission and fluctuations of quantum yield and current in heterostructures.

In this paper it is revealed correlation between processes of acoustic emission (AE) occurrence and fluctuations of quantum yield and current, which indicate on their common mechanism of an origin. By method AE established presence of several activity mechanisms (sources) AE to which there correspond physical processes with various activation energy: AE at degradation, AE at breakdown, AE at sharp cooling after destruction of structure.

Key Words: acoustic emission, heterostructure

експлуатації при критичних режимах структур на основі сполук A^3B^5 є локальні неоднорідності провідності в об'ємі, різниця модулів пружних сталих, коефіцієнтів термічного розширення та постійних решіток на границях гетеропереходів, теплового опору активного середовища та тепловідводу, що приводить до значного локального градієнту температур ($1000\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{cm}$ - $7000\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{cm}$) і до локальних термомеханічних напруг (більше 10^7 Па) при протіканні струму.

Це значно прискорює деградацію їх люмінесцентних та електричних характеристик, знижує коефіцієнт корисної дії, ефективність та тривалість функціонування [3]. Явище нерівномірного розподілу густини струму в мезаструктурі (рис.1) відоме як "current crowding" [4] призводить разом з вищезазначеними причинами до значних локальних термонапруг та небажаної локальної мікропластичності матеріалу при критичних густинах струму [5-7].

Попередніми дослідженнями показано, що з АЕ пов'язана деградація [7,8] і флуктуації [9] електричних та люмінесцентних характеристик (зокрема - квантового виходу), а також струмові шуми неоднорідно - термонапружених лазерних та діодних гетероструктур на основі напівпровідникових сполук A^3B^5 [10].

В роботі проведено аналіз акустичної емісії та флуктуацій квантового виходу і струму в гетероструктурах на основі сполук A^3B^5 при протіканні постійного прямого струму.

Об'єктами досліджень були $InGaN/GaN$ та $GaAsP/GaP$ світловипромінюючі структури. Сигнали АЕ реєструвалися п'єзодатчиком та акустоемісійним приладом у смузі частот 200-500 кГц при загальному підсиленні 69-73 дБ, надходили на комп'ютер і для аналізу «тонкої структури» сигналів АЕ, струмових і оптичних шумів додатково оброблялися.

На рис.2 та 3 наведені часові фрагменти сигналів після комп'ютерної обробки сигналів АЕ, що знижує вплив апаратури реєстрації.

Зокрема, на рис.2 представлені залежності (кореляції, [12]) між флуктуаціями струму та квантового виходу з АЕ, що не можуть бути зведені до функціональних, оскільки обидві величини залежать від інших, додаткових (на сьогодні – достеменно невідомих) факторів. Часовим границям групи сигналів АЕ (події АЕ) відповідають значні одиничні вибухові флуктуації струму, а найбільша щільність безперервного струмового шуму досягається пізніше – при загасанні АЕ.

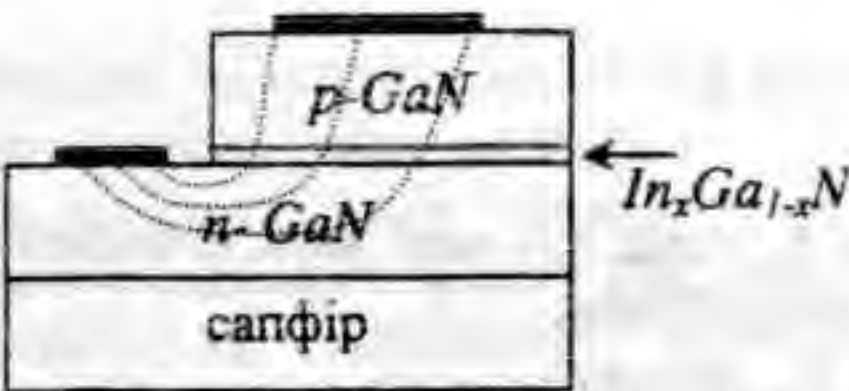


Рис.1 Схема $InGaN/GaN$ гетероструктури

Обговорення

У більшості випадків спостерігається часова кореляція (рис.3) між флуктуаціями (А и В) квантового виходу (1), які відповідають групам сигналів неперервної АЕ (2) із затримкою 25-75 мкс, що узгоджується з отриманими раніше результатами [10].

Флуктуації квантового виходу на рис.3 мають вигляд інтегруючої кривої до сигналів (осциляцій) АЕ і фактично відповідають поняттю «подія АЕ» - часовому інтервалу випромінювання пружних хвиль, що відповідає акту спрацьовування джерела АЕ.

Незважаючи на значні розходження у формі зареєстрованих флуктуацій квантового виходу, струмових шумів і акустичної емісії, які не дозволяють нам коректно ввести чисельну міру (кореляційну функцію, [12]), часова кореляція між ними більш ніж очевидна, оскільки інтервал між подіями АЕ звичайно в 10^2-10^4 разів перевищує час події АЕ.

Швидке виникнення структурних дефектів веде до флуктуацій струму за рахунок коливання диференційного опору структури, відповідно дані відхилення струму призводить до флуктуацій

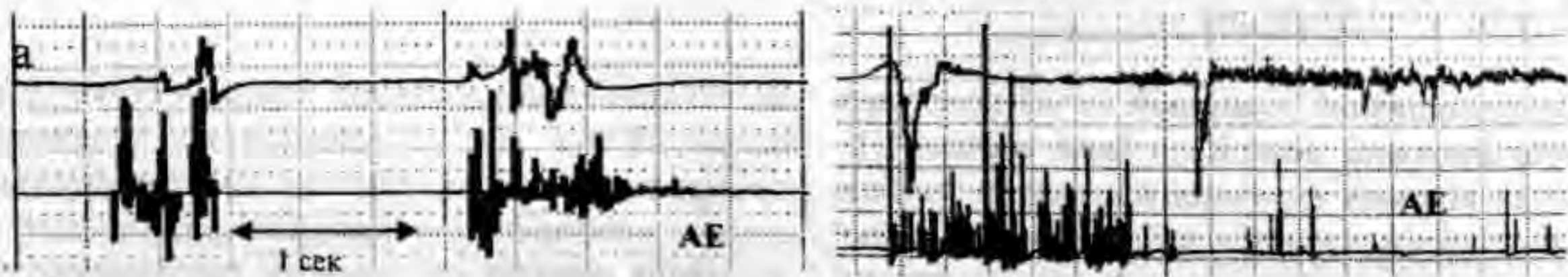


Рис.2 Кореляція АЕ та флуктуацій квантового виходу (а), АЕ та флуктуацій струму (б) в гетероструктурі $InGaN/GaN$ при 150 мА.

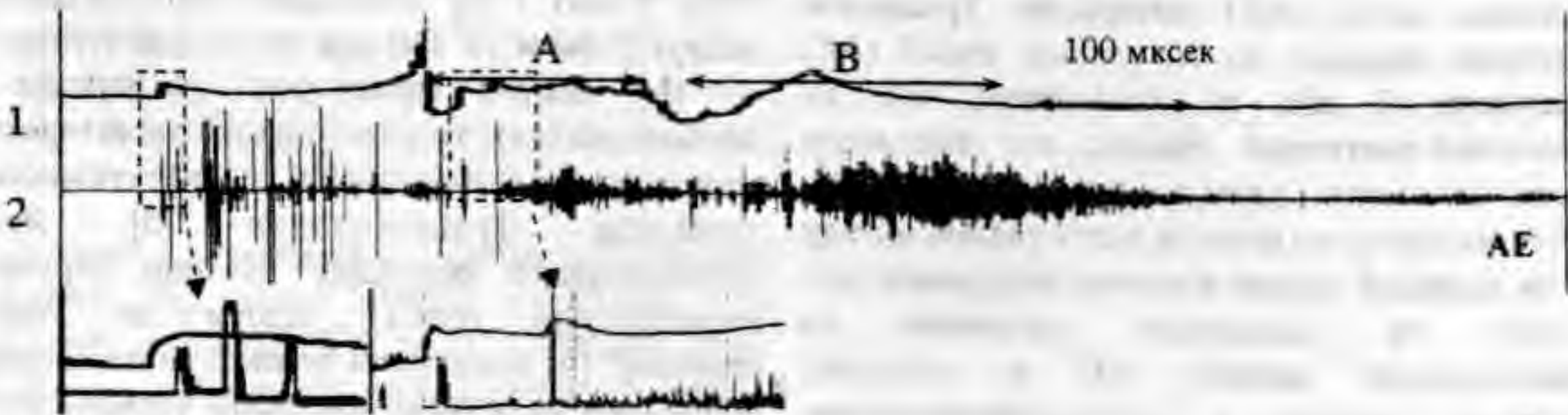


Рис.3 АЕ (2) та осциляції квантового виходу (1) при деградації та пробої $InGaN/GaN$ структури.

інжекції носіїв у квантову яму, які випромінювально рекомбінують відповідно до флуктуацій квантового виходу.

Можливе також шунтування *p-n*-структури за рахунок виникнення й розриву провідних каналів [3]. В сумі дані одночасні процеси (з можливими іншими) дають спостережувану кореляцію АЕ, флуктуацій квантового виходу та струму.

При покроковому навантаженні прямим постійним струмом були виділені три часові етапи АЕ, і для кожного з них розраховані основні параметри АЕ (табл.1), та гістограми амплітудного розподілу сигналів АЕ (рис.4).

В табл.1 використані наступні позначення: T – середня тривалість процесу АЕ, N – середня кількість імпульсів АЕ протягом часу T , $\dot{N} = N/T$ – активність АЕ, $\Sigma_i^n A_i/n$ – середнє значення амплітуди сигналів АЕ, $V = \Sigma_i^n A_i/n \cdot \dot{N}$ – ефективне значення АЕ.

Табл.1. Параметри АЕ для різних етапів струмового навантаження гетероструктур

Параметри АЕ	T , с	N , імп	$\dot{N}$, імп/с	$\Sigma_i^n A_i/n$, В	V , імп·В/с
Процес					
Деградація при 100 мА	4.5	24	5	0.0126	0.063
Пробій	1.2	64	53	0.96	50.9
Пробій з проплавом	3.3	70	21	0.788	16.5
Терморелаксація	4	2	1	0.184	0.18

На гістограмі амплітудного розподілу сигналів АЕ в області 10 дБ (рис.4 а) спостерігається максимум при прямому струмі $I \approx 100$ мА, що в 10 разів перевищує номінальний струм структури.

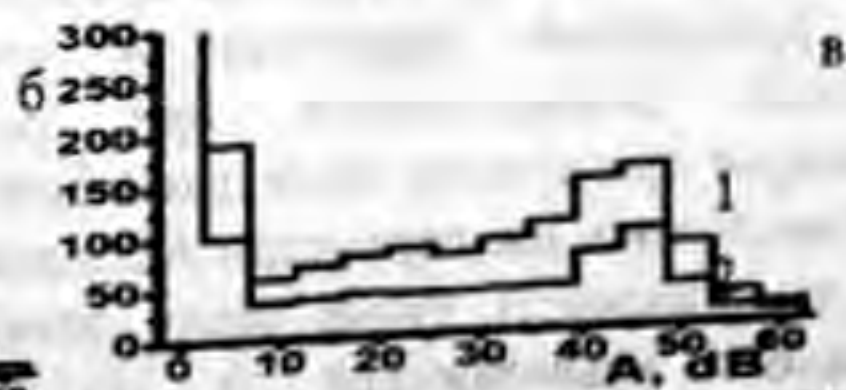
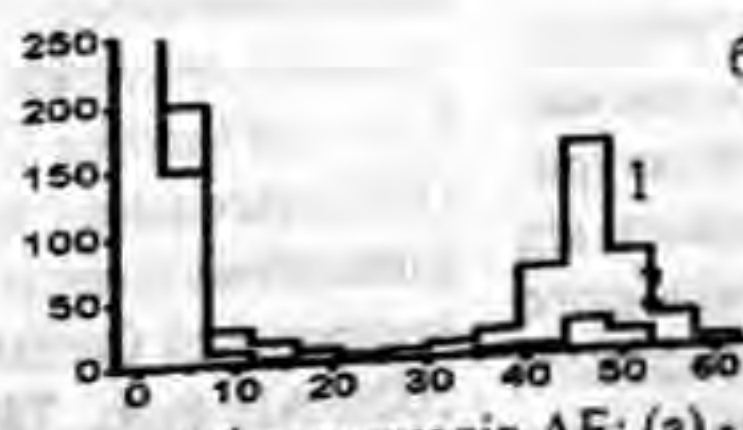
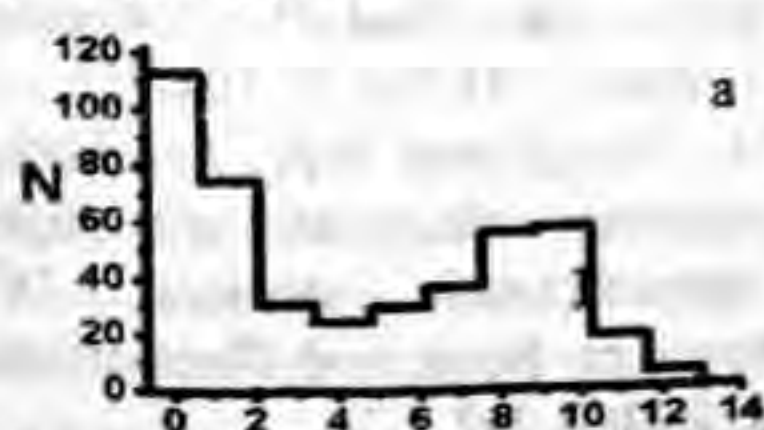


Рис.4. Гістограми амплітудного розподілу сигналів АЕ: (а) – при 100 мА, (б, в) – при 200 – 250 мА. Час накопичення а – деградація, б – деградація та пробій, в – деградація та пробій з проплавом. Час накопичення 120 сек (1) та 300 сек (2).

Відомо, що в даній області струмового навантаження світлодіодних структур (80-120 мА та більше) відбувається зародження структурних протяжних дефектів і нерівномірний рух дислокацій [5-7]. Тому імовірно максимум в області 10 дБ відповідає утворенню й нерівномірному руху дислокацій у градієнтах теплових, пружних та електричних полів в активній області гетероструктури.

При інтенсивній деградації та пробіі гістограми АЕ (рис.4 б, в) мають максимум в

області 45 дБ, що вказує на процес із іншою енергією активації джерел АЕ.

У момент інтенсивної деградації та пробію температура локальних областей кристалу досягає 600°C [8, 11], тому можливим стає локальний тепловий пробій, часткове закорочення *p*- і *n*-областей, локальне плавлення надстехіометричних виділень фаз з набагато нижчою температурою плавлення (збагачені галієм або індієм).

Для вивчення динаміки АЕ в кожному наступному підвищенні (кроці) значення струму через зразок $I_{i+1} = (1.5 \dots 2) \cdot I_i$. При кожному значенні струму I_i для забезпечення виконання закону Кайзера АЕ вимірювалась до спрацювання всіх потенційно активних (для даної I_i) джерел АЕ, тобто до припинення АЕ. Час між змінами струму становив 300 с. (рис.5)

На рис.5 а видно, що при покроковому стрибкоподібному збільшенні струму I до I_{dc} – густини струму руйнування, зменшується час затримки виникнення АЕ t_d – тобто час індивідуального „розвитку” джерел АЕ.

Одночасно відбувається зміна інтенсивності АЕ N в послідовних часових проміжках. Якщо для малих надпорогових $I > I_{th}$ відбувається монотонне збільшення N з часом та наступне загасання, то при $I \sim I_{dc}$ інтенсивність АЕ має максимум вже в перші 10 с. Тривалість АЕ також змінюється в наступних кроках збільшення струму, а саме – при $I > I_{th}$ монотонно зростає, досягаючи максимуму при $I \sim I_{dc}$ (одночасно N швидко зростає). В заключній фазі експерименту при значенні $I = I_{dc}$ тривалість АЕ різко

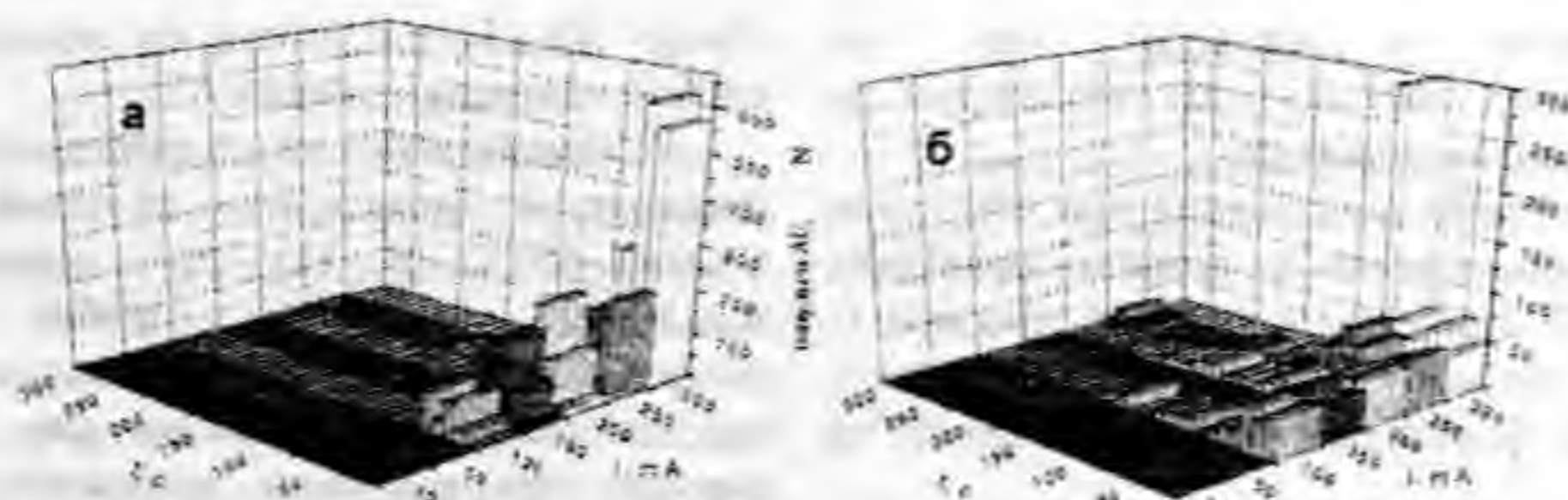


Рис. 5. Часові залежності інтенсивності АЕ при покроковому збільшенні струму через зразки 1 (а) та 2 (б) $GaAs_{0.15}P_{0.85}/GaP$ гетероструктур.

скорочується, а N має максимум в перші 10 с.

На рис.5 б представлено інший типовий варіант динаміки АЕ, для якого крок підвищення струму та час між підвищеннями струму були такими ж як для гетероструктур на рис.5 а, але через індивідуальні особливості цих гетероструктур були вибрані „невірно”. Так, рис.5 б відповідає “занадто швидкому” підвищенню струму та “занадто великому” кроку цього підвищення, що призвело до досягнення максимуму N вже в першому часовому проміжку (для струмів $I \geq 10 \cdot I_{\text{ном}}$) та швидкого руйнування.

Висновки

В роботі виявлено кореляцію між процесом виникнення акустичної емісії та флуктуаціями квантового виходу та струму, що вказує на загальний механізм їх походження.

Виявлено наявність декількох активаційних механізмів (джерел) АЕ, яким відповідають наступні фізичні процеси локальної перебудови структури матеріалів з різною енергією активації: АЕ при деградації структури, АЕ при пробої, АЕ після руйнування структури – утворення дислокацій розвантаження при релаксації термонапруг при різкому охолодженні структури.

Встановлено, що параметри АЕ залежать від рівня та швидкості зміни рівня зовнішнього фіксованого навантаження та від кількості однотипних джерел АЕ, активованих цим впливом на протязі часу його дії.

Список використаних джерел

1. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир. 1988. – С. 240.
2. Ляшенко О.В. Акустична емісія матеріалів зі складною структурою дефектів як детермінований хаотичний релаксацийний процес. Структурна релаксація в твердих тілах // 36. наук. праць, ред. Мозговий О.В.- 2006.- Вінниця: ТОВ "Планер", С. 29-31
3. Бочкарева Н.И., Ефремов А.А.,

- Ребане Ю.Т., Горбунов Р.И., Ключков А.В., Шретер Ю.Г. Неоднородность инжекции носителей заряда и деградация голубых светодиодов // ФТП. – 2006. – 40 №1 – С.122–127
4. Guo X., Schubert E.F. Current crowding in $GaN/InGaN$ light emitting diodes on insulating substrates // J. Appl. Phys. – 2001. – 90 №8 – P. 4191 – 4195.
 5. Ueda O., Imai H., Fujiwara T., Yamakoshi S. Abrupt degradation of three types of semiconductor light emitting diodes at high temperature // J. Appl. Phys. – 1980. – 51 №10 P. 5316-5325.
 6. Noriyuki S. The effects of thermal stress on the temperature dependence of degradation in $GaAs_{0.9}P_{0.1}$ operating at high current densities // J. Appl. Phys. – 1980. – 51 №3 P. 1818-1824.
 7. Ikoma T., Ogura M., Adachi Y. Acoustic-emission study of defects in GaP light-emitting diodes // Appl. Phys. Lett. – 1978. – 33 №5 P. 414-415.
 8. Велешчук В.П., Ляшенко О.В., Мязченко Ю.О., Чуприна Р.Г. Эволюция спектров электролюминесценции и акустическая эмиссия эпитаксиальных структур $GaAsP$ // Журнал Прикл. Спектроск. – 2004. – 71 №4 С. 508-511.
 9. Vlasenko O.I., Veleshchuk V.P., Lyashenko O.V. Acoustic emission, electrical and light fluctuations in optoelectronic devices. 18th International Conference on Noise and Fluctuations, 2005. AIP Proc., 780, P. 389-392.
 10. Ляшенко О.В., Перга В.М., Тхорик В.А. Связь электрических шумов с акустической эмиссией в элементах оптоэлектроники // Тез. Докл. Координ. Совещ. Соц. стран по физ. пробл. оптоэлектроники. - Баку. – 1989. – С.89.
 11. Wunch D.S., Bell R.R., Determination of threshold failure level of semiconductor diodes and transistors due to pulse voltage // IEEE Trans. on Nuclear Sci. – 1968 – 15 №6. P. 244-259.
 12. Физическая энциклопедия, ред. Прохоров А.М., М.:Советская энциклопедия, т.2. -1990. - С. 700

Надійшла до редколегії 18.06.2007.

УДК 535.3

Водоп'янов Д.Л., аспірант,
Гrechko Л.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
Лерман Л.Б., канд. техн. наук,
Білокриницька Л.М., канд. фіз.-мат. наук

Вплив мультипольної взаємодії на поляризованість кульової частинки, розташованої біля підкладки

Розглянуто електродинамічний відгук системи: мала кульова частинка (наночастинка) – підкладка в зовнішньому електромагнітному полі. В загальному випадку мультипольної взаємодії частинки з підкладкою розроблено алгоритм розв'язання цієї задачі. Знайдено аналітичні розв'язки для випадків диполь-дипольної та квадруполь-квадрупольної взаємодії.

Ключові слова: поляризованість, нескінченні алгебраїчні системи, мультиполя.

*E-mail: llerman@yandex.ru

Вступ

Оптичні властивості малих частинок (наночастинок), розмір яких набагато менший за довжину хвилі електромагнітного випромінювання (ЕМВ) оптичного діапазону, можуть бути знайдені в електростатичному наближенні [1]. Метод розв'язання докладно викладено нами раніш в [2-5]. При цьому розв'язки задачі записуються у вигляді розкладів за мультиполями, тому певний інтерес виникає оцінка впливу вищих гармонік в розкладах потенціалів за сферичними гармоніками (мультиполями), як на поляризованість частинок, так і на характеристики розсіювання і поглинання в системі.

Цей підхід було використано в [2-5] для знаходження електростатичного відгуку системи кульових частинок, розташованих поблизу поверхні із застосуванням методу зображень, як це показано на рис. 1.

У доповнення до вище згаданих робіт в цій статті докладно розглядається окрема куля, розташована поблизу поверхні. Для визначення її поляризованості виникає необхідність в розгляді нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. В статті доводиться, що отримані раніше системи

Vodopjanov D.L., postgraduate student,
Grechko L.G., Dr. Sc., prof.,
Lerman L.B., Ph. D.,
Bilokrynicky L.M., Ph. D.,

Influence of effect multipole interaction on polarizability spherical particle located near substrate

Response of electrostatic system: a small spherical particle (nanoparticle) – substrate in external electromagnetic field are observed. In general case multipole interaction of a particle with the substrate the algorithm of problem solving is elaborated. The analytical solutions to cases dipole-dipole and quadrupole-quadrupole interaction are founded.

Key Words: polarizability, infinite algebraical systems, multipole.

мають властивість регулярності [6], і, отже, до них можливо застосовувати метод редукції.

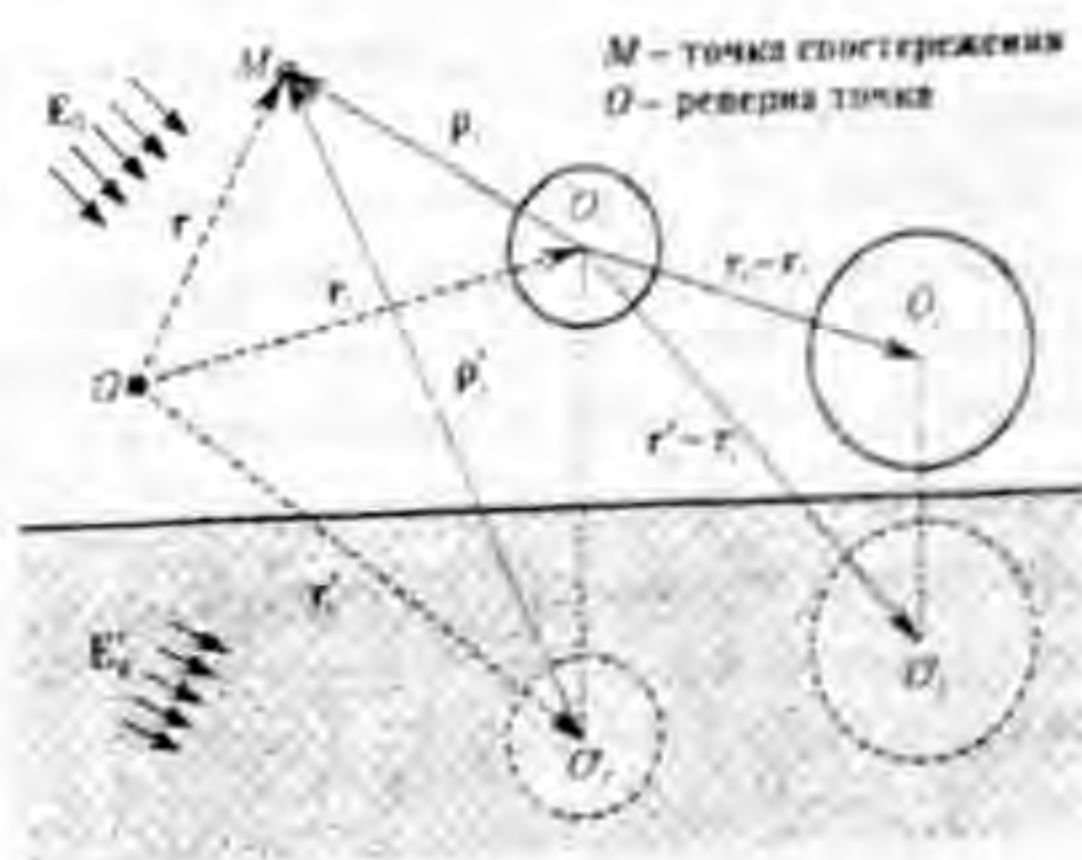


Рис. 1. Кульові частинки та їх зображення

В загальному випадку мультипольної взаємодії розроблено алгоритм чисельного розв'язання задачі. Знайдено аналітичні розв'язки для диполь-дипольної та квадруполь-квадрупольної взаємодії частинки та підкладки. Отримано асимптотичні оцінки похибки моделі диполь-дипольної взаємодії, а також граничну межу цієї похибки в порівнянні з квадруполь-квадрупольною взаємодією.

Представлено:
д.ф.-м.н., проф. Адаменко І.І.

1. Розрахункові формули

Ефективності розсіяння та поглинання світла малими частинками поблизу підкладки можна обчислити, використовуючи формули [4],

$$Q_{\text{abs}} = \frac{k \sqrt{\text{Im}^2 \left[|1 + r_p \sin \theta \alpha_{\perp}| \right] + \text{Im}^2 \left[|1 - r_p \cos \theta \alpha_{\parallel}| \right]}}{\pi r^2}$$

$$Q_{\text{scat}} = \frac{k^4 |1 + r_p \sin \theta \alpha_{\perp}|^2 + |1 - r_p \cos \theta \alpha_{\parallel}|^2}{6\pi^2 r^2} \quad (1)$$

де r – радіус частинки, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число падаючої хвилі, r_p – коефіцієнти Френеля p -поляризованого світла, $\alpha_{\perp}$, $\alpha_{\parallel}$ компоненти тензора поляризованості $\hat{\alpha}$ [3]

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{pmatrix}.$$

Отже задача полягає у визначенні поляризованості. Зокрема, для частинки, що знаходиться біля підкладки компоненти тензора поляризованості α_m ($m = (\parallel, \perp)$) при врахуванні лише диполь-дипольної взаємодії [3-5] визначаються за формулою

$$\alpha_m = \frac{4\pi\epsilon_a r^3 (\epsilon_i - \epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a)}{(\epsilon_i + 2\epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a) - \eta_m (r/(2d))^3 (\epsilon_i - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)} \quad (3)$$

де $d = h + r$ – це відстань від центра частинки до підкладки (рис. 2).

В формулі (3) параметр η_m залежить від напрямку вектора зовнішнього поля і приймає значення 1, якщо вектор перпендикулярний площині ($\perp$) та 2, якщо їй паралельний ($\parallel$). ϵ_i – діелектрична проникність кулі, ϵ_a – діелектрична проникність середовища, ϵ_s – діелектрична проникність півпростору, h – відстань від кулі до площини.

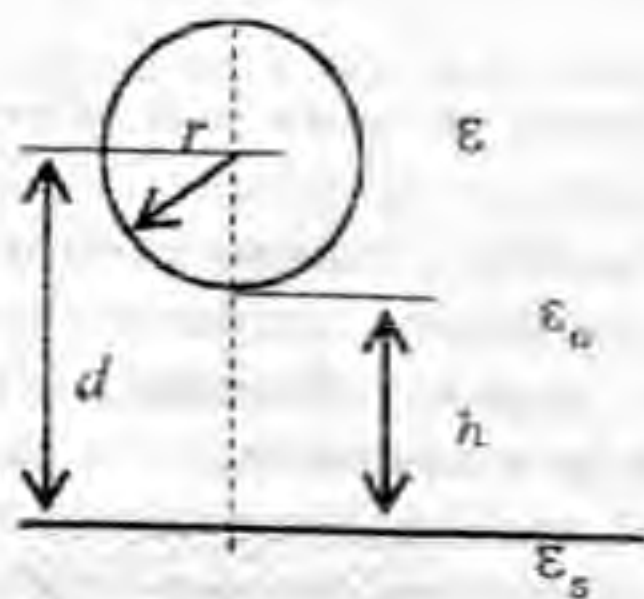


Рис. 2. Окрема кульова частинка біля підкладки

В загальному випадку для однієї частинки над підкладкою знайдені наступні вирази для компонентів тензора поляризованості $\hat{\alpha}$ [3, 5]

$$\alpha_m = 4\pi\epsilon_a r^3 A_j^{(m)} \quad (\text{для } m = \perp \text{ чи } \parallel), \quad (4)$$

де коефіцієнти A_m знаходяться з нескінченної системи рівнянь ($k = 1, 2, \dots$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{kj} + \frac{k(\epsilon_i - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{[k\epsilon_i + (k+1)\epsilon_a](\epsilon_s + \epsilon_a)} \times \frac{(k+j)!}{k!j!(2d/r)^{k+j+1}} \right) A_j^{\perp} = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} \delta_{k1}$$

$$\quad (5)$$

для перпендикулярної (стосовно поверхні) складової зовнішнього електричного поля E_0 і, відповідно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\delta_{kj} + \frac{k(\epsilon_i - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{[k\epsilon_i + (k+1)\epsilon_a](\epsilon_s + \epsilon_a)} \times \frac{(k+j)!}{(k+1)!(j-1)!(2d/r)^{k+j+1}} \right) A_j^{\parallel} = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a} \delta_{k1}$$

$$\quad (6)$$

для паралельної складової електричного поля E_0 , де δ_{kj} – символ Кронеккера-Копелі.

Отже, задача зводиться до розв'язування нескінчених систем (5), (6). Звичайно такі системи розв'язуються методом редукції, тобто заміняють системами з кінцевим числом рівнянь. Така заміна можлива тільки у тому випадку, коли система буде регулярною, або, по крайній мірі, квазірегулярною [6]. Обґрунтуванню цього питання присвячений наступний розділ.

3. Дослідження нескінчених систем

Розглянемо докладно систему (5) для перпендикулярної складової поля (аналогічне доведення буде мати місце і для паралельної складової). Для зручності введемо позначення

$$\zeta_k = \frac{k(\epsilon_i - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{[k\epsilon_i + (k+1)\epsilon_a](\epsilon_s + \epsilon_a)}, \quad b = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_i + 2\epsilon_a}, \quad \rho = \frac{r}{2d}$$

і перепишемо нескінчену систему (5) у стандартному вигляді [6]

$$A_k - \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} A_j = f_k,$$

де

$$a_{kj} = \zeta_k \frac{(k+j)!}{k!j!} (\rho)^{k+j+1}, \quad f_k = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \delta_{k1} = b\delta_{k1}.$$

Маємо наступні еквівалентні вирази для коефіцієнтів системи

$$a_{kj} = \zeta_k \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+j)}{j!} (\rho)^{k+j+1} = \\ = \zeta_k \frac{(j+1)(j+2)\dots(j+k)}{k!} (\rho)^{k+j+1}$$

Оскільки існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)(\varepsilon_a + \varepsilon_s)},$$

то можна знайти деяку константу $K > 0$, що $|\zeta_k| < K$ для будь-якого k . При цьому всі $|\zeta_k|$ обмежені 1, оскільки

$$|\zeta_k| = \left| \frac{k(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{[k\varepsilon_i + (k+1)\varepsilon_a](\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right| = \\ = \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_a| \cdot |\varepsilon_a - \varepsilon_s|}{|\varepsilon_i + (1+1/k)\varepsilon_a| \cdot |\varepsilon_a + \varepsilon_s|},$$

і в силу наслідків з відомих нерівностей для модулів довільних комплексних чисел $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$:

$$\frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_a|}{|\varepsilon_a + \varepsilon_s|} \leq \frac{|\varepsilon_i| + |\varepsilon_a|}{|\varepsilon_i| + |\varepsilon_a|} = 1,$$

$$\frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_a|}{|\varepsilon_i + (1+1/k)\varepsilon_a|} \leq \frac{|\varepsilon_i| + |\varepsilon_a|}{|\varepsilon_i| + |(1+1/k)\varepsilon_a|} < 1.$$

Отже всі $|\zeta_k| < 1$ для всіх k , тобто рівномірно обмежені одиницею. Тоді константу K можна прийняти $K=1$. Зауважимо, що при цьому $\rho \leq 1/2$. Тоді неважко бачити, що

$$|a_{kj}| \leq |\zeta_k| \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1} < \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1}$$

$$\text{і } \lim_{k \rightarrow \infty} a_{kj} = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{kj} = 0.$$

Це означає, що необхідні умови, в крайньому разі, для умов квазірегулярності системи [6] виконані. Виконання другої достатньої умови квазірегулярності системи, тобто щоб було $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0$ [6], очевидно, оскільки усі $f_k = 0$ при $k > 1$.

Перша достатня умова [6] вимагає, щоб справджувалась нерівність

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1.$$

Внаслідок наведених вище оцінок матимемо

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| \leq |\zeta_k| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!j!} (\rho)^{k+j+1} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1}$$

Позначимо суми рядів

$$S_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1}$$

За ознакою Даламбера для мажоратного ряду з загальним членом

$$z_j = \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1}$$

маємо

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{z_{j+1}}{z_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(k+j+1)}{2(j+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже ряди будуть збігатися за будь-якого k .

Таблиця 1. Чисельна оцінка збіжності часткових сум

k	Значення часткових сум $S_k^{(j)} = \sum_{j=1}^j \frac{(k+j)!}{k!j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j+1}$ для різних J			
	J = 20	J = 40	J = 60	J = 100
1	0,7500	0,7500	0,7500	0,7500
2	0,8750	0,8750	0,8750	0,8750
3	0,9374	0,9375	0,9375	0,9375
4	0,9683	0,9687	0,9687	0,9687
5	0,9831	0,9844	0,9844	0,9844
6	0,9892	0,9922	0,9922	0,9922
7	0,9898	0,9961	0,9961	0,9961
8	0,9860	0,9980	0,9980	0,9980
9	0,9776	0,9990	0,9990	0,9990
10	0,9641	0,9995	0,9995	0,9995
11	0,9447	0,9997	0,9998	0,9998
12	0,9185	0,9998	0,9999	0,9999
13	0,8852	0,9999	0,9999	0,9999
14	0,8447	0,9998	1,0000	1,0000
15	0,7975	0,9996	1,0000	1,0000
16	0,7443	0,9994	1,0000	1,0000
17	0,6864	0,9989	1,0000	1,0000
18	0,6254	0,9981	1,0000	1,0000
19	0,5627	0,9969	1,0000	1,0000
20	0,5000	0,9951	1,0000	1,0000

Покажемо чисельно, що суми $S_k \rightarrow 1$, якщо $k \rightarrow \infty$. З цією метою підрахуємо частинні суми при різних k , утримуючи різну кількість членів по j . Для запобігання втрати точності при підрахунку сум (функція $n!$ дуже швидко зростає) будемо використовувати при обчисленні членів ряду рекурентні формули вигляду

$$z_{j+1}^{(k)} = z_j^{(k)} \frac{(k+j+1)}{2(j+1)}, \quad z_1^{(k)} = \frac{(k+1)}{2^{k+1}}.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 1.

З наведених результатів випливає, що дійсно $S_k \rightarrow 1$ (аналітичного доведення цього факту нам отримати не вдалося). Тому умова квазірегулярності системи зводиться до оцінки модуля множника перед сумами, який не залежить від j , тобто оцінки виразу

$$\zeta = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k \right| = \left| \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)(\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right|.$$

В загальному випадку, діелектричні проникності можуть бути комплексними величинами. Для довільних комплексних чисел мають місце нерівності $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, і знак рівності для другої нерівності досягається тільки коли $z_1 = z_2 = 0$.

Використовуючи ці нерівності, матимемо оцінку

$$\begin{aligned} \zeta &= \left| \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_a - \varepsilon_s)}{(\varepsilon_i + \varepsilon_a)(\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right| = \left| \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + \varepsilon_a} \right| \cdot \left| \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_a}{\varepsilon_s + \varepsilon_a} \right| = \\ &= \frac{|\varepsilon_i - \varepsilon_a|}{|\varepsilon_i + \varepsilon_a|} \cdot \frac{|\varepsilon_s - \varepsilon_a|}{|\varepsilon_s + \varepsilon_a|} < \frac{|\varepsilon_i| + |\varepsilon_a|}{|\varepsilon_i| + |\varepsilon_a|} \cdot \frac{|\varepsilon_s| + |\varepsilon_a|}{|\varepsilon_s| + |\varepsilon_a|} = 1 \end{aligned}$$

Отже $\zeta < 1$, і це означає, що система буде не тільки квазірегулярною, а навіть регулярною, оскільки для першого рядка системи матимемо

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}| \leq |\zeta_1| S_1' = \left| \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_a)(\varepsilon_s - \varepsilon_a)}{(\varepsilon_i + 2\varepsilon_a)(\varepsilon_a + \varepsilon_s)} \right| \cdot 0,75 < 1.$$

Зауважимо, що для комплексних діелектричних проникностей потрібно враховувати їх залежність від частоти, але система буде залишатися регулярною для будь-якої частоти, оскільки неможливо одночасне виконання рівностей $\varepsilon_i = \varepsilon_s = \varepsilon_a = 0$.

Аналогічне доведення проводиться і у випадку паралельної поляризації.

4. Розв'язання нескінчених систем

Доведена властивість регулярності нескінченної системи обґрунтовує застосування методу редукції [6]. При цьому виявляється можливим застосування методів простої, або покращеної ітерації. У першому випадку невідомі коефіцієнти обчислюються за схемою

$$A_{kl}^{(n)} = f_k + \sum_{j=1}^l a_{kj} A_{jl}^{(n-1)} \quad (n=1, 2, \dots),$$

де нульове наближення (n – номер ітерації), вхід в ітеративний процес задається співвідношеннями

$$A_{kl}^{(0)} = f_k, \quad A_{1l}^{(0)} = f_1, \quad A_{2l}^{(0)} = A_{3l}^{(0)} = \dots = A_{ll}^{(0)} = 0,$$

а l – визначає число утриманих рівнянь, тобто врахування мультипольної взаємодії.

Альтернативний підхід до розв'язання системи полягає в наступному. В загальному випадку для визначення поляризованості фактично необхідно мати лише перший коефіцієнт A_1 [2-5]. Виходячи з властивостей системи можна всі інші коефіцієнти в l -польному наближенні виразити через $A_1 = A_1^{(l)}$.

Запишемо систему при утриманні l коефіцієнтів у розгорнутому вигляді (верхній індекс l у всіх невідомих коефіцієнтах опускаємо)

$$\begin{cases} (1 - a_{11})A_1 - a_{12}A_2 - a_{13}A_3 - \dots - a_{1l}A_l = f_1 \\ -a_{21}A_1 + (1 - a_{22})A_2 - a_{23}A_3 - \dots - a_{2l}A_l = 0 \\ \dots \\ -a_{l1}A_1 - a_{l2}A_2 - a_{l3}A_3 - \dots + (1 - a_{ll})A_l = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

Прийнявши A_1 в якості вільної невідомої з останніх $l-1$ рівнянь отримуємо лінійну неоднорідну систему $l-1$ порядку

$$\begin{cases} (1 - a_{22})A_2 - a_{23}A_3 - \dots - a_{2l}A_l = a_{21}A_1 \\ -a_{32}A_2 + (1 - a_{33})A_3 - \dots - a_{3l}A_l = a_{31}A_1 \\ \dots \\ -a_{l2}A_2 - a_{l3}A_3 - \dots + (1 - a_{ll})A_l = a_{l1}A_1 \end{cases}. \quad (8)$$

З цієї системи всі невідомі коефіцієнти A_j , $j=2, 3, \dots, l$ можна виразити через A_1 за формулами Крамера

$$A_j = \frac{\Delta_j^{(l)}}{\Delta^{(l)}} A_1,$$

де визначник розмірності $(l-1) \times (l-1)$ матриці системи (8) (мінор $M_{11}^{(l)}$ матриці системи (7)) має вигляд

$$\Delta^{(l)} = \begin{vmatrix} 1 - a_{22} & -a_{23} & \dots & -a_{2l} \\ -a_{32} & 1 - a_{33} & \dots & -a_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{l2} & -a_{l3} & \dots & 1 - a_{ll} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

а допоміжні визначники $\Delta_j^{(l)}$ тієї ж розмірності, де j -й стовпчик замінюється стовпчиком вільних членів з системи (8), символічно запишуться наступним чином

$$\Delta_j^{(l)} = \begin{vmatrix} 1 - a_{22} & -a_{23} & \dots & (j)a_{2l} - \dots - a_{2l} \\ -a_{32} & 1 - a_{33} & \dots & (j)a_{3l} - \dots - a_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{l2} & -a_{l3} & \dots & (j)a_{ll} - \dots - 1 - a_{ll} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

де символ (j) показує, що замінено j -й стовпчик. Верхній індекс в визначниках підкреслює скільки рівнянь утримано в нескінченній системі. Тоді для визначення A_l будемо мати одне лінійне рівняння

$$\left[(1 - a_{11}) - a_{12} \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} - a_{13} \frac{\Delta_3^{(l)}}{\Delta^{(l)}} - \dots - a_{1l} \frac{\Delta_l^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \right] A_l = f_1,$$

звідки при врахуванні l - польної взаємодії отримаємо потрібну розрахункову формулу

$$A_l = A_l^{(l)} = \frac{f_1}{(1 - a_{11}) - \left[a_{12} \frac{\Delta_2^{(l)}}{\Delta^{(l)}} + a_{13} \frac{\Delta_3^{(l)}}{\Delta^{(l)}} + \dots + a_{1l} \frac{\Delta_l^{(l)}}{\Delta^{(l)}} \right]}. \quad (11)$$

Після знаходження коефіцієнта $A_l = A_l^{(l)}$, поляризованість частинки біля поверхні обчислюється за формулою

$$\alpha_m = 4\pi\epsilon_a r^3 A_{m1},$$

де індекс m відповідає паралельній чи перпендикулярній поляризації.

Якщо в формулі (11) індекс $l=1$, то всі доданки в квадратних дужках потрібно прийняти рівними нулю, і ми отримаємо значення коефіцієнта (і поляризованості) для диполь-дипольної взаємодії.

Наведені вище схеми розв'язку нескінченної системи доцільно використовувати при досить великих значеннях l . В загальному випадку мультипольної взаємодії вираз в квадратних дужках в формулі (11) дає поправку до диполь-дипольної взаємодії. Її підрахунок потребує обчислення відповідних визначників (можливо високого порядку), і може бути виконана тільки чисельно.

Для $l=1$ (дипольна взаємодія), або для $l=2$ (квадрупольна взаємодія) зручніше застосовувати аналітичні вирази. Введемо позначення $a_{kl} = \zeta_k c_k$, і будемо використовувати вирази

$$c_{kl} = \frac{(k+j)!}{k!j!} \rho^{k+j+1}, \quad \zeta_k = \frac{k(\epsilon_s - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{[k\epsilon_s + (k+1)\epsilon_a](\epsilon_s + \epsilon_a)}$$

Тоді у випадку диполь-дипольної взаємодії в системі лишається лише одне рівняння вигляду

$$A_1^{(1)}(1 - \zeta_1 c_{11}) = f_1,$$

з якого відразу отримаємо розв'язок

$$A_1^{(1)} = \frac{f_1}{1 - \zeta_1 c_{11}} = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a)}{(\epsilon_s + 2\epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a) - 2\rho^3(\epsilon_s - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)},$$

який і дає формулу (3).

У випадку квадруполь-квадрупольної взаємодії будемо знаходимо, що

$$A_1^{(2)} = \frac{f_1(1 - \zeta_2 c_{22})}{(1 - \zeta_1 c_{11})(1 - \zeta_2 c_{22}) - \zeta_1 \zeta_2 c_{12} c_{21}}.$$

При цьому буде

$$c_{11} = 2\rho^3, \quad c_{12} = c_{21} = 3\rho^4, \quad c_{22} = 6\rho^5, \quad (12)$$

$$\zeta_1 = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{(\epsilon_s + 2\epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a)}, \quad \zeta_2 = \frac{2(\epsilon_s - \epsilon_a)(\epsilon_s - \epsilon_a)}{(2\epsilon_s + 3\epsilon_a)(\epsilon_s + \epsilon_a)}. \quad (13)$$

4. Оцінка похибки диполь-дипольної моделі в порівнянні з мультипольними моделями

Отримані вирази дозволяють оцінити поправку, яку може дати врахування квадруполь-квадрупольної взаємодії. З цією метою розглянемо вираз, який визначає відносну похибку δ диполь-дипольної взаємодії в порівнянні з квадруполь-квадрупольною взаємодією частинки і підкладки

$$\delta = \left| \frac{A_1^{(2)} - A_1^{(1)}}{A_1^{(2)}} \right| = \left| 1 - \frac{A_1^{(1)}}{A_1^{(2)}} \right|. \quad (14)$$

Використовуючи наведені вище вирази для коефіцієнтів $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, будемо мати (тут і надалі враховуємо, що c_k додатні дійсні числа):

$$\delta = \left| \frac{\zeta_1 \zeta_2 c_{12} c_{21}}{(1 - \zeta_1 c_{11})(1 - \zeta_2 c_{22})} \right| = \frac{|\zeta_1| |\zeta_2| c_{12} c_{21}}{|1 - \zeta_1 c_{11}| |1 - \zeta_2 c_{22}|}.$$

Тоді із врахуванням, того що всі $|\zeta_k| < 1$, (тобто, також для $k=1$ і $k=2$) і формул (12) можна отримати наступну оцінку похибки

$$\delta \leq \frac{9}{(1 - 2\rho^3 |\zeta_1|)(1 - 6\rho^5 |\zeta_2|)} \rho^8. \quad (15)$$

Ця оцінка показує, що із зменшенням ρ , тобто зі збільшенням відстані частинки від площини, похибка буде швидко спадати, але вона залежить від діелектричних характеристик матеріалів кулі, підкладки і середовища, що не завжди є зручним, оскільки діелектричні проникності залежать від частоти. Конкретне значення δ потребує додаткових розрахунків в кожному конкретному випадку.

Удосконалимо нерівність (15) наступним чином. Зауважимо, що завжди величини $2\rho^3 |\zeta_1| < 1$,

$6\rho^5|\zeta_1| < 1$, тому що $0 \leq \rho \leq 1/2$. Отже, ми можемо розвинути дроб в ряди

$$(1 - 2\rho^3|\zeta_1|)^{-1} = 1 + 2\rho^3|\zeta_1| + (2\rho^3|\zeta_1|)^2 + (2\rho^3|\zeta_1|)^3 + \dots,$$

$$(1 - 5\rho^5|\zeta_2|)^{-1} = 1 + 5\rho^5|\zeta_2| + (5\rho^5|\zeta_2|)^2 + (5\rho^5|\zeta_2|)^3 + \dots$$

Перемножимо останні ряди і оцінимо отриману суму Q :

$$Q \leq 1 + 2\rho^3 + 5\rho^5 + 4\rho^6 + 10\rho^8 + \dots \quad (16)$$

Тоді оцінка (15) приймає вигляд

$$\delta \leq 9\rho^8 Q \leq 9\rho^8 (1 + 2\rho^3 + 5\rho^5 + 4\rho^6 + 10\rho^8 + \dots), \quad (17)$$

і вже не залежить від діелектричних характеристик, але зі зростанням утриманих членів ряду в дужках верхня границя похибки збільшується.

Довести аналітично збіжність такого ряду важко, тому оцінимо його збіжність чисельно. У випадку розташування частинки на поверхні підкладки ($\rho = 1/2$) будемо мати граничну оцінку δ (для довільних значень ρ вона буде менше)

$$\delta \leq \frac{9}{256} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{5}{32} + \frac{1}{16} + \frac{5}{256} + \dots \right).$$

В табл. 2 наведені значення δ для різного числа утриманих доданків.

Таблиця 2. Граничні значення відносної похибки обчислення поляризації частинки біля підкладки при врахуванні квадрупольної взаємодії

Число утриманих членів в ряді	Значення відносної похибки δ , %
1	3,516
2	4,394
3	4,944
4	5,164
5	5,232

З табл. 2 видно, що ряд збігається і внесок останнього доданку в загальну суму ряду складає близько 5%. Отримана оцінка показує, що в більшості практичних розрахунках достатньо обмежитись врахуванням лише диполь-дипольної взаємодії. При потребі для уточнення фізичної картини взаємодії електричного поля з системою в певних частотних діапазонах потрібно використовувати оцінку (15), яка враховує діелектричні характеристики складових системи.

Висновки

Таким чином для нескінченної алгебраїчної системи, розв'язок якої визначає поляризованість малої частинки, що розташована над підкладкою, доведено властивість регулярності. Це обґрунтовує можливість застосування методу редукції.

Запропоновано ефективний алгоритм розв'язання цієї системи. Отримані явні формули для врахування диполь-дипольної та квадруполь-квадрупольної взаємодії.

Показано, що при врахування лише диполь-дипольної взаємодії максимальна відносна похибка знаходження поляризованості в порівнянні з квадрупольною взаємодією має порядок 7%. Це означає, що в певних випадках врахування тільки диполь-дипольної взаємодії може виявитись недостатнім, і потрібно врахування більш високих складових потенціалів (квадрупольної, октупольної і вищих взаємодій).

Робота виконана в рамках бюджетної теми №3 Інституту хімії поверхні НАН України «Теоретичне дослідження та моделювання процесів хімічної модифікації поверхні наночастинок, фізико-хімічних властивостей та особливостей взаємодії з біологічними об'єктами».

Список використаних джерел

1. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света маленькими частицами. М: Мир, 1986. – 664 с.
2. Grechko L.G., Whites K.W., Pustovit V.N., Lysenko V.S. Macroscopic dielectric response of the metallic particles embedded in host dielectric medium // Microelectronics Reliability. – 2000. – V. 40. – P. 893-895.
3. Gogenko V.V., Grechko L.G., Whites K.W. Electrodynamics of spatial clusters of spheres: Substrate effects // Phys. Rev. B. - 2003. – V. 68. – P. 125422-1 – 125422-16.
4. Водопьянов Д.Л., В.В. Гоженко В.В., Гончарук Ю.С. и др. Электродинамические свойства малых сферических частиц вблизи плоской поверхности // Химия, физика и технология поверхности. – Вып 11-12. – С. 53-61.
5. Гоженко В.В., Гончарук Ю.С., Гречко Л.Г., Куницька Л.Ю. Поверхневі моди малих частинок межі розділу фаз // Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2006. – №4. – С. 416-425.
6. Канторович Л.В., Крылов А.И. Приближенные методы высшего анализа. – Л.-М.: Гостехиздат, 1949. – 695 с.

Надійшла до редколегії 29.09.07.

УДК 512

Гаврюшенко Д.А., кандидат фізико-математичних наук, доцент, Сисоєв В.М., доктор фізико-математичних наук, професор

Визначення концентраційної залежності хімічних потенціалів бінарного розчину методом одношарової адсорбції

Запропоновано метод визначення залежності коефіцієнтів активності бінарного розчину шляхом вимірювання концентраційної залежності коефіцієнту адсорбції. Метод дозволяє визначити тип розчину, а також значення величини $\varepsilon_0 + \mu_0(p, T)$ для ідеального розчину.

Ключові слова: одношарова адсорбція, коефіцієнт активності, спейсер, бінарний розчин, хімічний потенціал, коефіцієнт адсорбції

*E-mail: dm_g@univ.kiev.ua

Визначення залежності хімічних потенціалів бінарного розчину $\mu_i(T, p, x)$ від концентрації x при заданих значеннях температури T та тиску p є важливою експериментальною та теоретичною задачею. Як відомо, хімічний потенціал розчиненої речовини можна подати у вигляді [1]:

$$\mu(T, p, x) = \mu_0(T, p) + kT \ln \gamma(T, p, x) x \quad (1)$$

де $\gamma(T, p, x)$ – так званий коефіцієнт активності цієї речовини в розчині, $\mu_0(T, p)$ – хімічний потенціал чистої розчиненої речовини. Явний вигляд цієї залежності в багатьох випадках визначається емпіричними співвідношеннями (рівняння Маргулеса, Ван Лаара, Скотчарда-Хаммера, Кіресса, модель регулярних розчинів тощо [1, 2]), які містять сталі, що не завжди коректно визначаються через міжмолекулярні потенціали розчину. Так як загальна умова ідеальності розчину може бути записана у вигляді

$$\gamma(T, p, x) \equiv 1 \quad (2)$$

при всіх значеннях концентрації, то знаходження концентраційної залежності γ в широкому інтервалі зміни термодинамічних параметрів T, p, x дозволяє оцінити відхилення розчину від ідеальності.

D.A. Gavryushenko*, Ph.D., V.M. Sysoev, Sc.D.

Binary solution chemical potentials concentration dependence determination by single-layer adsorption method

The binary solutions activity coefficients concentration dependence determination by an adsorption coefficient concentration dependence measurement was proposed in the case of a single-wall adsorption. The method lets to determine a solution type as well as estimate value of the quantity $\varepsilon_0 + \mu_0(p, T)$ for an ideal solution.

Key words: single-layer adsorption, activity coefficient, spacer, binary solution, chemical potential, adsorption coefficient, grand canonical ensemble

В даній роботі пропонується метод встановлення концентраційної залежності коефіцієнту активності шляхом визначення залежності коефіцієнту одношарової адсорбції θ [3] від x . Зауважимо, що ідеальний випадок одношарової адсорбції реалізується на модифікованій спейсерами поверхні адсорбенту [4].

Розглянемо поверхню адсорбенту, модифіковану N спейсерами, кожний із яких може адсорбувати тільки одну молекулу адсорбата. Припустимо, що ця поверхня знаходиться в контакті з бінарним розчином, що містить адсорбат з концентрацією x .

Припустимо, що при прищепленні до спейсера першої молекули адсорбата вона зменшує свою енергію на величину $\varepsilon_0 = \text{const}$. Кількість адсорбованих молекул позначимо N_1 , тоді коефіцієнт адсорбції θ визначається як $\theta = \frac{\langle N_1 \rangle}{N}$. Для визначення концентраційної

залежності $\theta(x)$ розглянемо поведінку системи в рамках великого канонічного ансамблю.

В загальному випадку статистичну суму $\Xi(T, N, \mu)$ великого канонічного ансамблю в даному випадку можна записати у вигляді:

$$\Xi(T, N, \mu) = \sum_{st} e^{\beta \left(-\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} + (\varepsilon_0 + \mu) N_1 \right)}, \quad (3)$$

де $\beta = \frac{1}{kT}$, k – стала Больцмана, ε_{ij} – енергія взаємодії адсорбованих молекул адсорбата між собою, що знаходяться у вузлах i та j , $\sum_{st}$ означає суму по всім мікростанам системи, що відповідають заданій конфігурації молекул адсорбата на поверхні.

Так як ε_{ij} відповідає короткодійним молекулярним силам, тобто ε_{ij} відмінне від нуля лише у випадку, коли i та j вузол є сусідніми, тому при значеннях θ , що відповідають двовимірній газовій фазі цими силами можна знехтувати. Цей випадок і будемо розглядати надалі.

В цьому випадку, враховуючи, що всі мікроскопічні стани при заданому N_1 є нерозрізнюваними, статистичну суму можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Xi(T, N, \mu) &= \sum_{N_1=1}^N \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} e^{\beta(\varepsilon_0 + \mu)N_1} = \\ &= \left(1 + e^{\beta(\varepsilon_0 + \mu)} \right)^N, \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що на відміну від звичайного великого канонічного ансамблю, природними змінними якого є температура T , об'єм системи V та хімічний потенціал μ , у випадку адсорбції на поверхні з дискретним значенням вузлів адсорбції роль об'єму грає саме це значення кількості вузлів N . Така ж ситуація реалізується і в теорії ґратчастого газу [5]. Роль відповідної динамічної змінної, спряженої до хімічного потенціалу молекул адсорбата в розчині, відіграє кількість зайнятих вузлів.

Середнє число адсорбованих молекул $\langle N_1 \rangle$ визначається очевидним виразом:

$$\begin{aligned} \langle N_1 \rangle &= \frac{\sum_{N_1=1}^N N_1 \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} e^{\beta(\varepsilon_0 + \mu)N_1}}{\Xi(T, N, \mu)} = \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi(T, N, \mu), \end{aligned} \quad (5)$$

що дозволяє для коефіцієнту адсорбції $\theta(x)$ записати:

$$\theta(x) = \frac{1}{\beta N} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi(T, N, \mu). \quad (6)$$

Підставивши в вираз (6) явний вигляд статистичної суми (4), отримаємо

$$\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_0 + \mu)}}. \quad (7)$$

Використовуючи для хімічного потенціалу адсорбата в розчині вираз (1), вираз (7) можна подати в остаточному вигляді:

$$\theta(x) = \frac{\gamma(T, p, x)x}{\gamma(T, p, x)x + e^{-\beta(\varepsilon_0 + \mu_0)}}, \quad (8)$$

або

$$\theta(x) = \frac{1}{1 + \frac{e^{-\beta(\varepsilon_0 + \mu_0)}}{\gamma(T, p, x)x}}. \quad (9)$$

Залежність (8) має вигляд ізотерми Ленгмюра з очевидною заміною $p \rightarrow \gamma(T, p, x)x$, $p_0(T) \rightarrow e^{-\beta(\varepsilon_0 + \mu_0)}$:

$$\theta(p) = \frac{p}{p + p_0(T)}, \quad (10)$$

або

$$\theta(p) = \frac{1}{1 + \frac{p_0(T)}{p}}. \quad (11)$$

У випадку ленгмюрівської ізотерми (10) при $p \rightarrow \infty$ коефіцієнт адсорбції $\theta(p)$ прямує до одиниці, що відповідає мінімуму термодинамічного потенціалу Гіббса при реалізації максимальної густини двовимірної системи. В цьому випадку визначальним внеском в потенціал Гіббса двовимірної системи є «об'ємний», а енергетичним та ентропійним доданками можна знехтувати. Але за цієї умови ($p \rightarrow \infty$) газ, з якого йде адсорбція, перестає бути ідеальним, тому ізотерма Ленгмюра (10) при зміні тиску в широкому інтервалі набуває іншого вигляду з урахуванням рівняння стану реальної системи, з якої йде адсорбція (реальний газ, рідина, тверде тіло).

Зауважимо, що коефіцієнт адсорбції $\theta(x)$ для ізотерми (8) не прямує до свого максимально можливого значення $\theta(x)$ навіть при підвищенні концентрації до одиниці, що відповідає чистому адсорбату. В цьому випадку в термодинамічному потенціалі Гіббса, на відміну від попереднього випадку, необхідно враховувати внески від всіх доданків.

Важливо відмітити, що випадок $\theta = 1$ як у випадку адсорбції з газу, так і у випадку адсорбції з розчину може бути реалізований при

$\frac{\varepsilon_0}{kT} \rightarrow \infty$ безвідносно до значення тиску та концентрації.

Таким чином, в загальному випадку ефективність адсорбції визначається наступними критеріями:

для адсорбції з розчину, та

$$\frac{e^{-\beta(\varepsilon_0 + \mu_0)}}{\gamma(T, p, x)x} \ll 1, \quad (12)$$

та для адсорбції з газу:

$$\frac{p_0(T)}{p} \ll 1. \quad (13)$$

Таким чином, при адсорбції з розчину, ефективність адсорбції визначається не лише властивостями адсорбата та поверхні, на яку відбувається адсорбція, але й фізико-хімічними властивостями розчину, які визначають активність адсорбата в розчині $\gamma(T, p, x)$.

Легко бачити, що в обернених координатах $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\theta}\right)$ (так звані координати Лайнуївера-Берка [6]) залежність повинна мати лінійний вигляд лише для ідеального розчину. Дійсно, в цих координатах маємо:

$$\frac{1}{\theta} \left(p, T, \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{e^{-\beta(\mu_0 + \varepsilon_0)}}{\gamma(T, p, x)} \cdot \frac{1}{x}, \quad (14)$$

що при $\gamma(p, T, x) \equiv 1$ має вигляд прямої, яка проходить через точку $(0, 1)$:

$$\frac{1}{\theta} \left(p, T, \frac{1}{x} \right) = 1 + e^{-\beta(\mu_0 + \varepsilon_0)} \cdot \frac{1}{x} \quad (15)$$

В цьому випадку ми можемо визначити значення величини $\mu_0(p, T) + \varepsilon_0$.

Якщо ж в змінних $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\theta}\right)$ залежність (14) суттєво відхиляється від лінійної, то нелінійна апроксимація залежності $\theta(x)$ дозволяє визначити характер поведінки γ як функції концентрації і, відповідно, тип розчину. Дійсно, в багатьох випадках залежність $\gamma(x)$ має відносно простий вигляд і може бути описана степеневим рядом:

$$\ln \gamma(T, p, x) = \sum a_k(T, p)(1-x)^{\lambda_k}, \quad (16)$$

причому значення параметрів λ_k вказують на тип розчину.

Нагадаємо, що отримані результати відносяться до адсорбції на плоских поверхнях адсорбенту. Адсорбція на викривлених

поверхнях має свою специфіку (див. [4]), і потребує окремого розгляду.

1. Пригожин И., Дэфей Р. Химическая термодинамика. Под. Ред. Михайлова В.А. Новосибирск: Наука СО, – 1966 – 509 с.
2. Дуров В.А., Агеев Е.П. Термодинамическая теория растворов неэлектролитов. М.: Изд. МГУ. – 1987 – 246 с.
3. Адамсом А. Физическая химия поверхности. М.: – Мир – 1979 – 568 с.
4. Голуб О.А., Сисоев В.М., Прилуцкий Ю.І., Педь Л.Л. Вплив питомої поверхні непористих адсорбентів та довжини спейсера на концентрацію прищеплених лігандів. Доповіді НАН України. – 6 (2006) – Стор. 132-136.
5. Хилл Т. Статистическая механика. М.: ИИЛ. – 1960 – 485 с.
6. Lineweaver H., Burk D. The determination of enzyme dissociation constants // J. Amer. Chem. Soc. – 56 (1934) – P. 658-666.

Надійшла до редколегії 1.08.2007

УДК 535.3

Гречко Л.Г., докт. фіз.-мат. наук, проф.,
Лерман Л.Б., канд. техн. наук,
Семчук О.Ю., канд. фіз.-мат. наук,
Лющенко М.О., аспірант,
Куницька Л.Ю., провідний інженер

Індуковані лазерними пучками поверхневі періодичні структури

Досліджено просторовий та часовий розподіли температури на поверхні твердого тіла, які нагріваються періодичними у просторі лазерними пучками. Розроблено метод розрахунку нестационарних температурних полів в загальному випадку періодичних пучків, які утворюють на поверхні тіла двовимірну ґратку. Також, розглянута і смугаста (одновимірна) періодична структура. Показано, що максимуми прогріву спостерігаються в центрах пучків і температура швидко спадає при наближенні до краю періоду. При досить великих розмірах пучків, коли відношення розмірів пучка до періоду зростає до 0,8 вдається досягнути майже рівномірного прогріву.

Ключові слова: лазерний нагрів, поверхневі структури, нестационарна теплопровідність

E-mail: llerman@yandex.ru

Вступ

Одним з найбільш цікавих як з теоретичної, так і з практичної точок зору, ефектів, що спостерігаються в твердих тілах, зокрема і в напівпровідниках, які знаходяться в полі інтенсивного лазерного випромінювання, є утворення на їх поверхні періодичних поверхневих структур різної форми та природи. Вперше такі структури спостерігалися іще понад 30 років тому при опроміненні напівпровідників Ge та Si імпульсним випромінюванням рубінового лазера [1]. Згодом такі ж структури спостерігалися не тільки в напівпровідниках, але і в металах (Ni, Cu, Pb, Al, сталь, латунь, тощо) та діелектриках (NaCl, плавленому та кристалічному кварці, тощо). Завдяки інтенсивним експериментальним та теоретичним дослідженням, що проводяться у цьому напрямку, зараз склалася така фізична картина генерації періодичних поверхневих структур [2,3 та ін].

1. Процес утворення періодичної структури на поверхні твердого тіла починається з виник-

Grechko L.G., Dr. Sc., prof.,
Lerman L.B., Ph. D.,
Semchuk O.Yu, Ph. D.,
Luschenko M.O., Post Gradient St.
Kunitska L.Yu, ingehear

Laser-induced periodical surface structures

The spatial and temporal temperature distribution in a surface of solid state heated by laser interference pattern are investigated. The special method to calculation of temperature distribution and its velocity is used. Two-dimensional periodical structures are considered. It is shown, that the maximal heating up is observed in the centre of a circle and temperature quickly falls down in process of removal from the centre. The area where the intensive heating up of a surface is observed, makes up to 0.8 r/a (a is the period of gratings, r is a radius of laser beams)

Key Words: laser, surface structures, nonstationary conduction

нення періодично модульованого інтерференційного світлового поля в просторі поблизу поверхні або на самій поверхні. Причина його появи може бути різною. Це може бути інтерференція падаючої світлової хвилі із хвилею, розсіяною неоднорідною поверхнею (при цьому випадкові неоднорідності рельєфу поверхні можуть носити як статичний, так і динамічний характер) або безпосереднє накладення на поверхню твердого тіла інтерференційної картини, яка утворюється внаслідок інтерференції кількох (не менше двох) лазерних пучків.

2. В періодично промодульованому по інтенсивності світловому полі відбувається просторово-неоднорідний нагрів поверхні. При цьому розподі температури вздовж поверхні, очевидно, корелює з розподілом інтенсивності світлового поля.

3. Неоднорідний нагрів поверхні викликає неоднорідне плавлення а потім і випаровування та абляцію речовини. Тобто, інакше кажучи, інтерференційний рельєф „запам'ятовується”, фіксується на поверхні.

При цьому можливо (і це часто реалізується на експерименті) виникнення нестійкостей за

рахунок позитивного зворотного зв'язку за наступною схемою: поява рельєфу поверхні певного періоду та фази сприяє підвищеному поглинанню в пікових позиціях структури, що ще більше збільшує глибину модуляції температури та приводить до подальшого збільшення поглинання і т.д.

Проте до останнього часу вивчалися лише просторово-періодичні поверхневі структури, що створювалися за допомогою інтерференційного світлового поля, утвореного інтерференцією падаючої світлової хвилі із хвилею, розсіяною неоднорідною поверхнею. Вивчення просторово-періодичних поверхневих структур, утворених безпосереднім накладення на поверхню твердого тіла інтерференційної картини, яка утворюється внаслідок інтерференції кількох (не менше двох) лазерних пучків, почалося лише кілька років тому. Ця стаття присвячена теоретичному вивченню саме таких просторово-періодичних поверхневих структур.

1. Постановка задачі

Розглядається процес поширення тепла у твердому тілі при нагріванні його лазерними пучками, які на поверхні тіла утворюють двовимірну періодичну ґратку (рис. 1).

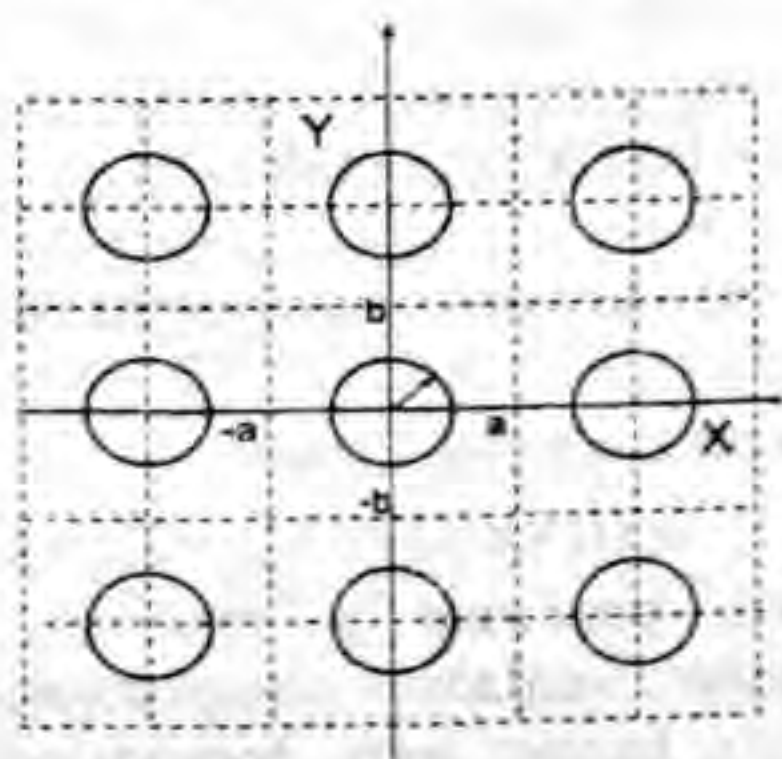


Рис. 1. Двовимірні періодична ґратка, яку утворюють лазерні пучки

Передбачається, що пучки однакові, падають нормально до поверхні й не взаємодіють між собою. У випадку, коли теплофізичні характеристики твердого тіла не залежать від температури й координат, розподіл температури $T = T(x, y, z, t)$ в середовищі задовольняє лінійному нестационарному рівнянню теплопровідності виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \alpha I(x, y, z, t), \quad (1)$$

де χ – температуропровідність, яка пов'язана з коефіцієнтом теплопровідності k , щільністю ρ й теплоємністю при постійному тиску c_p співвідношенням $\chi = k / (\rho c_p)$; α – коефіцієнт поглинання випромінювання; $I(x, y, z, t)$ – розподіл інтенсивності випромінювання в середовищі (в області $z \geq 0$).

У випадку пучка з гауссовим розподілом інтенсивності приймається, що

$$I(x, y, z, t) = H(x, y) I_0 (1 - R) e^{-\alpha z} e^{-(x^2 + y^2)/r^2} f(t), \quad (2)$$

де I_0 – інтенсивність випромінювання, що падає на поверхню ззовні, R – коефіцієнт відбиття за потужністю, r – радіус пучка, $H(x, y) = 1$, якщо x, y належать колу з радіусом r й $H(x, y) = 0$ у протилежному випадку (див. рис. 1). Функція $f(t)$ задає форму імпульсу.

Температуру відраховуємо від початкового значення T_0 . У силу лінійності рівняння (1), воно зберігає свій вигляд і для різниці $T - T_0$. Тому, не применшуючи спільності можна вважати, що температура відраховується від нуля.

Шуканий розподіл температур повинен задовольняти наступним крайовим і початковим умовам. У силу періодичності задачі на границях періодичної структури джерел повинні обертатися на нуль теплові потоки

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = 0. \quad (3)$$

На поверхні $z = 0$ приймається відсутність теплового потоку

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

і при цьому слід враховувати, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T = 0. \quad (5)$$

Для температури додатково також приймемо нульову початкову умову

$$T(x, y, z, 0) = 0. \quad (6)$$

2. Алгоритм розв'язання задачі

Розв'язок сформульованої вище задачі може бути побудований з використанням функції Гріна рівняння теплопровідності для півпростору [1]. Однак при цьому виникає нетривіальна задача обчислення невластних інтегралів, тому в дійсній роботі буде використаний інший підхід. Зазначимо, що рівняння (1) має постійні коефіцієнти і є неоднорідним. При цьому у функції джерела змінні розділені. При цих

обставинах досить зручним виявляються методи інтегральних перетворень [4-5].

Нами використані кінцеве інтегральне перетворення по координатах x, y і косинус перетворення Фур'є по координаті z . Послідовне виконання цих перетворень (незалежно в якій послідовності) приводить до сімейства неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку за часом. Розв'язок останнього отримується просто, після чого перехід у простір оригіналів дає аналітичний розв'язок задачі (1)-(6) у вигляді збіжного ряду й інтеграла.

Як ядро двовимірного інтегрального перетворення по координатах x, y виберемо функцію $K_{nm}(x, y) = \cos(\lambda_n x) \cos(\mu_n y)$, де $\lambda_n = n\pi/a$, $\mu_n = n\pi/b$. Результат виконання такого перетворення (зображення) будемо позначати індексами n, m . Тоді за означенням буде

$$T_{nm}(z, t) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b T(x, y, z, t) K_{nm}(x, y) dx dy,$$

$$I_{nm}(z, t) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b H(x, y) I(x, y, z, t) K_{nm}(x, y) dx dy. \quad (7)$$

Помножимо рівняння (1) на ядро $K_{nm}(x, y)$ і проінтегруємо в межах розмірів періоду. Операції диференціювання по параметру і інтегрування в кінцевих границях переставні, тому будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \int_{-b}^b T(x, y, z, t) K_{nm}(x, y) dx dy = \\ = \chi \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) K_{nm}(x, y) dx dy + \\ + \chi \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b T(x, y, z, t) K_{nm}(x, y) dx dy + \\ + \alpha \int_{-a}^a \int_{-b}^b H(x, y) I(x, y, z, t) K_{nm}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

Виконаємо в першому інтегралі в правій частині двічі інтегрування за частинами. Із врахуванням початкових і граничних умов для обраного ядра й позначень (7) будемо мати рівняння

$$\frac{\partial T_{nm}}{\partial t} = -\chi(\lambda_n^2 + \mu_n^2) T_{nm} + \chi \frac{\partial^2 T_{nm}}{\partial z^2} + \alpha I_{nm}(z, t). \quad (9)$$

При цьому необхідно також перетворити й граничні умови (4), (5). Оскільки вони не залежать від координат x, y , то можна записати

$$\left. \frac{\partial T_{nm}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} T_{nm} = 0 \quad (10)$$

Аналогічно для початкової умови буде

$$T_{nm}(z, 0) = 0. \quad (11)$$

Якщо на межі поділу середовищ задана похідна температури у випадку півпростору зручно застосувати косинус-перетворення Фур'є з ядром $\cos \zeta z$, де ζ – змінна перетворення. Його застосування приводить до сімейства звичайних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\frac{dT_{nm}^F}{dt} = -\chi(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \zeta^2) T_{nm}^F + \alpha I_{nm}^F(\zeta, t), \quad (12)$$

де

$$T_{nm}^F = T_{nm}^F(\zeta, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_{nm}(z, t) \cos \zeta z dz,$$

$$I_{nm}^F(\zeta, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty I_{nm}(z, t) \cos \zeta z dz. \quad (13)$$

Початкова умова для функцій $T_{nm}^F(t)$ зберігається нульовою, тобто $T_{nm}^F(0) = 0$. Розв'язки рівнянь (12) можуть бути отримано різними методами. У цьому випадку зручно використати для довільної форми імпульсу запис розв'язків у вигляді інтеграла Дюамеля

$$\begin{aligned} T_{nm}^F(\zeta, t) &= \int_0^t h_+(t-\tau) \alpha I_{nm}^F(\zeta, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t h_+(\tau) \alpha I_{nm}^F(\zeta, t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

де $h_+(t-\tau)$ – це нормальна реакція на одиничний імпульс [4,5].

Для рівняння (14) маємо

$$h_+(t) = \exp[-\chi(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \zeta^2)t].$$

Отже, розв'язок в просторі зображень побудовано. Послідовно повертаючись у простір оригіналів, будемо мати формальний розв'язок для довільного імпульсу:

$$\begin{aligned} T_{nm}(z, t) &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T_{nm}^F(\zeta, t) \cos \zeta z d\zeta = \sqrt{2/\pi} \alpha \times \\ &\times \int_0^\infty \cos \zeta z d\zeta \int_0^t e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_n^2 + \zeta^2)\tau} I_{nm}^F(\zeta, t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Обернення кінцевого інтегрального перетворення дається рядом. Тоді для розподілу температур одержимо остаточний вираз

$$T(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_{nm} T_{nm}(z, t) K_{nm}(x, y), \quad (16)$$

У розгорнутому вигляді розв'язок задачі запишеться у вигляді

$$T(x, y, z, t) = \alpha \sqrt{2/\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{nm} \times \\ \times \left\{ \int_0^{\infty} \cos \zeta z d\zeta \int_0^t e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)\tau} I_{nm}^F(\zeta, t - \tau) d\tau \right\} K_{nm}(x, y). \quad (17)$$

3. Дослідження загального розв'язку

Розглянемо докладніше імпульс (2), коли часова функція $f(t) = h(t)$ описує ступінчатий імпульс нескінченної тривалості, який задається функцією Хевісайда $h(t)$:

$$I(x, y, z, t) = I_0(1 - R)e^{-\alpha z} e^{-(x^2 + y^2)/r^2} H(x, y) h(t). \quad (18)$$

Тоді результати для імпульсу довільної формули можна буде одержати після виконання операції згортки в остаточному розв'язку.

Застосовуючи загальні формули, будемо мати

$$I_{nm}(z, t) = I_0(1 - R)e^{-\alpha z} h(t) \times \\ \times \int_{-a}^a \int_{-b}^b H(x, y) e^{-(x^2 + y^2)/r^2} \cos \lambda_n x \cos \mu_m y dx dy. \quad (19)$$

Подвійний інтеграл в (19), який ми позначимо через G_{nm} легко зводиться до повторного інтеграла, і, у силу парності за обома змінними, інтегрування достатньо виконати тільки в першій чверті. Буде

$$G_{nm}(z, t) = 4 \int_0^a \int_0^b H(x, y) e^{-(x^2 + y^2)/r^2} K_{nm} dx dy =$$

$$4 \int_0^a e^{-x^2/r^2} \cos \lambda_n x dx \int_0^b e^{-y^2/r^2} \cos \mu_m y dy. \quad (20)$$

Інтеграл (20) аналітично знайти неможливо, але, в загальні, його можна обчислити чисельно. Із врахуванням (20) одержимо, що

$$I_{nm}(z, t) = I_0(1 - R)G_{nm} e^{-\alpha z} H(t). \quad (21)$$

Застосовуючи до (21) косинус-перетворення Фур'є, зі врахуванням того, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha z} \cos \zeta z dz = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \zeta^2},$$

будемо мати

$$I_{nm}^F(t) = I_0(1 - R)G_{nm} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \zeta^2} H(t). \quad (22)$$

Тоді в силу (15)

$$T_{nm}^F(\zeta, t) = I_0(1 - R)G_{nm} \sqrt{2/\pi} \times \\ \times \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \zeta^2} \int_0^t h_+(t - \tau) H(\tau) d\tau = \\ = I_0(1 - R)G_{nm} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \zeta^2} \sqrt{2/\pi} \int_0^t e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)\tau} d\tau, \quad (23)$$

і після інтегрування отримаємо:

$$T_{nm}^F(\zeta, t) = I_0(1 - R)G_{nm} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \zeta^2} \sqrt{2/\pi} \times \\ \times \frac{1}{\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} \left[1 - e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)t} \right]. \quad (24)$$

Випишемо обернене перетворення Фур'є

$$T_{nm}(z, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} T_{nm}^F(\zeta, t) \cos \zeta z d\zeta = \\ = I_0(1 - R)G_{nm} \frac{\alpha^2}{\chi} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)t} \right] \cos \zeta z \right] d\zeta. \quad (25)$$

З урахуванням значення квадрата норми $\|K_{nm}\|^2$ одержуємо наступний вигляд розв'язку задачі

$$T(x, y, z, t) = I_0(1 - R) \frac{\alpha^2}{\chi ab} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{ \dots \}, \quad (27)$$

де вираз у фігурних дужках записується у вигляді

$$\left\{ \dots \right\} = \int_0^{\infty} \left[\frac{1 - e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)t}}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} \cos \zeta z d\zeta \right] \varepsilon_{nm} G_{nm} K_{nm}(x, y).$$

З виразу (27) неважко знайти швидкість $v = v(x, y, z, t)$ зміни температури в довільній точці тіла

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, y, z, t) = I_0(1 - R) \frac{\alpha^2}{ab} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{ \dots \}, \quad (28)$$

де

$$\{ \dots \} = \int_0^{\infty} \left[\frac{(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2) e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)t}}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} \cos \zeta z d\zeta \right] \times \\ \times \varepsilon_{nm} G_{nm} K_{nm}(x, y)$$

Таким чином, задача знаходження полів температури й швидкості поширення теплової хвилі в довільний момент часу зводиться до обчислення коефіцієнтів G_{nm} , інтегралів, що входять в (25) (обернення перетворення Фур'є) і підсумовуванню рядів.

Розглянемо деякі окремі випадки.

Вираз (27) можна подати у вигляді суми двох доданків

$$T(x, y, z, t) = T_{st}(x, y, z, t) + T_{din}(x, y, z, t), \quad (29)$$

де $T_{st}(x, y, z, t)$ - сталий розподіл температур, а $T_{din}(x, y, z, t)$ - розподіл температур, який залежить від часу.

Переходячи до границі при $t \rightarrow \infty$ у формулах (27) можна знайти стаціонарний розподіл температур:

$$T_{st}(x, y, z) = I_0(1-R) \frac{\alpha^2}{\chi ab} \frac{2}{\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} \cos \zeta z d\zeta \right\} \times \varepsilon_{nm} G_{nm} K_{nm}(x, y), \quad (30)$$

або, підставляючи значення інтеграла [7]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \zeta z}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} d\zeta = \frac{\pi}{2(\lambda_n^2 + \mu_m^2 - \alpha^2)} \left[\frac{\exp(-\alpha z)}{\alpha} - \frac{\exp(-\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} z)}{\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2}} \right],$$

будемо мати

$$T_{st}(x, y, z) = I_0(1-R) \frac{\alpha^2}{\chi ab} \frac{2}{\pi} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{nm} \left\{ \frac{\exp(-\alpha z)}{\alpha} - \frac{\exp(-\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} z)}{\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2}} \right\} \times \frac{G_{nm} K_{nm}(x, y)}{\lambda_n^2 + \mu_m^2 - \alpha^2}. \quad (31)$$

Формула (31) дозволяє обчислити глибину прогріву тіла в кожній його точці. На поверхні тіла (при $z=0$) температура визначається виразом

$$T(x, y, z, t)|_{z=0} = I_0(1-R) \frac{\alpha^2}{\chi ab} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} [\dots] \right\} \times \varepsilon_{nm} G_{nm} K_{nm}(x, y), \quad (32)$$

де вираз у квадратних дужках під знаком інтегралу має вигляд

$$\int_0^{\infty} [\dots] = \int_0^{\infty} \left[\frac{1 - e^{-\chi(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)t}}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} d\zeta \right]. \quad (32)$$

Тут також можливо виділити стаціонарну й динамічну частини. Використовуючи значення відповідних інтегралів

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + \zeta^2)(\lambda_n^2 + \mu_m^2 + \zeta^2)} d\zeta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha \sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} (\alpha + \sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2})},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x}}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{e^{b^2 a}}{b} [1 - \operatorname{erf}(b\sqrt{a})],$$

у результаті будемо мати:

$$T_{st}(x, y, 0, t) = I_0(1-R) \frac{\alpha}{\chi ab} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\varepsilon_{nm}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} (\alpha + \sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2})} G_{nm} K_{nm}(x, y) \right\}, \quad (33)$$

$$T_{din}(x, y, 0, t) = I_0(1-R) \frac{\alpha^2}{\chi ab} \frac{2}{\pi} \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{ B_{nm} \varepsilon_{nm} G_{nm} K_{nm}(x, y) \}, \quad (34)$$

де

$$B_{nm} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\lambda_n^2 + \mu_m^2 - \alpha^2} \times \{ \dots \}, \quad (35)$$

а вираз у фігурних дужках є

$$\{ \dots \} = \left\{ \frac{e^{-(\lambda_n^2 + \mu_m^2 - \alpha^2)\chi t} [1 - \operatorname{erf}(\alpha\sqrt{\chi t})]}{\alpha} - \frac{1 - \operatorname{erf}(\sqrt{(\lambda_n^2 + \mu_m^2)\chi t}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2}} \right\}.$$

Зокрема, у центрах лазерних пучків (при $x=y=0$) для тіла, що опромінюється, у відповідних рядах треба прийняти $K_{nm}(0,0)=1$.

4. Результати розрахунків

Приведемо деякі приклади розрахунків за отриманими вище формулами. При проведенні розрахунків вихідне рівняння було представлено в безрозмірному вигляді. Як лінійний розмір був прийнятий напівперіод структури a в напрямку осі x , і введено безрозмірний час $t = \chi t' / a^2$, t' - розмірний час. Функція джерела представлена у вигляді

$$I(x, y, z, t) = I_0(1-r)F(x, y)e^{-\alpha z}f(t)$$

При переході до безрозмірних координат у рівнянні теплопровідності біля функції джерела з'являється множник, що має розмірність температури

$$T^* = \frac{\alpha a^2}{\chi} I_0.$$

Всі результати подані у вигляді залежностей безрозмірної температури $\theta = T/T^*$ для безрозмірного часу й безрозмірних лінійних координат $x = x'/a$, $y = y'/a$, $z = z'/a$, x', y', z' - розмірні координати.

Розглядалися наступні випадки.

1. Двовимірна періодична структура із джерелами, що діють у межах кола радіуса r з Гауссовим розподілом інтенсивності. Розглядався випадок ступінчатого імпульсу випромінювання, що задається функцією Хевисайда. Розподіл швидкостей на поверхні тіла в деякі моменти часу показано на рис. 2,3 у середньому й діагональному перерізі квадратної комірки періоду. Прийнято, що пучок розподілений по колу з радіусом $r/a = 0,2$.

2. Для тієї ж двовимірної періодичної структури було розглянуто миттєвий імпульс, який описується δ -функцією. Розподіл температури на поверхні тіла в середньому й діагональному в перерізі квадратної комірки для різних радіусів пучка при $t=0.005$ представлено на рис. 5,6, а для різних значень часу на рис. 7,8 при $r/a = 0,2$.

3. Розглядалася також одномірна періодична структура при дії миттєвого імпульсу, який задається δ -функцією. Прийнято, що інтенсивність випромінювання розподілена по ширині пучка r рівномірно. Розподіл температури на поверхні тіла поперек смуг для різних значень ширини пучка при $t=0.005$ представлено на рис. 9, а для різних значень часу на рис. 10 при ширині $r/a = 0,2$.

При всіх розрахунках було прийнято, що коефіцієнт поглинання $\alpha = 0,15$. У подвійних рядах утримувалося 64 члена ряду, а в одинарному ряді - 8 членів ряду, що забезпечувало задовільну збіжність.

На рис. 2,3 наведені розподіли швидкості температури при дії ступінчатого імпульсу, а цифри відповідають наступним значенням часу 1 - $t=0,05$; 2 - $t=0,10$; 3 - $t=0,15$; 4 - $t=0,20$; 5 - $t=0,25$.

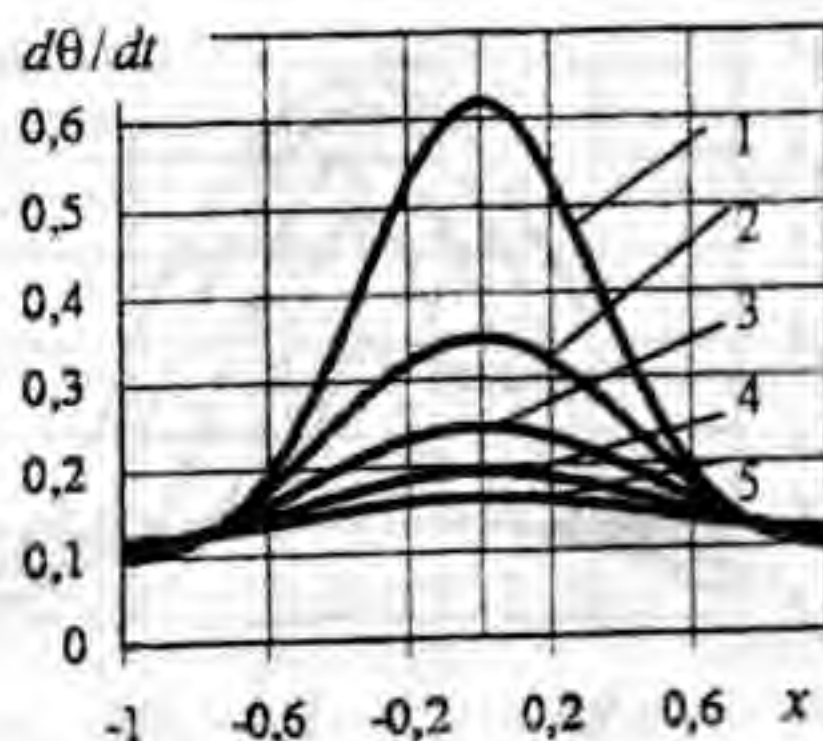


Рис. 2. Розподіл швидкості зміни температури на поверхні тіла в середньому перерізі періодичної структури в різні моменти часу

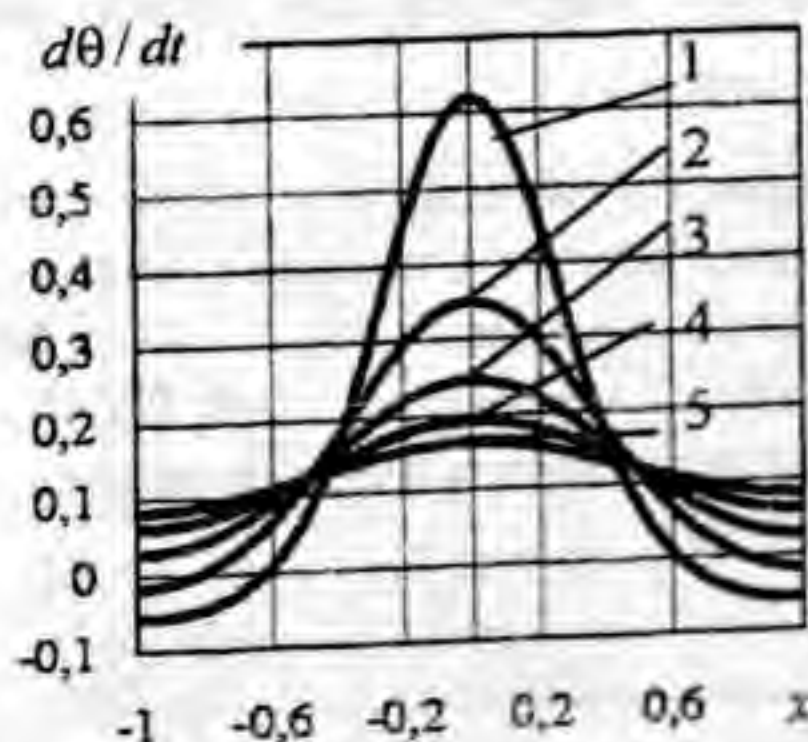


Рис.3. Розподіл швидкості зміни температури на поверхні тіла в діагональному перерізі ($x=y$) періодичної структури в різні моменти часу

Для миттєвого імпульсу результати наведені на рис. 4,5, а цифри відповідають наступним значенням відносних радіусів пучків: 1 - $r/a=0,2$; 2 - $r/a=0,4$; 3 - $r/a=0,6$; 4 - $r/a=0,8$; 5 - $r/a=1,0$.

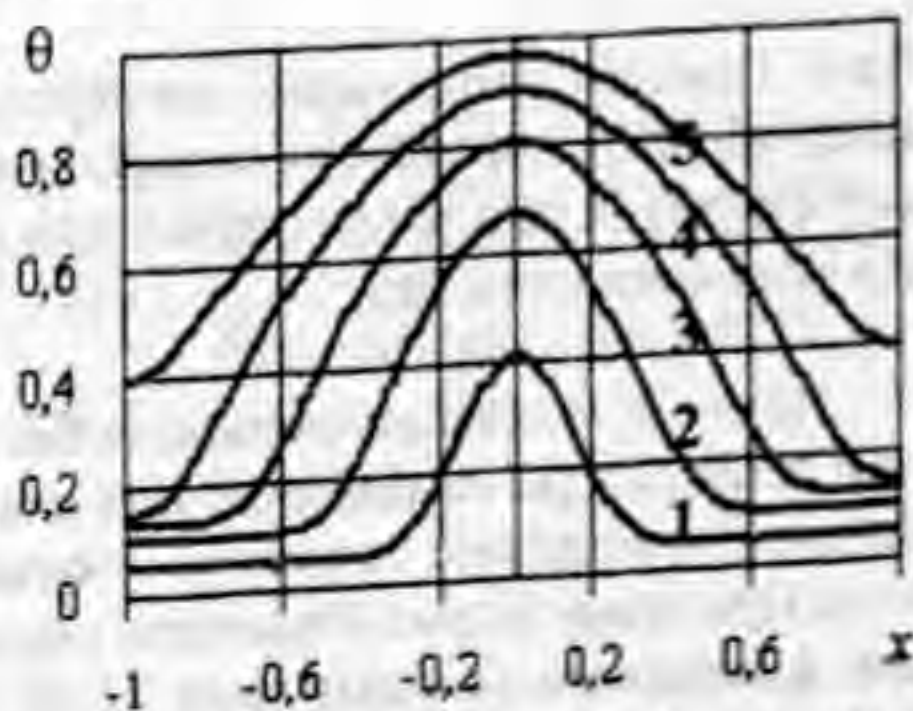


Рис.4. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в середньому перерізі періодичної структури для різних радіусів пучка

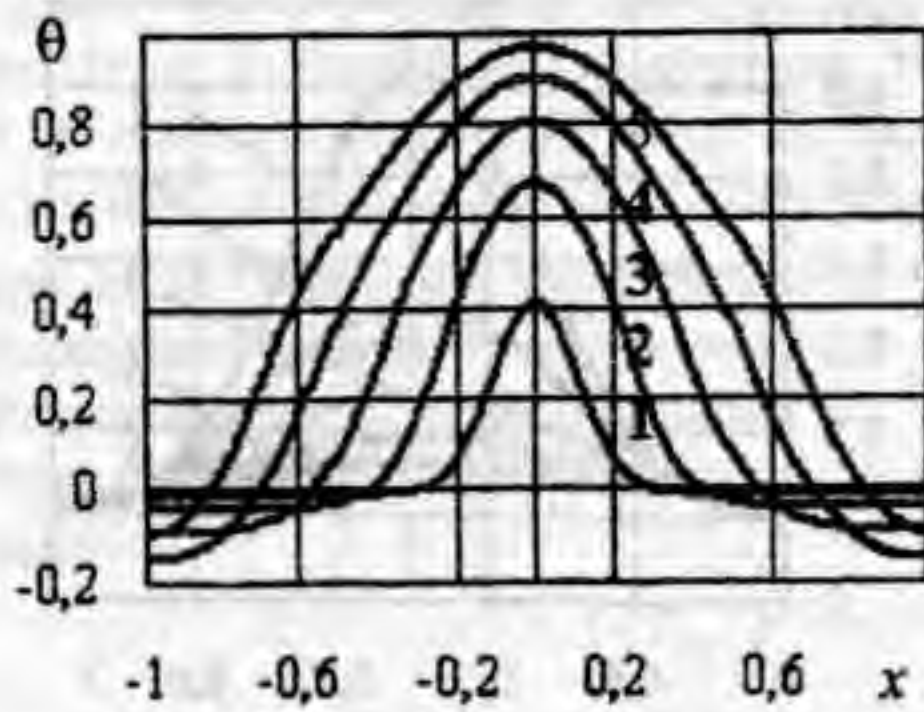


Рис.5. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в діагональному перерізі ($x = y$) періодичної структури для різних радіусів пучка

На рис. 6,7 наведені результати також для миттєвого імпульсу, а цифри відповідають наступним значенням часу 1 - $t=0,005$; 2 - $t=0,010$; 3 - $t=0,015$; 4 - $t=0,020$; 5 - $t=0,025$ при фіксованому значенні радіусу пучка ($r/a=0,20$).

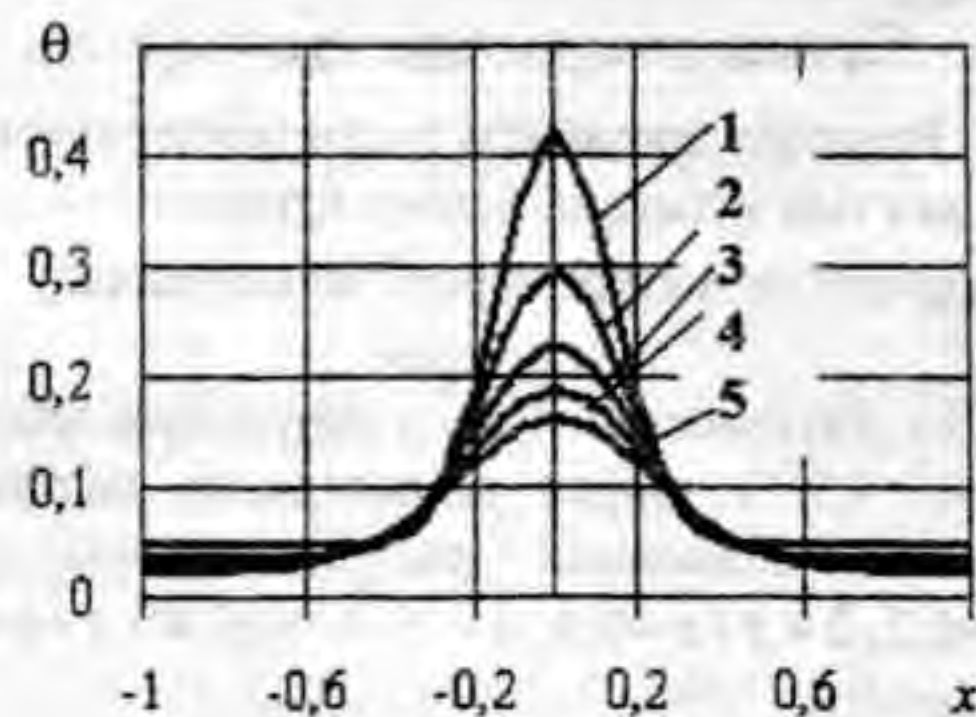


Рис.6. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в середньому перерізі періодичної структури при радіусі пучка $r/a=0,20$; для різних моментів часу

На рис 8, 9 наведені розподіли без розмірної температури на поверхні тіла для одновимірної періодичної структури (смугасті пучки). При цьому на рис. 8 наведені результати для фіксованого моменту часу ($t=0,005$) і деяких значень ширини пучка (цифрами позначені наступні значення ширини смуги відповідно: 1 - $r/a=0,2$; 2 - $r/a=0,4$; 3 - $r/a=0,6$; 4 - $r/a=0,8$; 5 - $r/a=1,0$). На рис. 9, навпаки, – при фіксованій ширині смуги нагріву ($r/a=0,20$) для різних моментів часу де цифрами позначені такі його значення: (1

- $t=0,005$; 2 - $t=0,010$; 3 - $t=0,015$; 4 - $t=0,020$; 5 - $t=0,025$.

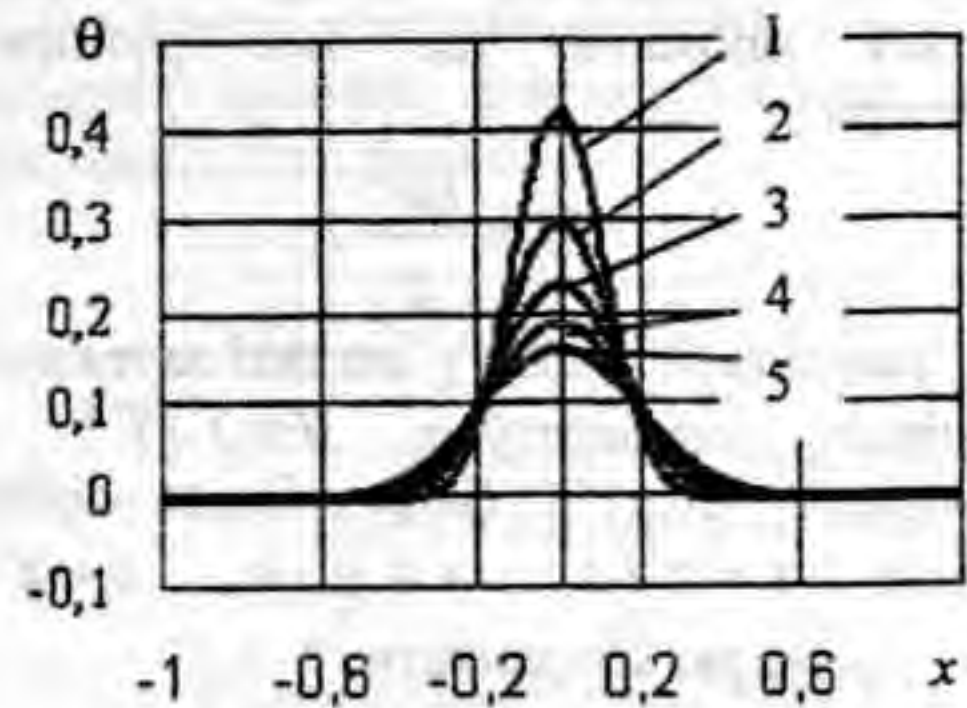


Рис.7. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в діагональному перерізі ($x = y$) періодичної структури при радіусі пучка $r/a=0,20$; для різних моментів часу

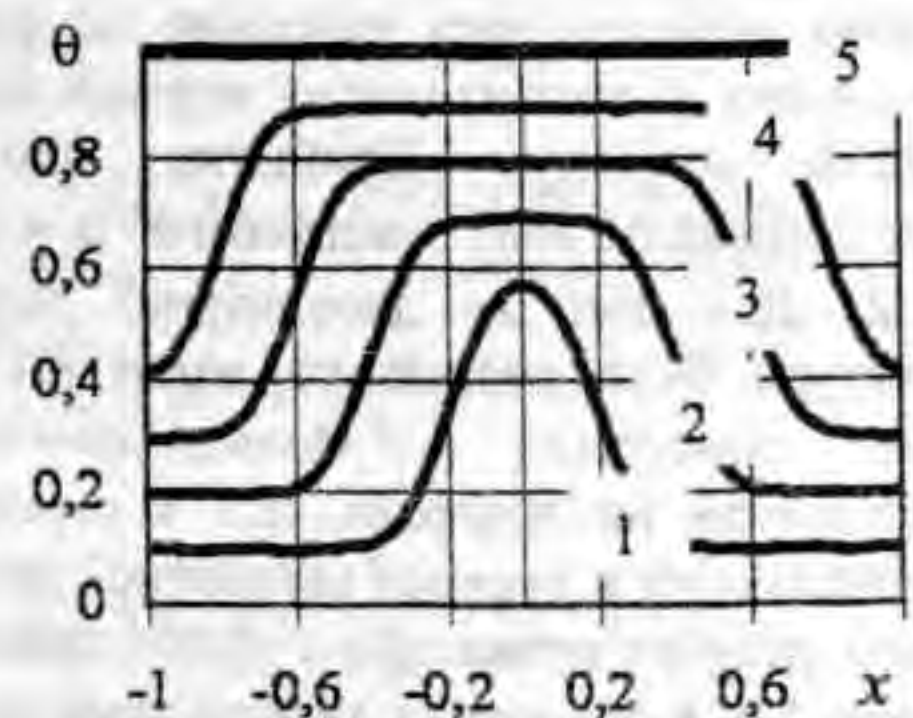


Рис.8. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в одновимірній періодичній структурі для різних значеннях ширини пучка ($t=0,005$).

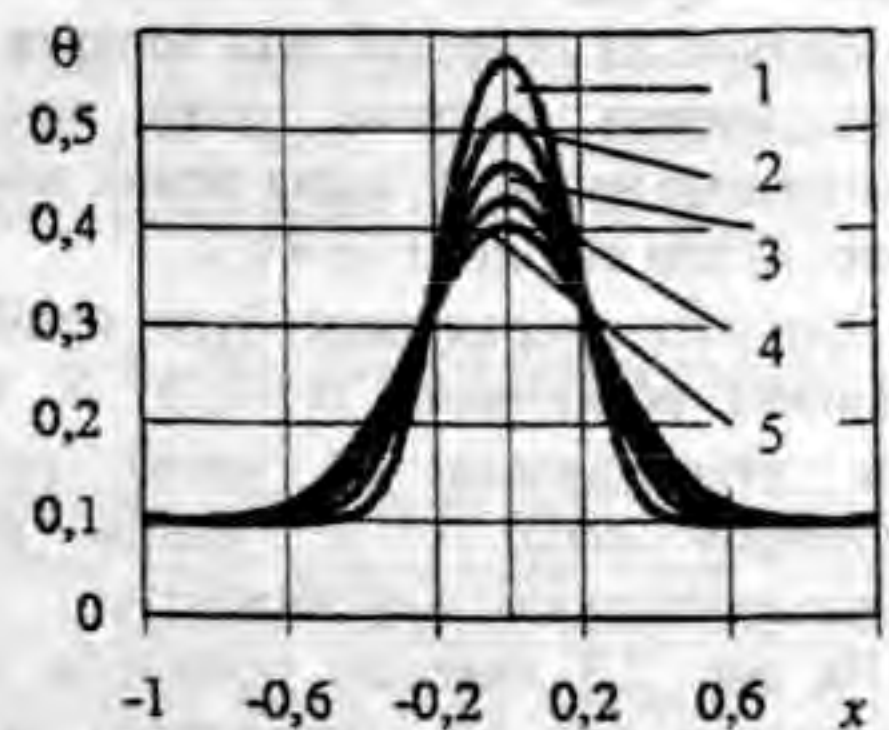


Рис.9. Розподіл безрозмірної температури на поверхні тіла в одновимірній періодичній структурі ($r/a=0,2$) при фіксованій ширині пучка для різних значень часу.

Наведені графіки (див. рис 2-9) підтверджують високу ефективність розробленої методики розрахунків. При цьому навіть невелика кількість утриманих членів в рядах дозволило отримати в результатах достатньо добру точність. Деяка похибка на краях періодів двовимірної ґратки обумовлена дефектом збіжності Гібса в рядах Фур'є, і вона може бути досить легко усунена при використанні ланцюгових множників Ланцоша [8].

Зокрема розрахунки показали, що на поверхні тіла досить швидко досягається стаціонарний стан (приблизно $t \approx 0,25$) як у двовимірній, так і в одновимірній структурі. Для миттєвого імпульсу цей процес проходить довше, але суттєво залежить від відношення r/a . Ширина максимальних значень поверхневої температури є меншою, ніж для одновимірної ґратки. Це пояснюється тим, що відстань до кута прямокутної комірки від центра пучка більше ніж до бічної сторони, і це є чисто формальною причиною.

Висновки

Таким чином, запропоновано ефективний метод розв'язання нестационарних задач теплопровідності для періодичних структур, що виникають при інтерференції лазерних пучків. Розроблена методика дозволяє проводити чисельне дослідження впливу, як розмірів пучків, так і їх розподіл по площі плями нагріву на просторово-часовий розподіл температурних полів, і зокрема на поверхні твердого тіла

Нами розглянуто дві форми зміни імпульсу у часі: миттєвий і нескінченної дії (функція Хевісайда). Це дозволяє із застосуванням операції згортки в кінцевому розв'язку розглядати довільну форму імпульсу у часі та отримувати відповідні розв'язки задачі в цих випадках.

Відмітимо, що для нагріву поверхні одновимірна смугаста система пучків виявляється більш ефективною для тих випадків, коли потрібно досягти біля рівномірного розподілу температури. Двовимірна система пучків більш орієнтована на випадки, коли потрібно локалізувати швидкий прогрів поверхні.

Робота виконана в рамках бюджетної теми №3 Інституту хімії поверхні НАН України «Теоретичне дослідження та моделювання процесів хімічної модифікації поверхні наночастинок, фізико-хімічних властивостей та особливостей взаємодії з біологічними об'єктами» і за фінансової підтримки комплексної програми фундаментальних досліджень НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали та нанотехнології» (до-

говір №37-07/Н «Моделювання процесів взаємодії електромагнітного випромінювання з регулярними, стохастичними та фрактальними поверхневими наноструктурами»).

Список використаних джерел

1. Коротеев Н.И., Шумай И.Л. Нелинейно-оптическая диагностика состояния и быстрых лазер-индуцированных фазовых превращений поверхности полупроводников // Физические основы лазерной и пучковой технологии. Т.1. – М.: ВИНТИБ 1988. С.49.
2. Емельянов В.И., Семиногов В.Н. Лазер-индуцированные неустойчивости рельефа поверхности и изменение отражательной и поглощательной способностей конденсированных сред // Физические основы лазерной и пучковой технологии. Т.1. – М.: ВИНТИБ 1988. С.118.
3. Lasgani A., Holzapfel C., Muklich F. Periodic Pattern Formation of Intermetallic Phases with Long Range Order by Laser Interference Metallurgy // Adv.Eng.Matter., 2005, v/7, no.6, p.487-491.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
5. Лерман Л.Б. Упругое деформирование пластины в жестком экране и акустическом волноводе при воздействии слабых ударных волн // Прикл. механика, 1998. – 34, № 5. – С. 104-110.
6. Лерман Л.Б. Прохождение импульсов давления через упругие пластины конечных размеров // Акустичний вісник. – 1998. – 1, № 4. С. 47 – 55.
7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
8. Канторович Л.В., Крылов А.И. Приближенные методы высшего анализа. – Л.-М.: Гостехиздат, 1949. – 695 с.

Надійшла до редколегії 29.09.07

УДК 537.228.1

Жабітенко О.М., Бурлій П.В.^{*}, Козаченко В.В.

Фототермоакустичний ефект в тонких плівках при двомікрофонній реєстрації

В роботі запропоновано новий метод реєстрації фототермоакустичного перетворення. Аналізується залежність відношення фототермоакустичних сигналів, які знімаються окремо з двох мікрофонів, від параметрів тонких плівок. Показано, що відношення частотних залежностей амплітуди та фази фототермоакустичного сигналу сильно залежать від коефіцієнта теплової дифузії та товщини зразка і майже не залежать від коефіцієнта оптичного поглинання.

Ключові слова: фототермоакустичний ефект, коефіцієнт теплової дифузії.

^{*}E-mail: pburliy@univ.kiev.ua

В останні роки широке розповсюдження для вивчення речовин в різних агрегатних станах і процесів в них, а також безконтактного збудження акустичних коливань і хвиль знайшов фототермоакустичний (ФТА) ефект [1,2]. Одним з найбільш поширених методів, що базуються на ФТА ефекті є газомікрофонний [1]. Однак цей метод має певні обмеження для дослідження тонких зразків, що пов'язано з обмеженням звуковим діапазоном частот модуляції збуджуючого світлового потоку. В той же час сучасні матеріали часто виготовляють у вигляді тонких плівок [3]. Для подолання цього обмеження в даній роботі запропоновано удосконалений газомікрофонний варіант реєстрації ФТА сигналу. Він полягає в одночасній реєстрації змінної складової тиску по обидві сторони тонкого зразка, а як інформативний сигнал розглядається їх відношення.

Геометрія задачі зображена на рис.1. Модульований світловий потік потрапляє на одну з поверхонь зразка у вигляді тонкої пластини товщиною h . Збуджує в ньому теплові хвилі, які поширюються і досягають протилежної поверхні. Газ біля поверхонь

O.M.Zhabitenko, P.V.Burliy^{*}, V.V.Kozachenko.

Photothermoacoustics effect in thin films with two microphone detection.

In this work we propose a new method for determination of photothermoacoustic signal. Depending of ratio photothermoacoustic signals, which detection by two microphones, by parameters of thin films is analyzes. It is shown, frequency and phase of photothermoacoustics signal too much depend from thermal diffusion coefficient and thickness of a plate, but not much from optical absorption coefficient.

Key Words: photothermoacoustics, thermal diffusion coefficient.

зразка нагрівається і в результаті термопружного ефекту в ньому виникають акустичні коливання на частоті модуляції світлового потоку. Зразок знаходиться в герметичній комірці таким чином, що кожна його поверхня виходить в окрему герметичну камеру з прозорим вікном. Змінні складові тиску в герметичних камерах реєструються мікрофонами.

Відношення сигналів на мікрофонах (змінних складових тиску) пропорційне відношенню змінних складових температур

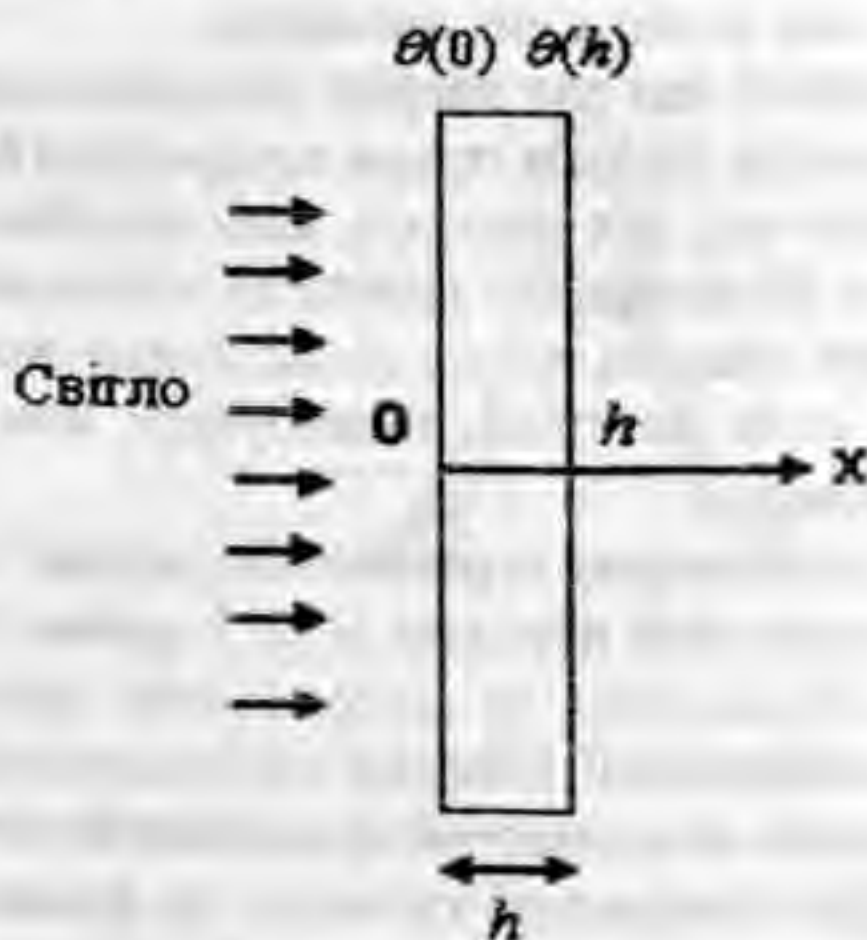


Рис.1. Геометрія задачі.

на поверхнях зразка:

$$\frac{P_1}{P_2} \sim \frac{\theta(0)}{\theta(h)} \quad (1)$$

де P_1 і P_2 - змінні складові тиску на поверхнях зразка, $\theta(0)$ і $\theta(h)$ - змінні складові температур на тих же поверхнях.

Для знаходження цього відношення необхідно розв'язати рівняння теплопровідності для зразка та оточуючого його газу використавши умови неперервності температури та теплового потоку на бічних поверхнях зразка.

Рівняння теплопровідності в зразку залишемо у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{D_T} \theta = -\frac{\alpha g P_0}{2\chi} e^{-\alpha x} \quad (2)$$

де α - коефіцієнт оптичного поглинання, D_T - коефіцієнт теплової дифузії, χ - теплопровідність, P_0 - інтенсивність світла, g - коефіцієнт, який визначає частку енергії світла, що поглинулась і пішла на нагрівання речовини. Інші позначення загальноприйняті.

В оточуючому середовищі з різних сторін зразка:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{D_{T_1}} \theta_1 = 0; \quad \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{D_{T_2}} \theta_2 = 0 \quad (3)$$

Розв'язок рівняння (2) будемо шукати у вигляді:

$$\theta(x) = \theta_{11} e^{-\gamma x} + \theta_{12} e^{\gamma x} + \theta_{21} e^{-\alpha x} + \theta_{22} e^{\alpha x} \quad (4)$$

$$\text{де: } \gamma = \sqrt{\frac{c\rho\omega}{2\chi}}(1+i),$$

Граничні умови: неперервність потоку тепла і температури на границях поділу зразок - газ:

$$\chi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \chi \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}; \quad \chi_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{x=h} = \chi \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=h};$$

$$\theta_1 \Big|_{x=0} = \theta \Big|_{x=0}; \quad \theta_2 \Big|_{x=h} = \theta \Big|_{x=h} \quad (5)$$

Підставивши (4) в (2) та (3) і врахувавши граничні умови, можна визначити θ_{11} , θ_{12} , θ_{21} , θ_{22} .

$$\theta_{11} = -\frac{\alpha}{\gamma} (-\theta_{21} + \theta_{22} \exp(\alpha h)^2 + \theta_{21} \exp(\alpha h + \gamma h) - \theta_{22} \exp(\alpha h + \gamma h)) / (-1 + \exp(\gamma h)^2) \exp(\gamma h - \alpha h)$$

$$\theta_{12} = -\frac{\alpha}{\gamma} ((-1 + \exp(\gamma h)^2) \exp(\alpha h) \theta_{21} - \theta_{22} \exp \alpha h - \theta_{21} \exp(\gamma h) + \theta_{22} \exp(\gamma h + 2\alpha h)) / \exp(\alpha h)$$

$$\theta_{21} = \frac{-\alpha g P_0}{2\chi(\alpha^2 - \gamma^2)}$$

$$\theta_{22} = \frac{-\alpha g P_0 \exp(-2\alpha h)}{2\chi(\alpha^2 - \gamma^2)}$$

Знайшовши ці величини ми можемо розрахувати температури на границях зразка та записати їх відношення:

$$\frac{\theta(0)}{\theta(h)} = -\exp(\gamma h - \alpha h) (1 + \exp(\alpha h(\alpha h - 2))) - \exp(\alpha h + \gamma h) - \exp(\gamma h - \alpha h) + \frac{1 + \exp(-\alpha h) - 2 \exp(\gamma h)}{\exp(\alpha h)} - \frac{\gamma(-1 + \exp(\gamma h)^2)}{\alpha} + \frac{\gamma(-1 + \exp(\gamma h)^2)}{\alpha \exp(2\alpha h)} / -\exp(\gamma h - \alpha h) \times (\exp(-\gamma h) + \exp(\alpha h(\alpha h - 2) - \gamma h) - \exp(\alpha h) - \exp(-\alpha h)) + \frac{\exp(\gamma h - \alpha h) + \exp(\gamma h) - \exp(\gamma h)^2 - \exp(2\gamma h)}{\exp(\alpha h)} \quad (6)$$

З цього виразу видно, що відношення температур на протилежних границях зразка не залежить від коефіцієнту g , який визначає частку енергії світла, що поглинулась і яка потім пішла на нагрівання речовини та інтенсивності світла P_0 .

Були отримані та проаналізовані теоретичні частотні залежності амплітуди та фази фототермоакустичного сигналу для різних випадків, які приведено на рис.2-7.

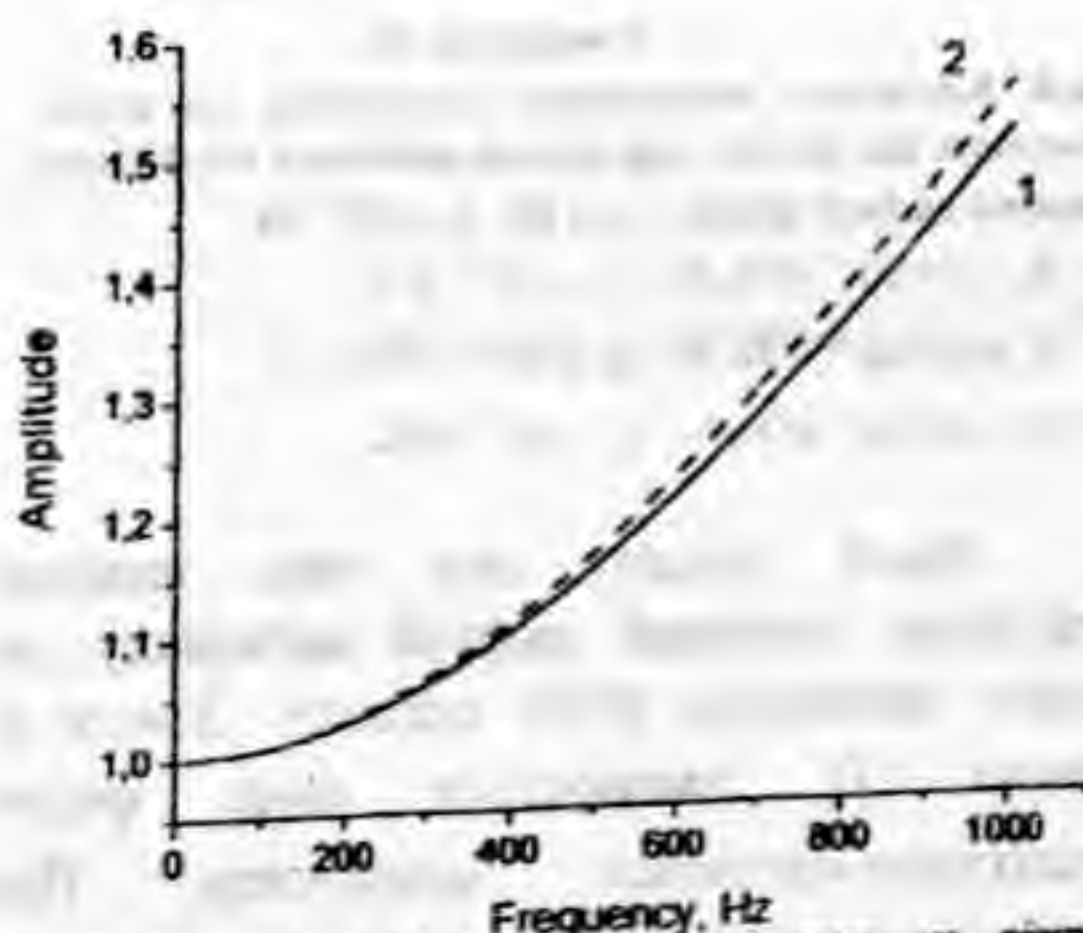


Рис.2 Залежність відношення температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях коефіцієнта оптичного поглинання зразка.
($D_T = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $h = 10^{-4} \text{ м}$)
1 - $\alpha = 10$, 2 - $\alpha = 10000$

експоненти, а при малих значеннях подібна до зростаючого логарифму.

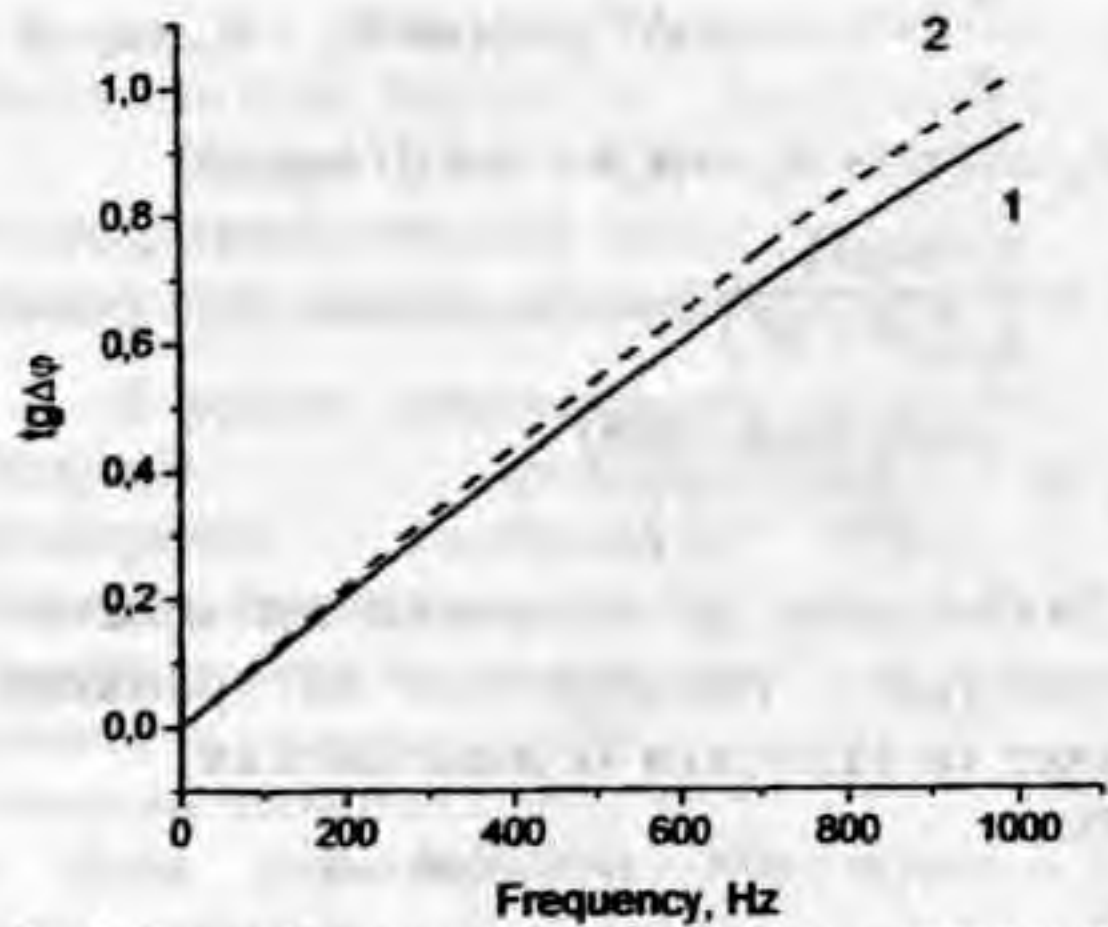


Рис.3 Залежність тангенса різниці фаз температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях коефіцієнта оптичного поглинання зразка.

($D_t = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $h = 10^{-4} \text{ м}$)

1 - $\alpha = 10$, 2 - $\alpha = 10000$

З рис.2 та рис.3 видно, що амплітудно-частотна та фазово-частотна залежності ФТА сигналу є нечутливими до коефіцієнта оптичного поглинання зразка.

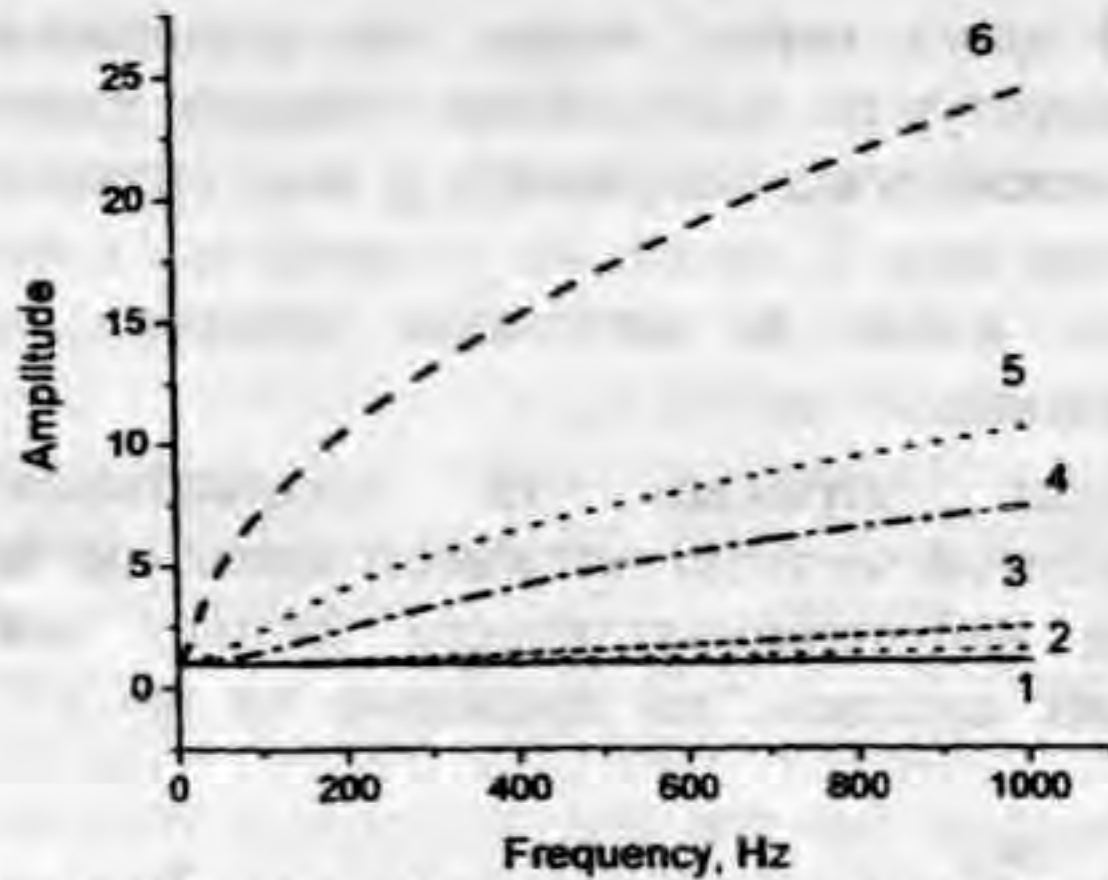


Рис.4 Залежність відношення температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях коефіцієнта теплової дифузії зразка. ($\alpha = 10$, $h = 10^{-4} \text{ м}$)

1 - $D_t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, 2 - $D_t = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$,

3 - $D_t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, 4 - $D_t = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$,

5 - $D_t = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, 6 - $D_t = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

Рис.4 показує що чим менший коефіцієнт теплової дифузії матеріалу, то більша амплітуда ФТА сигналу. Також із зміною D_t змінюється сама форма амплітудно-частотної залежності. При великих значеннях D_t амплітудно-частотна залежність має форму зростаючої

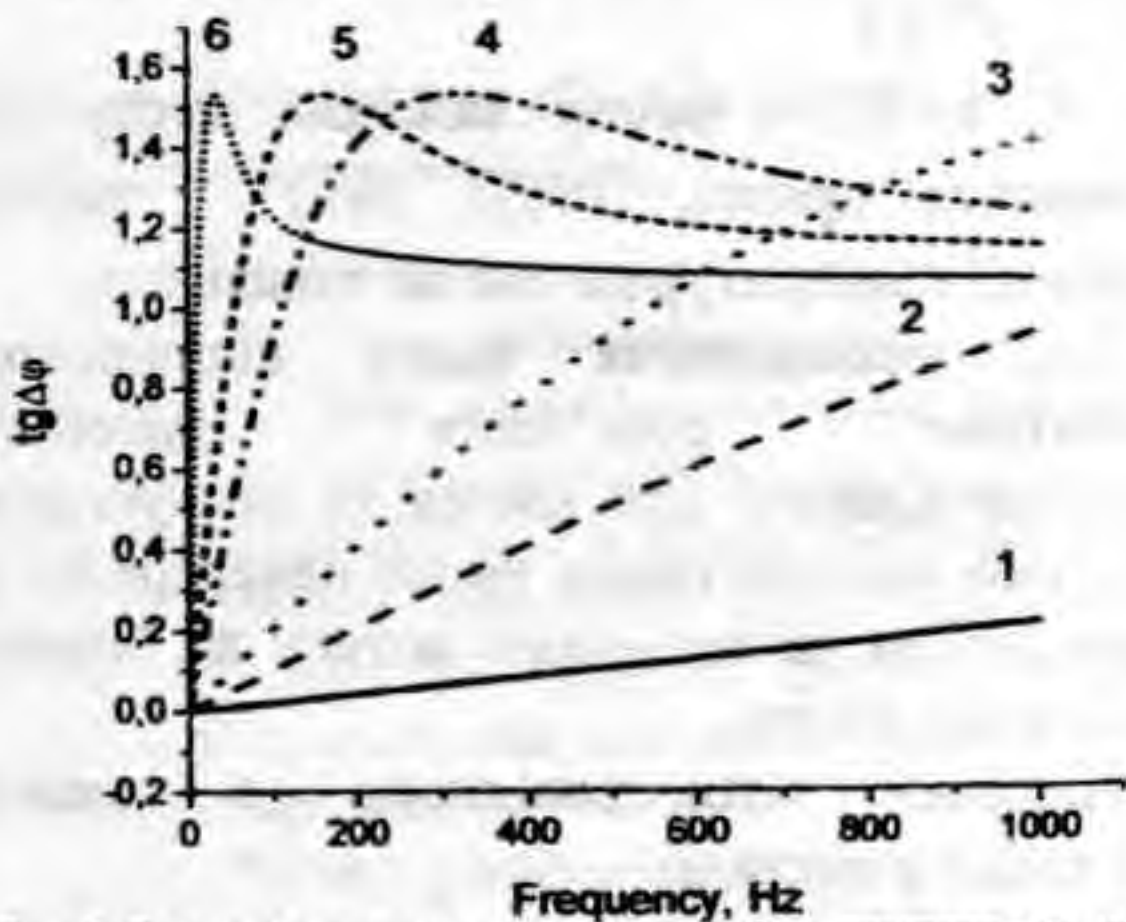


Рис.5 Залежність тангенса різниці фаз температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях коефіцієнта теплової дифузії зразка. ($\alpha = 10$, $h = 10^{-4} \text{ м}$)

1 - $D_t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, 2 - $D_t = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$,

3 - $D_t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, 4 - $D_t = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$,

5 - $D_t = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, 6 - $D_t = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

З рис.5 видно, що фазово-частотна залежність складним чином залежить від коефіцієнта теплової дифузії матеріалу. При малих значеннях D_t залежність тангенса різниці фаз від частоти має максимум і він знаходиться тим ближче до 0 Гц, чим менший коефіцієнт теплової дифузії D_t .

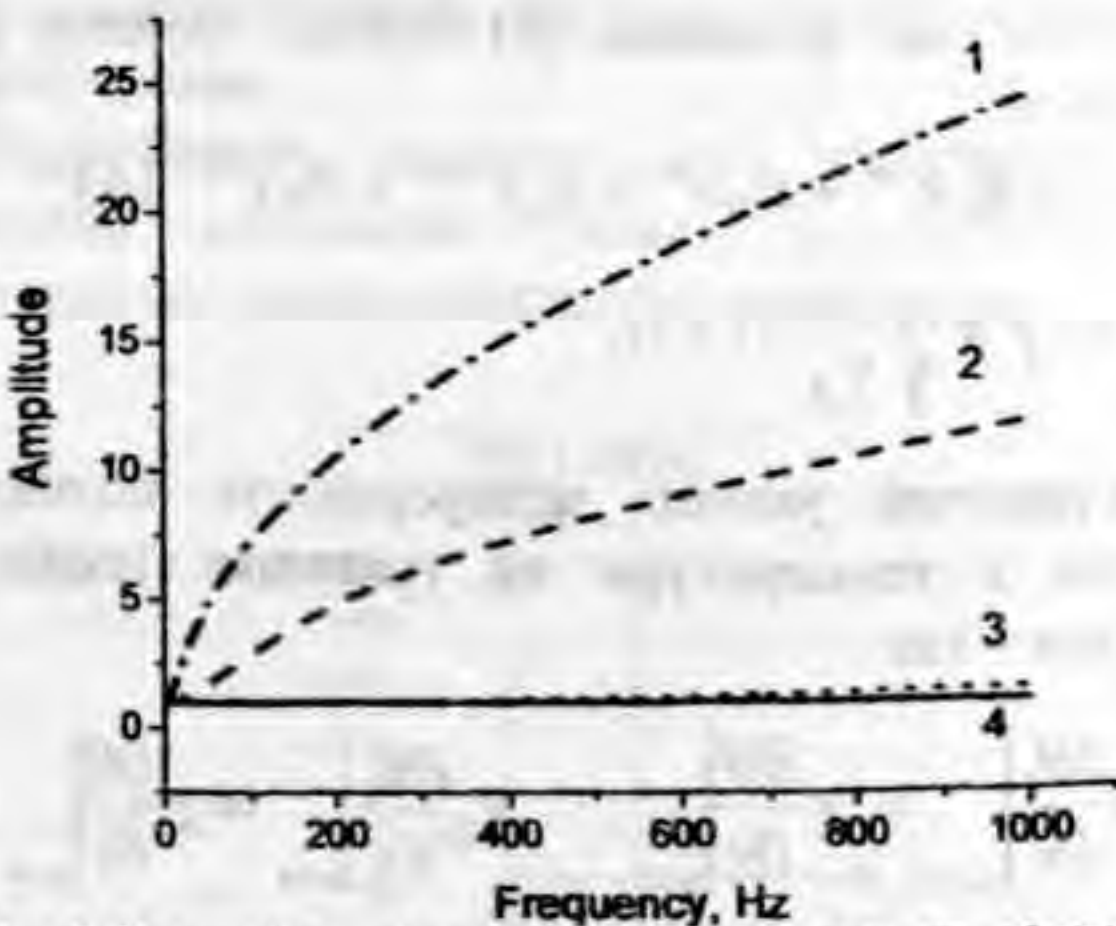


Рис.6 Залежність відношення температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях товщини зразка ($\alpha = 10$, $D_t = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$)

1 - $h = 10^{-3} \text{ м}$, 2 - $h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$,

3 - $h = 10^{-4} \text{ м}$, 4 - $h = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Рис.6 показує, що на відміну від коефіцієнта теплової дифузії, при зростанні товщини зразка, амплітуда ФТА сигналу зростає, а амплітудно-частотна залежність

при збільшенні товщини має форму подібну до зростаючого логарифму. При зменшенні h вона приймає форму зростаючої експоненти.

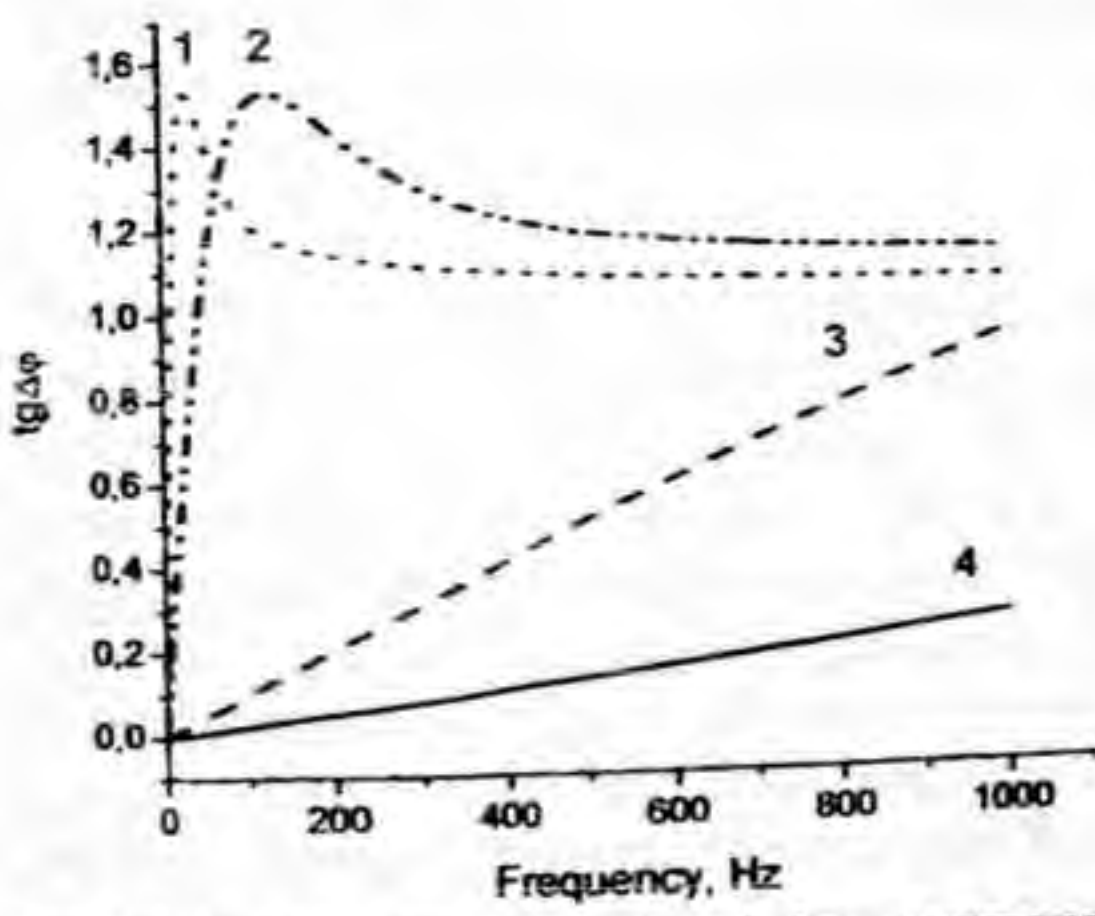


Рис.7 Залежність тангенса різниці фаз температур на різних поверхнях від частоти при різних значеннях товщини зразка ($\alpha = 10$, $D_t = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$)

1 - $h = 10^{-3} \text{ м}$, 2 - $h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$,
3 - $h = 10^{-4} \text{ м}$, 4 - $h = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

З рис.7 видно, що фазово-частотна залежність подібна до розрахованої при різних D_t , але на відміну від неї вона має максимум, який зсувається до 0 Гц при збільшенні товщини зразка.

Експеримент проведено на зразках міді, кобальтового сплаву, поліетилену та поліуретану у вигляді тонких плівок. Експериментально досліджувалися відношення змінної складової тисків на поверхнях зразка від частоти, які приведено на рис.8. Дослідження проводилися в інтервалі 10-1000 Гц.

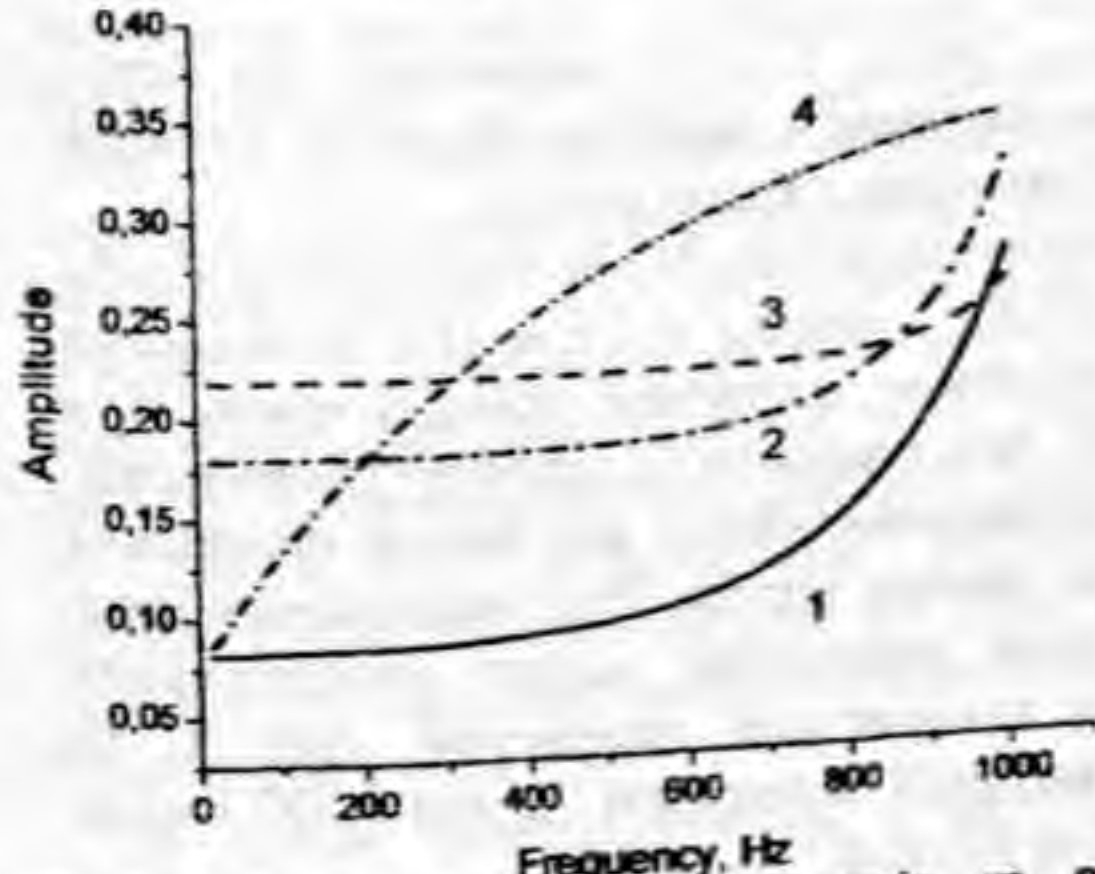


Рис.8 Залежність відношення тисків на різних поверхнях від частоти для різних зразків.

1 - сплав кобальту $\text{Co}_{78}\text{Fe}_{20}\text{B}_{20}$ ($h=30 \text{ мкм}$),
2 - мідь ($h=20 \text{ мкм}$), 3 - поліетилен ($h=30 \text{ мкм}$),
4 - поліуретан ($h=1550 \text{ мкм}$).

Як видно з рисунку, для зразків міді, кобальту та поліетилену амплітудно-частотна залежність має форму зростаючої експоненти. Амплітуда сигналу для поліетилену вища, ніж для $\text{Co}_{78}\text{Fe}_{20}\text{B}_{20}$ і Cu , бо у нього менший коефіцієнт теплової дифузії. Поліуретан відрізняється від інших зразків великою товщиною і має найменший коефіцієнт теплової дифузії, тому його амплітудно-частотна залежність має форму зростаючого логарифму, що якісно узгоджується з теоретичним аналізом.

Список використаних джерел

1. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of Photoacoustic effect with solids // J. Appl. Phys. - 1976, - V.47, № 1, - P. 64-69.
2. Винокуров С.А., Гармонический анализ в оптико-акустической спектроскопии. // Оптика и спектроскопия, - 1984. - Т. 57., вып. 3, - С. 553-556.
3. Образцов А.Н., Павловский И.Ю., Ральченко В.Г., Окуши Х., Ватанабе Х. Определение теплопроводности алмазных поликристаллических пленок с помощью фотоакустического эффекта // Журнал технической физики, - 1999. - Т. 69., вып. 4. - P. 97-101.

Надійшла до редколегії 10.11.2007

УДК 539.213

Захаренко^{*} М. І., канд.фіз.-мат.наук,
Орленко[°] М. В., аспірант

Про природу концентраційної залежності магнітного моменту аморфних сплавів на основі заліза

В рамках моделі молекулярного поля проаналізовані особливості обмінної взаємодії між атомами ПМ в АМС $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$ та $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$. З їх врахуванням одержані рівняння для аналітичного опису концентраційних залежностей магнітного моменту, які дають добре узгодження з результатами експерименту

Ключові слова: аморфні сплави, магнітний момент, модель молекулярного поля, обмінна взаємодія.

^{*}E-mail: zakhareenko@univ.kiev.ua; [°]E-mail: okolya@gmail.com

АМС являють собою класичний приклад систем, яким притаманна не лише хімічна, а і топологічна неупорядкованість, що і веде до формування унікального комплексу функціональних властивостей АМС. На сьогоднішній день точно відомо, що феромагнетизм АМС на основі заліза залежить від обмінної взаємодії 3d-електронів сусідніх атомів, а специфіка магнітних властивостей АМС обумовлена, в основному, локальним оточенням кожного атома перехідного металу, яке суттєво залежить від складу АМС, способу та умов їх одержання і наступної обробки. Головну роль у формуванні магнітних властивостей відіграють композиційний ближній порядок і дефекти різних рівнів. Основна проблема в керуванні характеристиками магнітного упорядкування АМС полягає в оптимізації складу сплавів, технології їх одержання та обробки для забезпечення заданої структури, якій притаманний необхідний комплекс магнітних параметрів. Аналіз літературних даних по магнітних властивостях АМС на основі заліза [1,2] показав, що характер зміни магнітного моменту при зміні складу АМС зазвичай можна описати кривими типу Бете-Слетера, що вказує на застосовність до таких сплавів теорії молекулярного поля[3]. У представленій роботі зроблений аналіз концентраційної залежності магнітного моменту деяких АМС на основі заліза, а саме $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$ та $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$.

Для того, щоб з'ясувати фізичні причини, які визначають характер концентраційної залежності

M. I. Zakharenko^{*}, Ph.D.,
M. V. Orlenko[°], Ph.D. student

On the nature of composition dependence of magnetic moment in iron-based amorphous alloys

The peculiarities of exchange interactions between transition metal atoms in $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$ and $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$ amorphous alloys have been analyzed within molecular field theory. With regard to these peculiarities, equations for analytical description of compositional dependencies of magnetic moments have been derived. The results of simulation are in a good agreement with experimental data.

Key Words: amorphous alloy, magnetic moment, molecular field model, exchange interaction.

магнітного моменту, необхідно володіти інформацією про характер обмінних взаємодій між сусідніми атомами 3d-елементів. Відомо, що в моделі молекулярного поля температура Кюрі T_C безпосередньо пов'язана з інтегралами обмінної взаємодії між металічними атомами різного сорту, а її залежність від складу АМС можна описати таким виразом:

$$T_C = \frac{1}{2} [T_{PM-PM}(1-x) + T_{Fe-Fe}x] + \frac{1}{2} ([T_{PM-PM}(1-x) + T_{Fe-Fe}x]^2 + 4T_{Fe-PM}^2 x(1-x))^{1/2}, \quad (1)$$

де T_{PM-PM} , T_{PM-Fe} , T_{Fe-Fe} – параметри, що безпосередньо пов'язані з енергією обмінної взаємодії між відповідними парами атомів.

Застосування виразу (1) до сплавів $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$ та $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$ з різним вмістом ПМ дозволив не лише визначити домінуючі обмінні взаємодії в цих АМС, але і вказати їх характер (феромагнітний чи антиферомагнітний) для атомів перехідних елементів певних сортів. Для знаходження наведених вище параметрів моделі молекулярного поля ми використали літературні дані [1] по концентраційній залежності T_C для АМС систем $Fe-Co-B$ та $Fe-Ni-B$.

Як видно з Табл.1, для АМС системи $Fe-Ni-B$ знаки енергії обмінної взаємодії між атомами $Fe-Fe$ та $Fe-Ni$ відповідають феромагнітним кореля-

Таблиця 1.
Параметри обмінної взаємодії атомів ПМ в
АМС *Fe-PM-B* в наближенні молекулярного
поля.

T, K	<i>Fe-Co-B</i>	<i>Fe-Ni-B</i>
T_{Fe-Fe}	598	626
T_{Fe-Ni}	750	759
T_{Ni-Ni}	1630	-593

ціям, а енергія обмінної взаємодії *Ni-Ni*, що має протилежний знак, відповідає антиферомагнітній кореляції. Для АМС системи *Fe-Co-B* усі обмінні взаємодії *3d*-електронів мають феромагнітний характер. Таким чином, для АМС з *PM = Ni* характерні конкуруючі за знаком обмінні взаємодії, а енергія взаємодії між атомами заліза суттєво ослаблена у порівнянні з кристалічним залізом. Крім того, звертає на себе увагу той факт, що для АМС певного складу значення параметрів, наведених у Табл. 1, суттєво відрізняються від притаманної їм температури Кюрі. Ця обставина, а також наявність конкуруючих обмінних взаємодій вказують на можливість утворення неоднорідної магнітної структури, а саме – формування магнітних кластерів того чи іншого типу (у залежності від знаку відповідних обмінних кореляцій), що відповідним чином впливатиме на концентраційну залежність магнітного моменту у феромагнітній фазі.

Автори [4] зазначають, що в АМС на основі *Fe-B* можуть існувати мікрообласті з різним типом ближнього упорядкування атомів заліза. Виходячи з хімічної природи *Fe*, який може утворювати алотропічні модифікації з різною локальною симетрією найближчого оточення, вважають, що і в АМС на основі заліза зберігається певна спадкова структура ближнього порядку, характерна для цих модифікацій. Отже, магнетизм вказаних АМС визначається дією двох факторів: структурного фактору, пов'язаного з можливістю формування різних типів ближнього порядку, та композиційного фактору, зумовленого немагнітним розчиненням феромагнітної матриці атомами металюїду і, як наслідок, зміною характеру *d*-взаємодій атомів *Fe*, в оточенні яких є немагнітні атоми.

Це також підтверджується і результатами дослідження АМС на основі *Fe* методом резонансного поглинання γ -променів [5], які показали, що меєсбауєрівські спектри являють собою

суперпозицію характерного для феромагнітного заліза розмитого секстету ліній (що зумовлене дисперсією локальних полів) та парамагнітного дублету, який свідчить про наявність певної частки атомів *Fe* у неферомагнітному стані.

Тому, АМС на основі заліза успадковують певну структуру ближнього порядку в якій залізо може знаходитись у двох магнітних станах:

- з моментом $\mu_{Fe1} = 2,22 \mu_B$, притаманним феромагнітному залізу (α -модифікація);
- з моментом $\mu_{Fe2} = 0,7 \mu_B$, притаманним антиферомагнітному залізу (γ -модифікація);

Останній стан зумовлений впливом атомів *B*, оскільки екстраполяція магнітного моменту на нульовий вміст металюїду дає значення $\approx 2,3 \mu_B$. Оскільки координаційне число *B-Fe* в АМС близьке до 8 [2], це еквівалентне тому, що кожен атом *B* змінює стан в середньому одного атома *Fe* (при цьому його момент змінюється з μ_{Fe1} до μ_{Fe2}). Таким чином, зважаючи на можливість існування атомів заліза у різних магнітних станах, можна записати вираз для розрахунку магнітного моменту на атом заліза μ в бінарних АМС *Fe_{1-y}B_y*:

$$\bar{\mu}_{Fe} = \mu_{Fe1}(1-y) + \mu_{Fe2}y \quad (2)$$

В Табл.2 наведені експериментальні [6,7] та розраховані за рівн.(2) значення $\bar{\mu}_{Fe}$. Їх хороше узгодження свідчить на користь запропонованої моделі.

Для того, щоб проаналізувати вплив атомів *Co* на магнітний момент ПМ $\bar{\mu}_{PM}$ в АМС *Fe-Co-B*, ми розглянемо сплави складу *Fe_{80-x}Co_xB₂₀*, оскільки вони найбільш детально досліджені. Експериментальні значення $\bar{\mu}_{PM}$, взяті нами з [1,7], показані на Рис.1 точками.

При заміщенні *Fe* кобальтом останній буде займати насамперед позиції атоми *Fe2*, оскільки взаємодія *Co-B* є більш вигідною енергетично,

Таблиця 2.
Магнітний момент на атом *Fe* в АМС *Fe_{1-y}B_y*

	$\mu_{Fe} (\mu_B)$	
	Розрах	Експ. [4,5]
0,16	2,02	2,04
0,20	1,98	1,98
0,23	1,92	1,93

ніж взаємодія $Fe-B$, що видно з Табл.1 та даних [8]. При цьому середній момент на атом ПМ буде зростати внаслідок того, що кожен атом Co дає внесок з розрахунку $\mu_{Co} = 1.28 \mu_B$ [7] замість $\mu_{Fe_2} = 0.7 \mu_B$. Тому концентраційну залежність $\bar{\mu}_{ПМ}$ для сплавів $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$, багатих залізом, можна подати у вигляді:

$$\bar{\mu}_{ПМ} = \mu_{Fe1}(1-y) + \mu_{Fe2}(y-x) + \mu_{Co}x \quad (3)$$

(тут $y=0.20$, x – малі)

Очевидно, що $\bar{\mu}_{ПМ}$ буде зростати, аж поки не вичерпаються позиції $Fe2$, тобто приблизно до $x=0.20$.

В сплавах цієї системи, багатих кобальтом, атом Co заміщується атомом Fe . Оскільки згідно з даними [8] атоми заліза розташовуються у структурі так, що вони є переважно сусідами атомів кобальту, а обмінна взаємодія між їх моментами має феромагнітний характер, то спіновий момент Fe орієнтується паралельно моментам атомів Co . Отже, відповідне рівняння для магнітного моменту $\bar{\mu}_{ПМ}$ АМС, багатих Co , можна записати у вигляді:

$$\bar{\mu}_{ПМ} = \mu_{Fe1}(1-x) + \mu_{Co}x, \quad (1 > x > 0.2) \quad (4)$$

Розраховані за рівн.(3) та (4) значення $\bar{\mu}_{ПМ}$ показані на Рис.1 суцільними лініями. Експериментальні значення $\bar{\mu}_{ПМ}$, взяті нами з [1,7], показані точками. Як і у випадку подвійних АМС $Fe-B$, очевидне хороше узгодження розрахованих та експериментальних значень $\bar{\mu}_{ПМ}$.

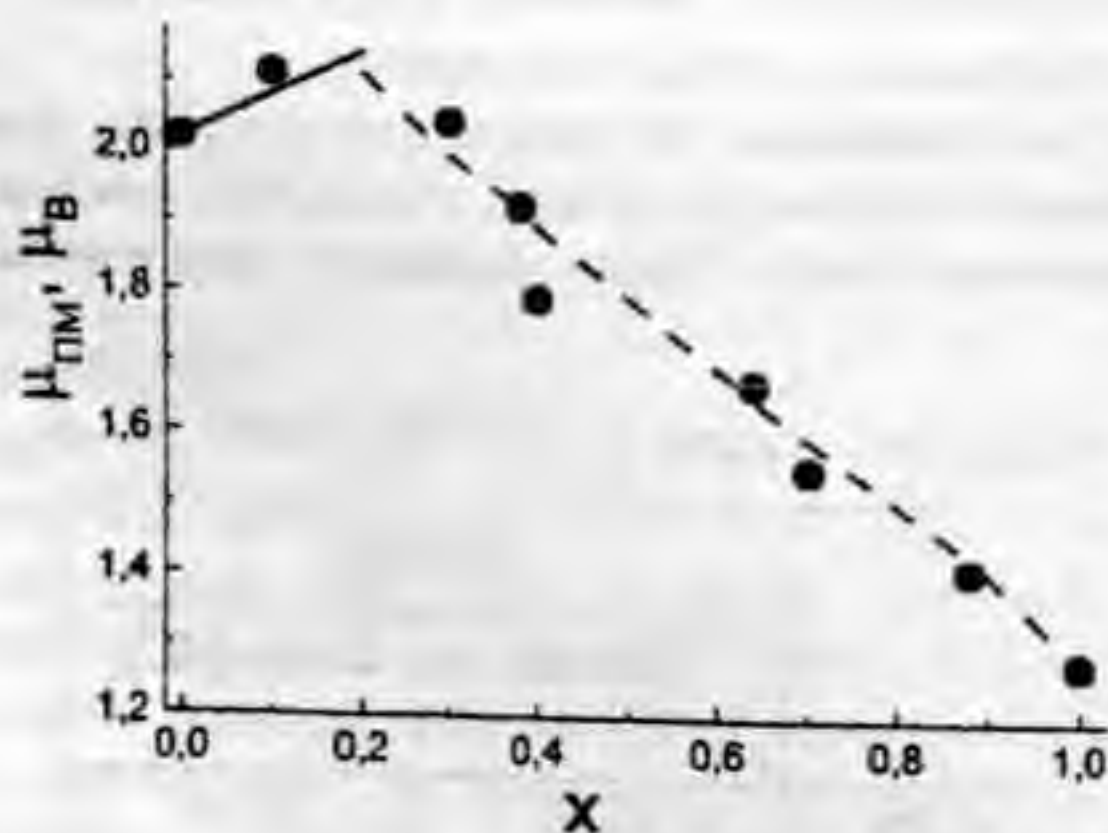


Рис.1. Концентраційна залежність $\bar{\mu}_{ПМ}$ АМС $Fe_{80-x}Co_xB_{20}$: точки – експеримент [1,7], лінії – розрахунок за рівн.(3) та (4).

В потрійних АМС $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$ знаки обмінних взаємодій між однойменними атомами, як видно з Табл.1, відповідають феромагнітним взаємодіям, в той час, як для взаємодії між різнойменними атомами характерними є антиферомагнітні кореляції. Згідно з даними дослідження ближнього порядку [7], у цих сплавах при заміщенні Fe на Ni спостерігається статистичний розподіл атомів перехідних металів. Феромагнітний момент у розрахунку на атом нікелю складає $\mu_{Ni}=0.606\mu_B$. Тому, магнітний момент $\bar{\mu}_{ПМ}$ вказаних АМС можна записати в наступним чином:

$$\bar{\mu}_{ПМ} = [\mu_{Fe1}(1-y) + \mu_{Fe2}y](1-x) + \mu_{Ni}x, \quad (5)$$

де $y=0.20$.

Розраховані за рівн.(5) значення $\bar{\mu}_{ПМ}$ показані на Рис.2 суцільною лінією.

Як видно, розраховані значення задовільно узгоджуються з експериментальними результатами [10] (на Рис.2 показані точками) лише при малому вмісті нікелю $x < 0.2$. При збагаченні АМС нікелем краще співпадання досягається, якщо у рівн.(5) покласти $\mu_{Ni}=0$, а отже це рівняння набуде вигляду та концентрацію антиферомагнітного заліза покласти $y=0.5$. Значення $\bar{\mu}_{ПМ}$ показані на рис.2 штриховою лінією.

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{ПМ} &= [\mu_{Fe1}(1-y) + \mu_{Fe2}y](1-x), \\ &= 2.0(1-x), \end{aligned} \quad (6)$$

де $x > 0.20$

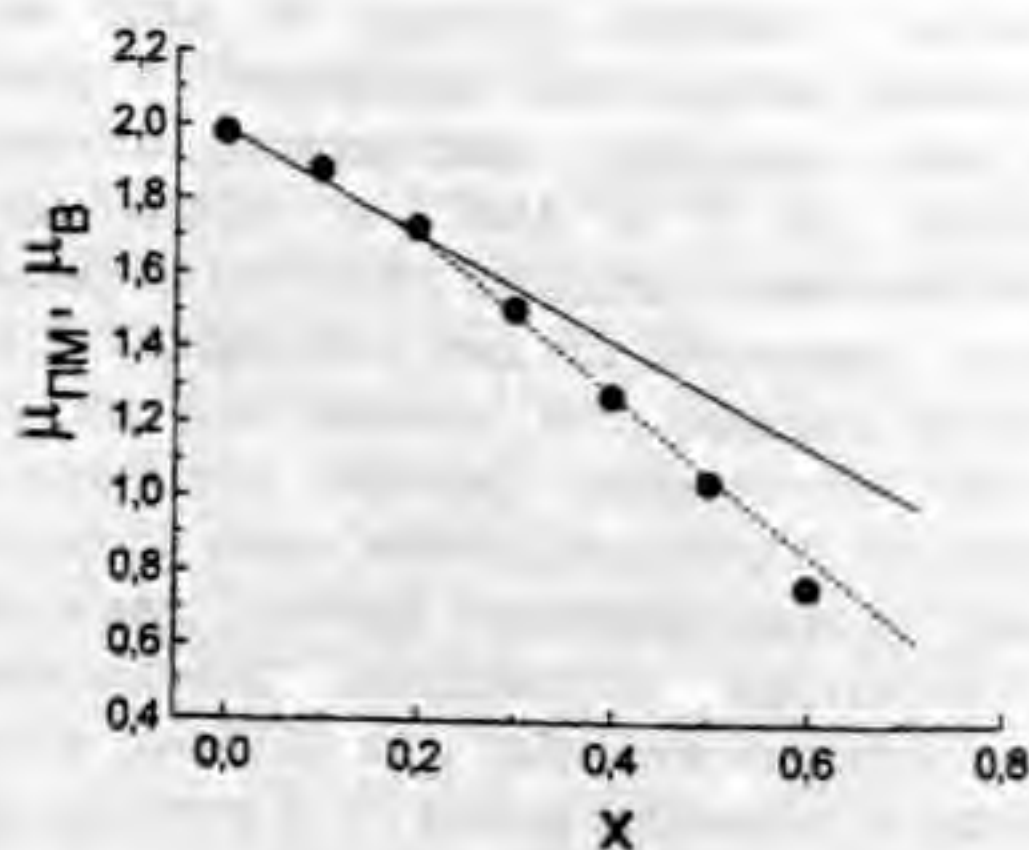


Рис.2. Концентраційна залежність $\bar{\mu}_{ПМ}$ АМС $Fe_{80-x}Ni_xB_{20}$: точки – експеримент [10], лінії – розрахунок за рівн. (5) та (6).

Це вказує на те, що принаймні частина атомів Ni не беруть участі у формуванні феромагнітного моменту сплавів завдяки наявності антиферомагнітних кореляцій (від'ємне T_{Ni-Ni}), частка яких, очевидно, зростає при зростанні x .

Отже, проведений в рамках моделі молекулярного поля аналіз дозволив не лише визначити домінуючі обмінні взаємодії в АМС систем $Fe-Co, Ni-B$, але і вказати характер взаємодії (феромагнітна чи антиферомагнітна) магнітних моментів атомів перехідних елементів певних сортів. Такий стан речей, як показано, веде до появи атомів заліза у різних магнітних станах. З урахування особливостей обмінних кореляцій та характеру розподілу атомів перехідних металів у цих АМС запропоновані рівняння для аналітичного опису концентраційної залежності магнітного моменту, які дають напрощуд хороше узгодження із результатами експерименту

Список використаних джерел

1. Аморфные металлические сплавы/ Под ред. Ф.Е.Любурского. – М.: Металлургия, 1987. – 584 с.
2. *Glassy Metals: magnetic, chemical and structural properties*/ Ed. by R.Hasegawa. – Boca Raton, Florida: CRC Press, 1983. – 280 p.
3. Шматко О.А., Усов Ю.В. Электрические и магнитные свойства металлов и сплавов. Справочник. – К.: Наукова думка, 1987. – 583 с.

4. Lovas A., Varga L.K., Kisdi-Koszo E. et al. Inhomogeneities and basic magnetic properties in Fe-B glassy alloys// IEEE Tras. Magn.– 1994. –30, №2. – P. 467-469.
5. Katayama T., Hishihara Y., Miyazaki M., et al. Structural relaxation in (Fe-Cr)-based glass// J.Magn.Magn.Mater. – 1983 – 31-34. p. 1561-1562.
6. Kisdi-Koszo E., Lovas A., Kovac J. et al. Inhomogeneous atomic distribution and its effect on magnetic properties of diluted Fe-TM-B metallic glasses// J.Magn.Magn. Mater. – 1992. –112. – P. 39-40.
7. Хандрик К., Кобе С. Аморфные ферро- и ферримагнетики. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
8. Шпак А.П., Карбовский В.Л., Мележик А.В. Ближний порядок и особенности электронной структуры в аморфных металлических сплавах на основе 3d-металлов. – К., 1994. – 44 с. (Препр. ИМФ АН Украины; 94-2).
9. Металлические стекла. Атомная структура и динамика, электронная структура, магнитные свойства: Пер. с англ./ Под ред. Г.Бека, Г.Гюнтеродта. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
10. Luborsky F.E. Magnetic properties of amorphous alloys // J.Magn.Magn.Mater, 1978. – 7, № 1-4. – P.143-149.

УДК 534.

В.В. Курилюк, аспірант
А.М. Горб, канд. фіз.-мат. наук, м.н.с.
О.Я. Оліх, канд. фіз.-мат. наук, доцент
О.О. Коротченков, доктор. фіз.-мат. наук,
професор.

Вплив ультразвуку на вольт-амперні характеристики гетероструктур GaAs/AlGaAs

Досліджено зміну вольт - амперних характеристик гетероструктур GaAs/AlGaAs з квантовими ямами під впливом ультразвукового навантаження. Показано, що експериментально зареєстровані зміни пов'язані із перезарядкою дефектів структури під дією ультразвуку.

Ключові слова: гетероструктура,
ультразвук, вольт-амперна характеристика.

*E-mail: kuryluk@univ.kiev.ua

Напівпровідникові гетероструктури знаходять широке застосування у сучасних електронних та оптоелектронних пристроях. Зокрема, багатошарові гетероструктури із квантовими ямами (БГКЯ) є стандартними елементами інфрачервоних приймачів діапазону 3-5 та 8-12 мкм (в області "атмосферного вікна") [1]. Крім того, вони домінують в пристроях гетеродинного детектування внаслідок широкої смуги пропускання відповідних електричних приладів [2], а також використовуються при виготовленні сонячних елементів [3]. Критичним параметром функціонування подібних пристроїв є величина термічно-активованого темного струму, який бажано зменшувати для покращення шумових характеристик. Термо-активовані струми відіграють також важливу роль у лазерних діодах на БГКЯ, як для вертикальної інжекції носіїв заряду скрізь бар'єрні прошарки (зокрема, скрізь Бреґівські дзеркала), так і для керування рівноважною концентрацією носіїв в активній області [4]. Іншою областю застосування термо-активованих струмів є р-і-п БГКЯ модулятори, перемикачі та детектори [5]. Важливим при цьому є питання покращення параметрів згаданих приладів шляхом дії зовнішніх чинників. Одним з чинників, що ефективно використовується для таких цілей є ультразвук.

Найчастіше дія ультразвуку приводить до перебудови дефектної підсистеми

V.V. Kurylyuk, Postgr. St.
A.M. Gorb, PhD
O.Ya. Olikh, PhD
O.A. Korotchenkov, Prof.

Influence of ultrasound on voltage-current characteristics of GaAs/AlGaAs heterostructures.

Voltage-current characteristics of GaAs/AlGaAs quantum well heterostructures under ultrasound-loading have been studied. It is shown, that ultrasound-loading results in re-charging structural defects.

Key Words: heterostructure, ultrasound,
voltage-current characteristic.

напівпровідників. Зокрема, відомими є ефекти іонізації ультразвуком дрібних домішок, перезарядки та перегрупування локальних центрів, ультразвукові хімічні реакції [6 - 8].

В даній роботі повідомляється про вплив динамічного ультразвуку (УЗ) на вертикальний перенос заряду у БГКЯ структурах та обговорюються можливі чинники цього ефекту.

Вимірювання вольт-амперних характеристик (ВАХ) проводилось на зразку, що містив 30 періодів GaAs-квантових ям, шириною 10 нм, обмежених AlGaAs-бар'єрами такої ж ширини.

Комірка для збудження ультразвукових коливань складалась (рис.1) із п'єзокерамічного перетворювача (1), поміщеного в екран із

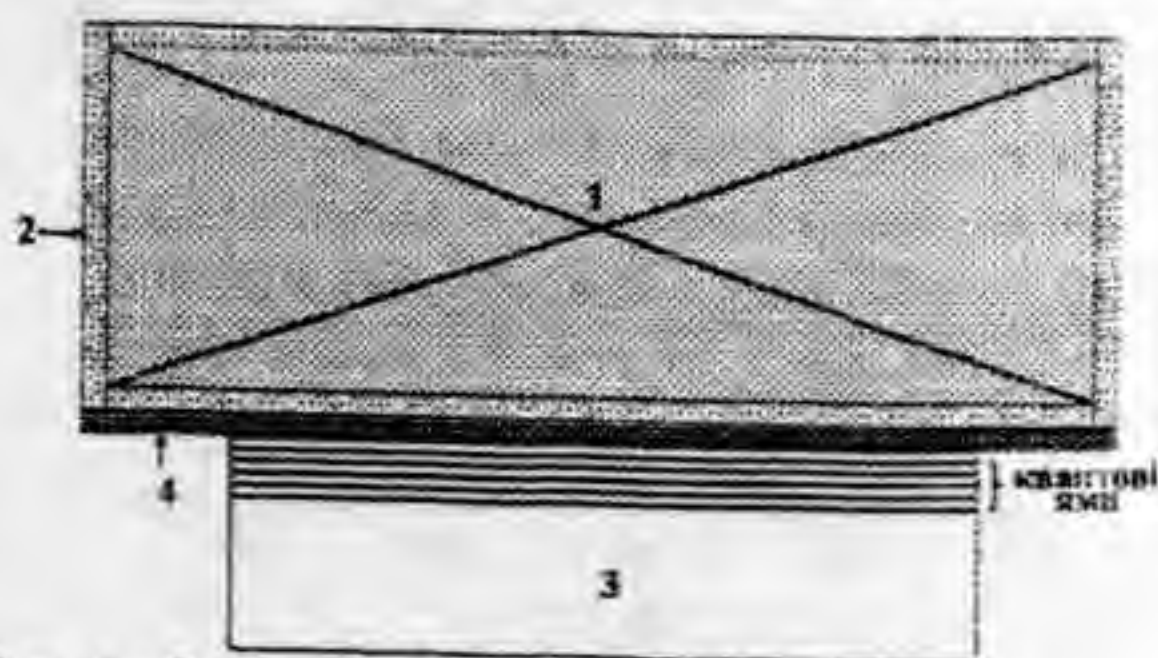


Рис. 1. Схема вимірної комірки.

конденсаторної фольги (2) та власне напівпровідникової структури (3), що притискалась до перетворювача. Між зразком та

перетворювачем розміщувався тонкий діелектричний шар. Всі вимірювання проводились при температурі 77 К. Потужність ультразвуку становила 0.2 - 0.9 Вт/см².

На рис.2 (вставка) показано загальний вигляд ВАХ структури GaAs/AlGaAs під впливом динамічного ультразвукового навантаження. На ВАХ ненавантаженого зразка помітними є стрибки сили струму в області напруг $V=0.044$ В

та $V=0.104$ В. Під дією УЗ відбувається зростання сили струму при даній напрузі в порівнянні із ненавантаженим зразком, тобто спостерігається зменшення опору структур. Крім того, для всіх частот ультразвуку помітним є зміщення положення стрибків сили струму в бік менших напруг (рис.2).

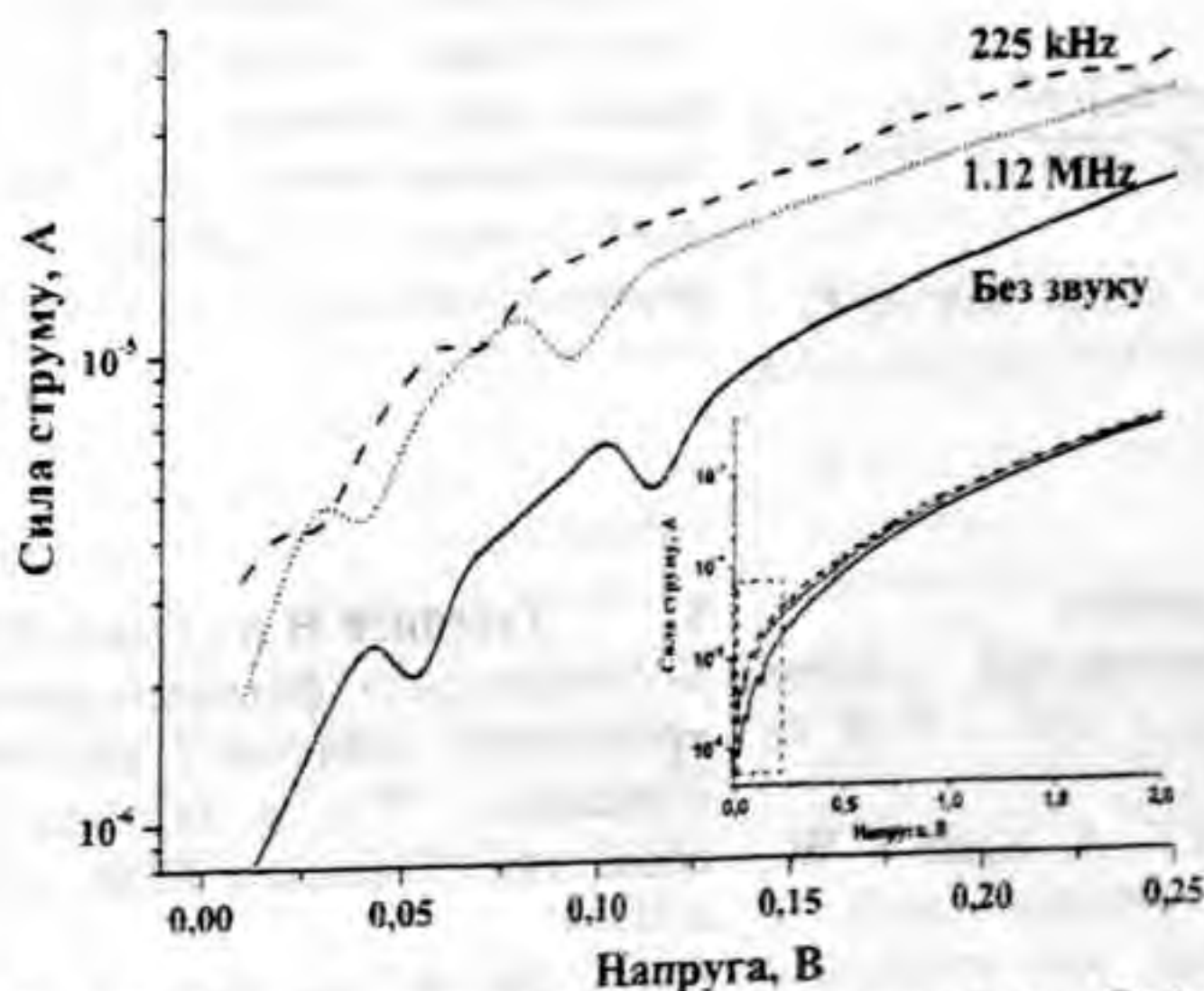


Рис. 2. Вольт-амперні характеристики структури GaAs/AlGaAs під впливом УЗ.

В більшості відомих робіт, основним механізмом ультразвукової модифікації параметрів напівпровідникових структур є взаємодія пружних та електричних полів УЗ хвилі та дефектів матеріалу [6 - 8]. Зважаючи на це, експериментально зареєстровані зміни в ВАХ GaAs/AlGaAs – гетероструктур (рис.2) можна пояснити впливом УЗ на дефекти в досліджуваній структурі.

Одним з механізмів зарядопереносу в подібних структурах є рекомбінаційний струм, пов'язаний із дефектами на границях гетеропереходів. Його величина визначається типом та концентрацією дефектів:

$$j = e \frac{eV}{\eta kT} \quad (1)$$

де e – заряд електрона, V – електричний потенціал, k – стала Больцмана, T – температура, η – коефіцієнт, значення якого залежить від концентрації і типу дефектів, $1 \leq \eta \leq 2$. При взаємодії УЗ хвилі із дефектами може

відбуватись їх перегруповання, а отже, і зміна концентрації. Наслідком таких процесів є зміна струму через гетероструктуру. Проте, як показали наші експерименти, після вимкнення ультразвукового навантаження, вольт-амперні характеристики GaAs/AlGaAs – гетероструктур відновлюються і набувають початкової форми („Без звуку” на рис.2). Цей факт може свідчити про ультразвукову активацію зарядопереносу через дефектні рівні шляхом їх перезарядки без суттєвої зміни положення та концентрації дефектів. Оскільки на різних частотах сила струму зростає на різну величину, можна припустити, що це зростання пов'язане із параметрами збуджуваної УЗ хвилі. Для підтвердження цього припущення проводились розрахунки амплітуди A пружних змещень в структурі на різних частотах за відомими співвідношеннями

$$A = W^{1/2} / (2\pi f(\nu\rho)^{1/2}) \quad (2)$$

де W – потужність звуку на частоті f , ν – швидкість звуку в середовищі, ρ – його густина.

Для показаних на рис.2 частот 225 кГц і 1.12 МГц це значення становило 7.6 нм і 2.2 нм, відповідно. Таким чином, залежність сили струму в гетероструктурах від частоти УЗ хвилі можна пояснити різною величиною компонент вектора зміщень і, відповідно, різною ефективністю іонізації дефектних рівнів на цих частотах.

Наявність на залежностях $I(V)$ ділянок з від'ємним опором (рис.2) може свідчити про тунельну складову струму, величина якого обчислюється з виразу [9]:

$$J = \frac{em^*kT}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty D^* D \left(\frac{1 + \exp[E_f - E_l]/kT}{1 + \exp[E_f - E_l - eV]/kT} \right) dE_l \quad (3)$$

де m^* - ефективна маса, E_f - рівень Фермі, E_l - енергія електрона, D - коефіцієнт проходження

електронів через гетероструктуру. Як показує аналіз (3), положення цих ділянок залежить від параметрів структури (геометричних розмірів, енергетичної висоти бар'єрів, тощо). На нашу думку, зсув областей від'ємного опору в бік менших напруг може спричинюватись зміною (зменшенням) енергетичної висоти бар'єрів під дією електричних полів, створених при перезарядці дефектів та п'єзоелектричних полів, що супроводжують УЗ хвилю в напівпровіднику.

Таким чином, в роботі проведено дослідження вольт-амперних характеристик GaAs/AlGaAs - гетероструктур з квантовими ямами під впливом динамічного ультразвуку. Зареєстровано ефект зменшення опору структур, який можна пояснити ультразвуковою перезарядкою дефектів структури.

Список використаних джерел

1. Levine B. F. Quantum-well infrared photodetectors // J. Appl. Phys. - 1993. - V.74, № 15. - pp.R1 - R81.
2. Brown E. R., McIntosh K. A., Smith F. W., Manfra M. J. Coherent detection with a GaAs/AlGaAs multiple quantum well structure // Appl. Phys. Lett. - 1993. - V.62, №13. - pp.1513-1515.
3. Е. Б. Заверюхина, Н. Н. Заверюхина, Л. Н. Лезилова, Б. Н. Заверюхин, В.В. Володарський, Р.А. Муминов, Акустостимулированное расширение коротковолнового диапазона спектральной чувствительности AlGaAs/GaAs-солнечных элементов. ПДКТФ, 2005, т.31, №1 с.54-66.
4. Nagarajan R., Fukushima T., Corzine S. W., Bowers J. E. Effects of carrier transport on high-speed quantum well lasers // Appl. Phys. Lett. - 1991. - V.59, № 5. - pp.1835-1837.
5. Fox A. M., B. Miller D. A., Livescu G., Cunningham J. E, Jan W. Y. Quantum well carrier sweep out: relation to electroabsorption and exciton saturation // IEEE J. Quantum Electron. - 1991. - V.27, №10. - pp. 2281-2295.
6. Островский И.В., Рожко А.Х. Акустоперегруппировка дефектов в кристаллах // ФТТ. - 1984. -т.26, №12. - С.3718-3720.
7. Здебский А.П., Лисянский М.И., Лукьянчикова Н.Б., Шейкман М.К. Влияние ультразвуковой обработки на вольт-амперные и шумовые характеристики туннельных диодов из GaAs // Письма в ЖТФ. - 1987. - Т.13, №16. - с.1009-1015.

8. Гусейнов Н.А., Олих Я.М., Аскеров Ш.Г. Восстановление фотоэлектрических параметров кремниевых солнечных элементов, облученных γ -квантами ^{60}Co , с помощью ультразвуковой обработки // Письма в ЖТФ. - 2007. - Т.33, №1. - с.38-44.
9. Tsu R. and Esaki L. Tunneling in finite superlattice // Appl. Phys. Lett. - 1973. V.22, №11. - pp.562-564.

Надійшла до редколегії 04.10.07

УДК

Куцова В.З. проф., д.т.н., Новиков М.М. проф.,
д. ф.-м.н., Носко О.А. к.т.н., Шерстобитова А.С.
асп.

Вплив легування на структуру і властивості сплаву $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$

Вивчено мікроструктуру зразків сплаву $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$, легованих Ga (2 і 5 моль %) і Ga(2 і 5 моль %) і бором спільно. Показано, що структура сплавів суттєво неоднорідна і багатофазна. Методом локального рентгеноспектрального аналізу вивчено розподіл компонентів і легуючих елементів між фазами сплаву; вивчено профілі ліній (533) і (511) твердого розчину на основі Si і Ge, визначено параметри ґраток, міжплощинні відстані твердих розчинів. Поряд з твердим розчином Si(Ge) з ГЦК алмазною ґраткою зафіксовані тверді розчини Si(Ge) з ромбічною і ОЦТ ґратками. Досліджено мікротвердість фазових складових сплавів. Вивчено термо-ЕРС сплавів.

Ключові слова: сплави $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$, мікроструктура, рентгеноспектральний аналіз, тип кристалічної ґратки

Багатокомпонентні сплави на основі твердого розчину $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ використовуються в термоелектричних перетворювачах енергії в області температур від 1000 до 1300°C. Вони мають високі значення коефіцієнта ефективності перетворення теплової енергії в електричну. Одним із примітних переваг сплавів системи Si-Ge є їхня здатність працювати в складі термоперетворювачів на повітрі в умовах підвищених температур (>800°C).

Підвищення ефективності перетворення теплової енергії в електричну і, відповідно, збільшення к.к.д. термогенераторів на основі сплавів Si-Ge можливо багатокомпонентним легуванням цих сплавів різними елементами. В даній роботі представлено результати досліджень реальної структури, електрофізичних, фізико-механічних властивостей сплавів Si-Ge, легованих Ga у кількості 2 і 5 %мол., що характеризуються електронним типом електропровідності, а також тіж сплави

Kutsova V.Z., Novikov N.N., Nosko O.A.,
Sherstobitova A.S.

Influence of alloying on the structure and properties of $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ alloy

The microstructure of samples of $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ alloy, doped with Ga (2 і 5 mol %) and Ga(2 і 5 mol %) and boron simultaneously is studied. It is shown that structure of alloys is quite inhomogeneous and multiphase. Distribution of components and alloying elements between phases of alloy is studied by local X-ray spectrum analysis: profiles of (533) and (511) lines of solid solution on the basis of Si and Ge are researched, the lattice parameters and interlamellar distances of solid solutions are determined. Solid solutions Si(Ge) with rhombic and BCL lattice are fixed along with solid solution Si(Ge) with FCL diamond lattice. Microhardness of phase components of alloys is researched. Thermo-EMF of alloys is studied.

Key words: $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ alloys, microstructure, X-ray spectrum analysis, type of crystal lattice.

додатково леговані бором до концентрації $1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$. В останньому випадку зразки відзначалися диірочним типом електропровідності.

Проведено порівняльний аналіз термоелектричних і структурних характеристик розроблених n-і р-типу сплавів системи Si-Ge. Показано, що сплави з концентрацією фосфіду галію 2 мол % характеризуються більш стабільними термоелектричними параметрами, що очевидно пов'язано зі специфікою зміни структури під дією різних зовнішніх факторів, у тому числі нагрівання.

Вивчено мікроструктуру і дефекти зразків сплавів $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$, легованих Ga (2 і 5 моль %) і бором. Показано, що структура сплавів істотно неоднорідна. В структурі сплаву $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}\text{Ga}(2\% \text{ моль})$ і додатково легованого бором спостерігається велика кількість двійників, границь і пакетів двійникування, "свірл-дефектів", що є стоками дислокацій (рис. 1, а).

Матрична фаза характеризується закономірним розташуванням ланцюжків дислокацій, між якими розташовуються області, вільні від дислокацій (рис. 1, б). Крім того в структурі сплавів виявлені зерна, що мають правильну геометричну форму, вільні від дислокацій. Раніше ця структурна одиниця сплавів $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ ідентифікована як твердий розчин $\text{Si}(\text{Ge})$ на основі модифікації кремнію з ромбічною ґраткою [2, 3] і отримала назву Х-фаза.



Рис. 1 Мікроструктура сплаву Si-Ge-Ga (2 моль),
x200

В структурі сплаву $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}\text{Ga}(5 \text{ моль } \%)$ і додатково легуваного бором спостерігається значно менша кількість двійників та "свірл-дефектів", границі і пакети двійникування відсутні (рис. 2). Матрична фаза сплаву істотно неоднорідна: у ній спостерігаються області скупчення дислокацій з підвищеною щільністю ($10^{11}-10^{12} \text{ см}^{-2}$), що розташовані як неупорядковано, так і у виді окремих ланцюжків (рис. 2, а), а також області, вільні від дислокацій (рис. 2, б).

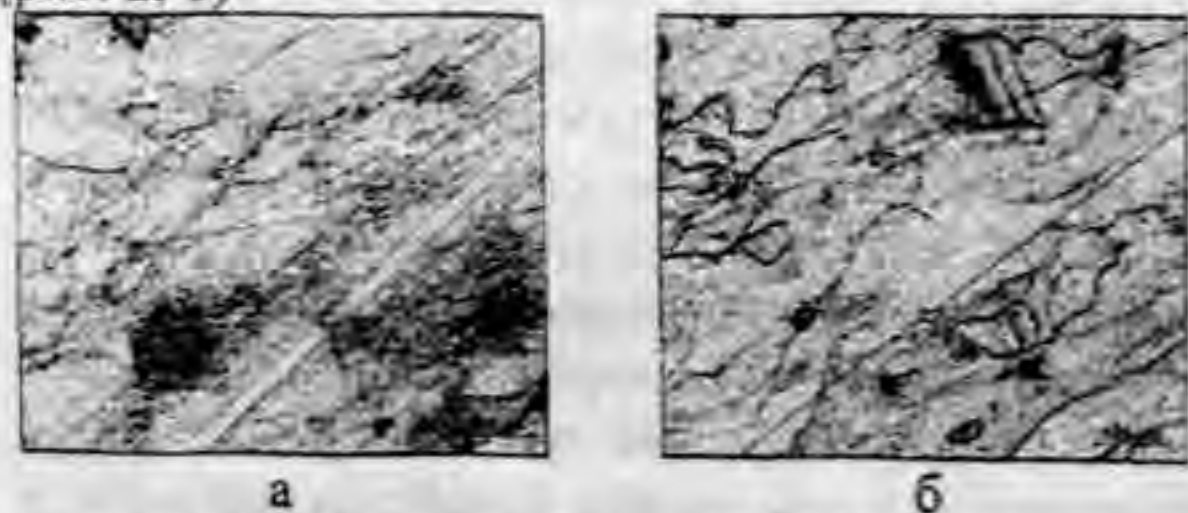


Рис. 2 Мікроструктура сплаву Si-Ge-Ga(5 моль),
x200

В структурі виявлені темні включення неправильної форми, що викликають розвиток напруг у матриці навколо них (рис. 2, б). Це приводить до формування областей локалізованого зсуву (рис. 3).

Методами локального рентгеноспектрального і рентгеноструктурного аналізів включення темної фази ідентифіковані як фосфід кремнію (SiP), легований германієм і галієм у малих кількостях.



Рис. 3 Области локалізованого зсуву в сплаві Si-Ge-Ga(5 моль), x200

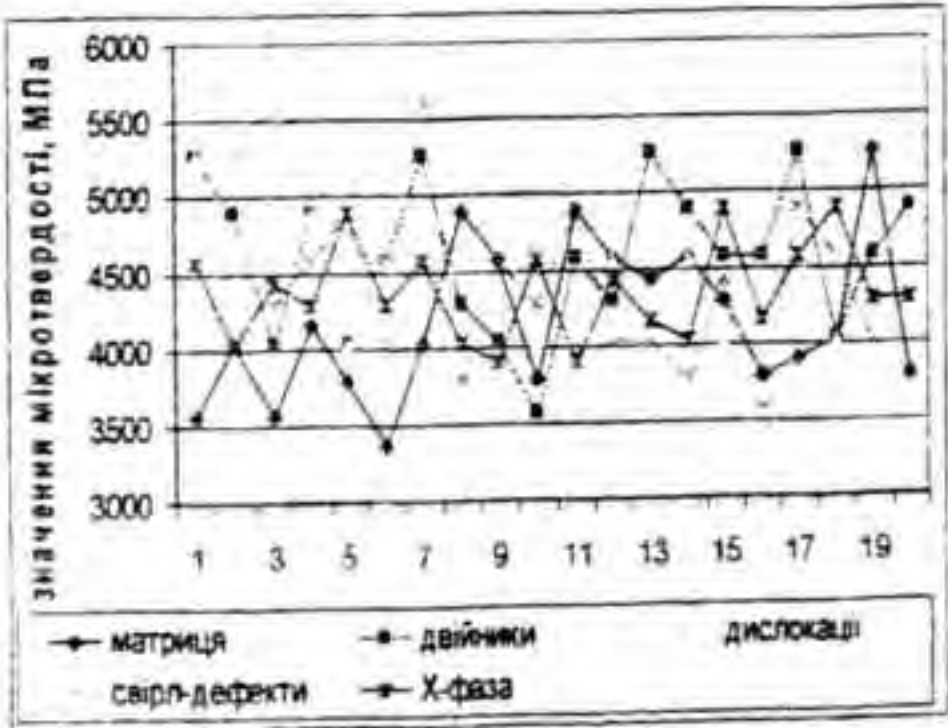
Вивчено мікротвердість досліджуваних сплавів за допомогою приладу ПМТ-3 при навантаженні 20 гр/см^2 : визначено мікротвердість матриці, Х-фази, двійників, областей з підвищеною щільністю дислокацій (рис. 4).

Результати виміру мікротвердості свідчать про неоднорідність структури і фазового складу сплавів (рис. 4).

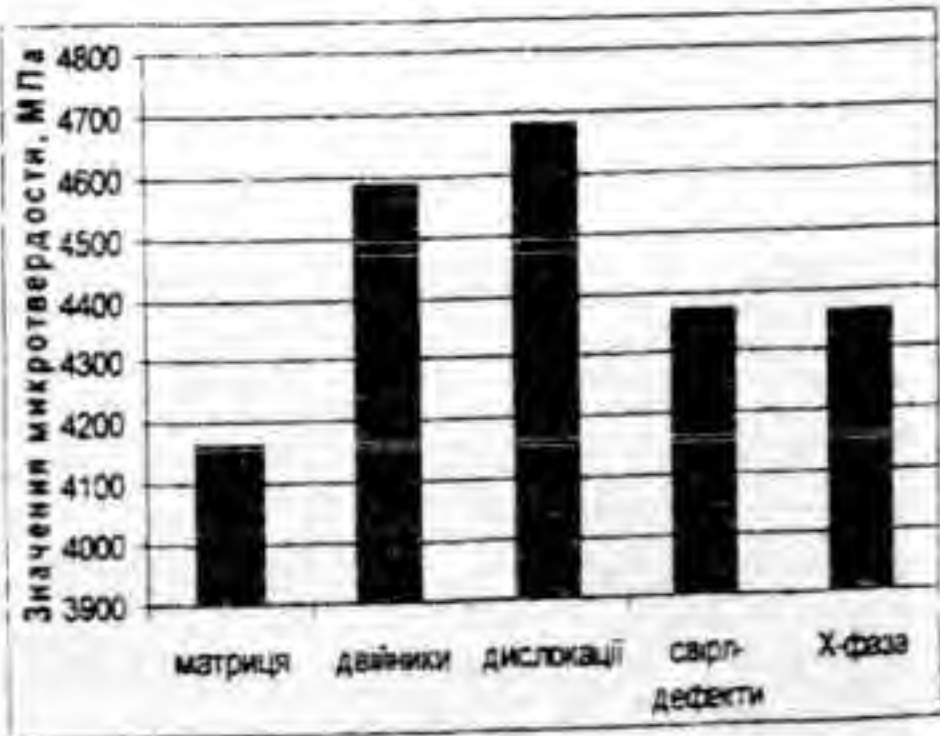
Легування Ga і В знижує мікротвердість у порівнянні з вихідним сплавом Si-Ge, що погоджується з даними про зниження енергії взаємодії в ґратці Si при легуванні Ga, Р, В [1]. Збільшення кількості Ga до 5 моль % на значення мікротвердості матриці та Х-фази впливає незначно. На рисунку 5 приведені згортки значень мікротвердості Х-фази (рис. 5, а, в) і матриці (рис. 5, б, г), що свідчить про неоднорідність структури і багатозначність досліджуваних сплавів. Дані мікротвердості підтверджені локальним рентгеноспектральним, рентгеноструктурним і металографічними аналізами.

Методом локального рентгеноспектрального аналізу вивчено розподіл компонентів (Si, Ge) і легуючих елементів (Ga, Р, В) у структурі досліджуваних сплавів (рис. 6, 7). Аналіз кількісних даних (табл. 1) свідчить про утворення двох твердих розчинів $\text{Si}(\text{Ge})$ у досліджених сплавах: концентрація германію в одному з них (I твердий розчин) в обох сплавах складає $\sim 14,0 \%$; поряд з цим концентрація германію у другому твердому розчині (II твердий розчин) у сплаві Si-Ge-(2 моль%)Ga+В складає $15\% \text{ Ge}$; у сплаві Si-Ge-(5 моль% Ga)+В $\sim 18\% \text{ Ge}$ (рис. 8, таблиця 1).

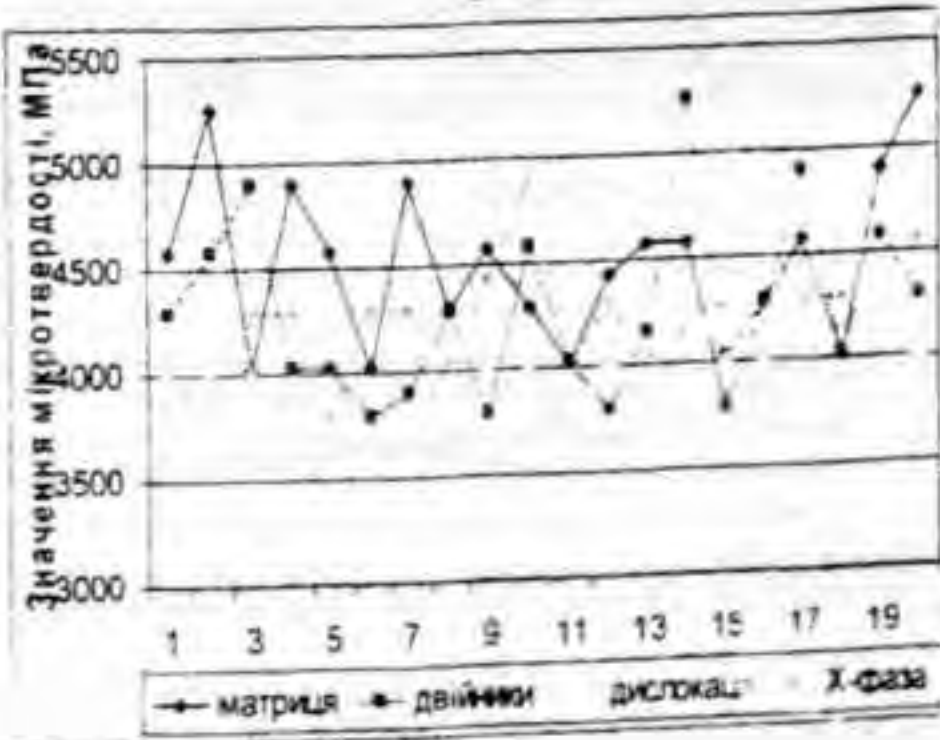
Ступінь легування Ga (2% чи 5% мол) змінює кількісне співвідношення твердих розчинів $\text{Si}(\text{Ge})$: збільшення концентрації Ga (5 мол %) приводить до збільшення в структурі сплаву кількості I твердого розчину (з концентрацією $\sim 14 \%$ Ge) в порівнянні зі сплавом, що містить 2 моль % Ga, приблизно у 3 рази (рис. 8).



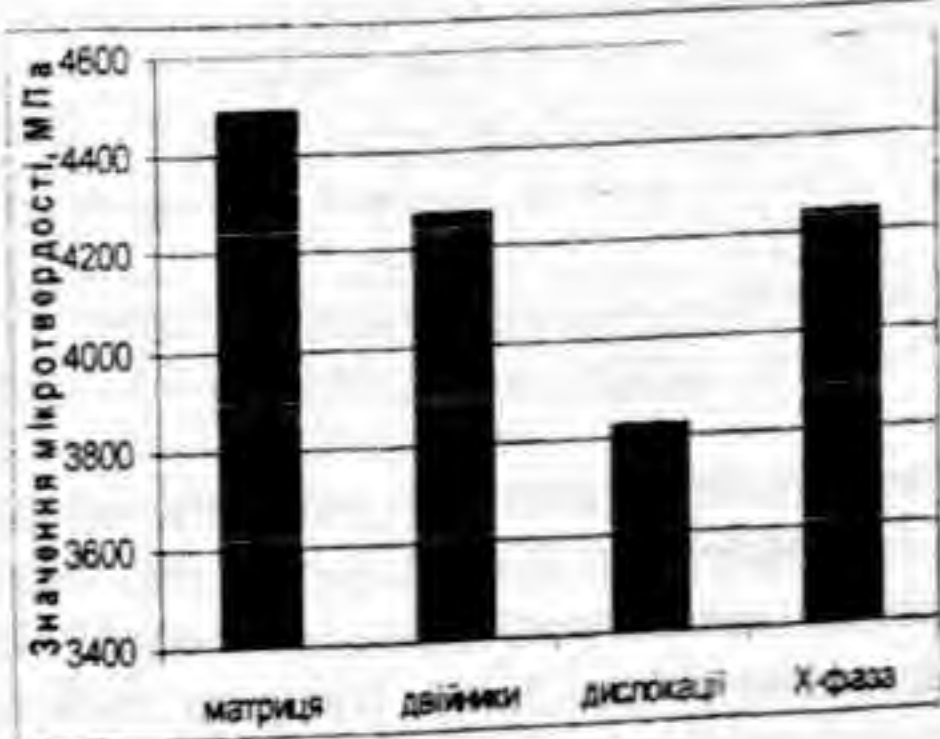
а



б



в

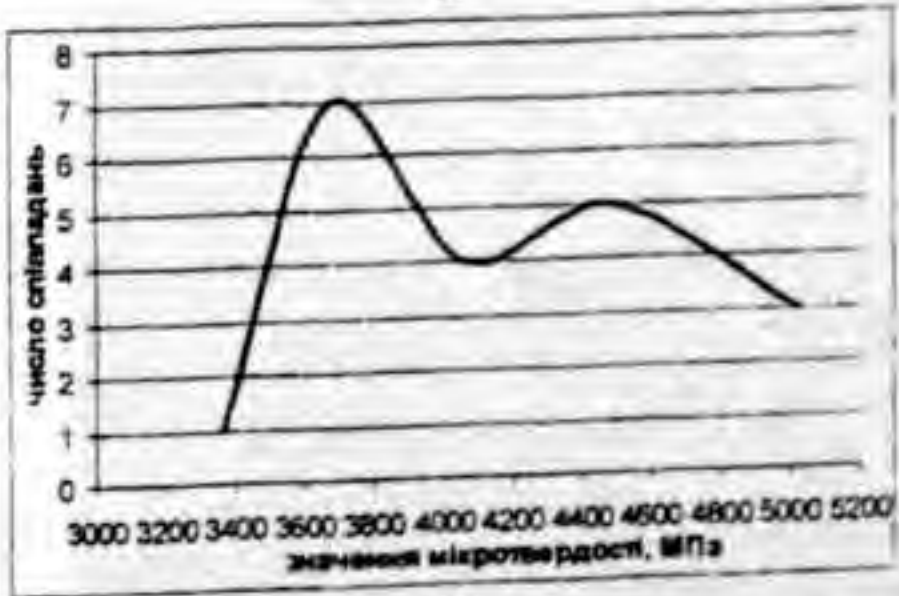


г

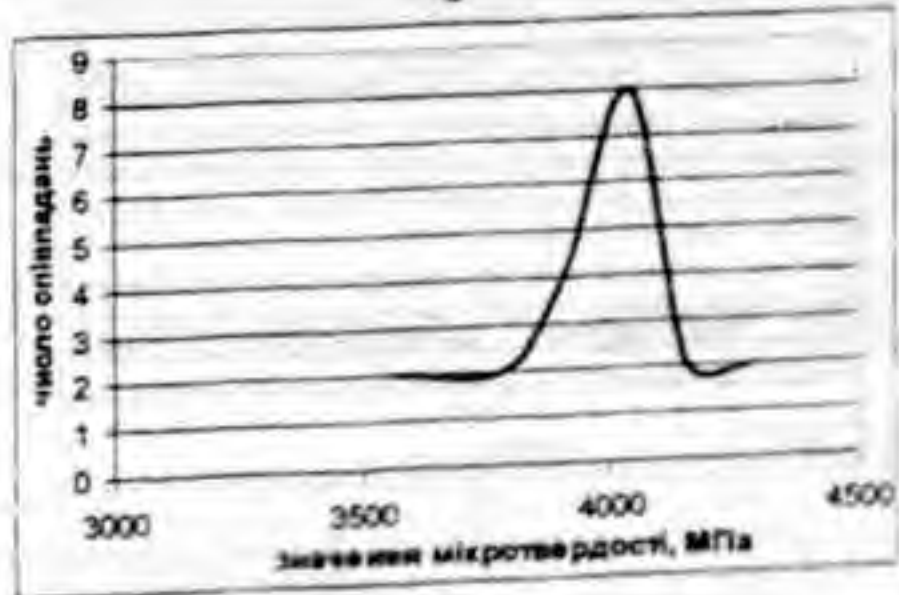
Рис. 4 Мікротвердість структурних складових сплавів Si-Ge-Ga(2 моль) (а, б) і Si-Ge-Ga(5 моль) (в, г)



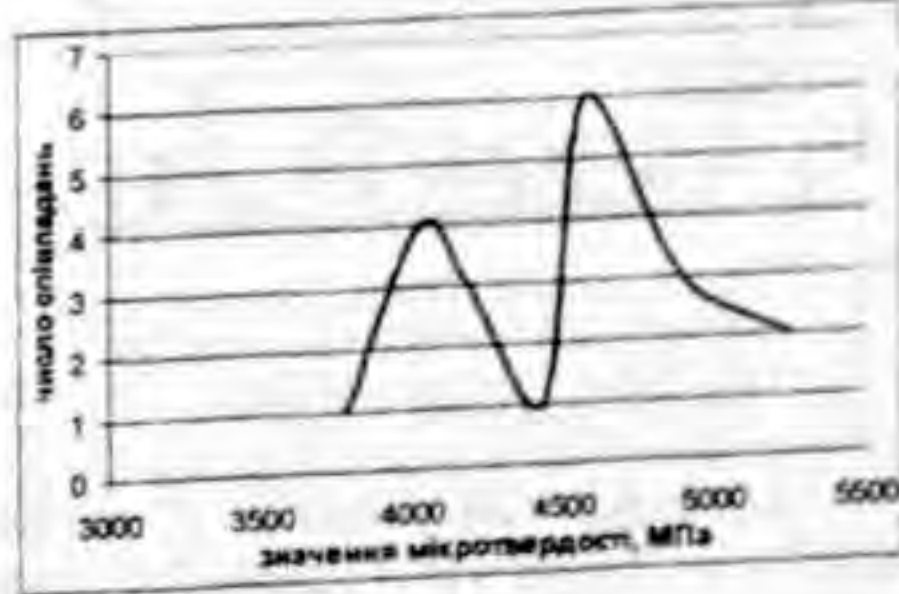
а



б



в



г

Рис. 5 Згортки значень мікротвердості структурних складових сплавів Si-Ge-Ga(2 моль) (а, б) і Si-Ge-Ga(5 моль) (в, г)

Встановлено, що обидва твердих розчини (рис. 8, а, б) леговані Ga, P і B у невеликих кількостях (табл. 1). Однак концентрація фосфору у всіх випадках перевищує вміст галію: в сплаві з 2 %мол. Ga вміст фосфору перевищує концентрацію Ga у 2 рази, а в сплаві з 5 %мол. Ga – на порядок.

Таблиця 1

Склад фаз у сплавах $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ (2 моль %)Ga+В і $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ (5 моль %)Ga+В

сплав	I твердий розчин				II твердий розчин				SiP			
	Si	Ge	Ga	P	Si	Ge	Ga	P	Si	Ge	Ga	P
Si-Ge-GaP(2 моль%)+В	85,6	13,9	0,15	0,31	83,9	15,45	0,3	0,5				
Si-Ge-GaP(5 моль%)+В	84,6	14,2	0,42	1,98	80,5	17,8	0,69	1,0	39,82	60,17		

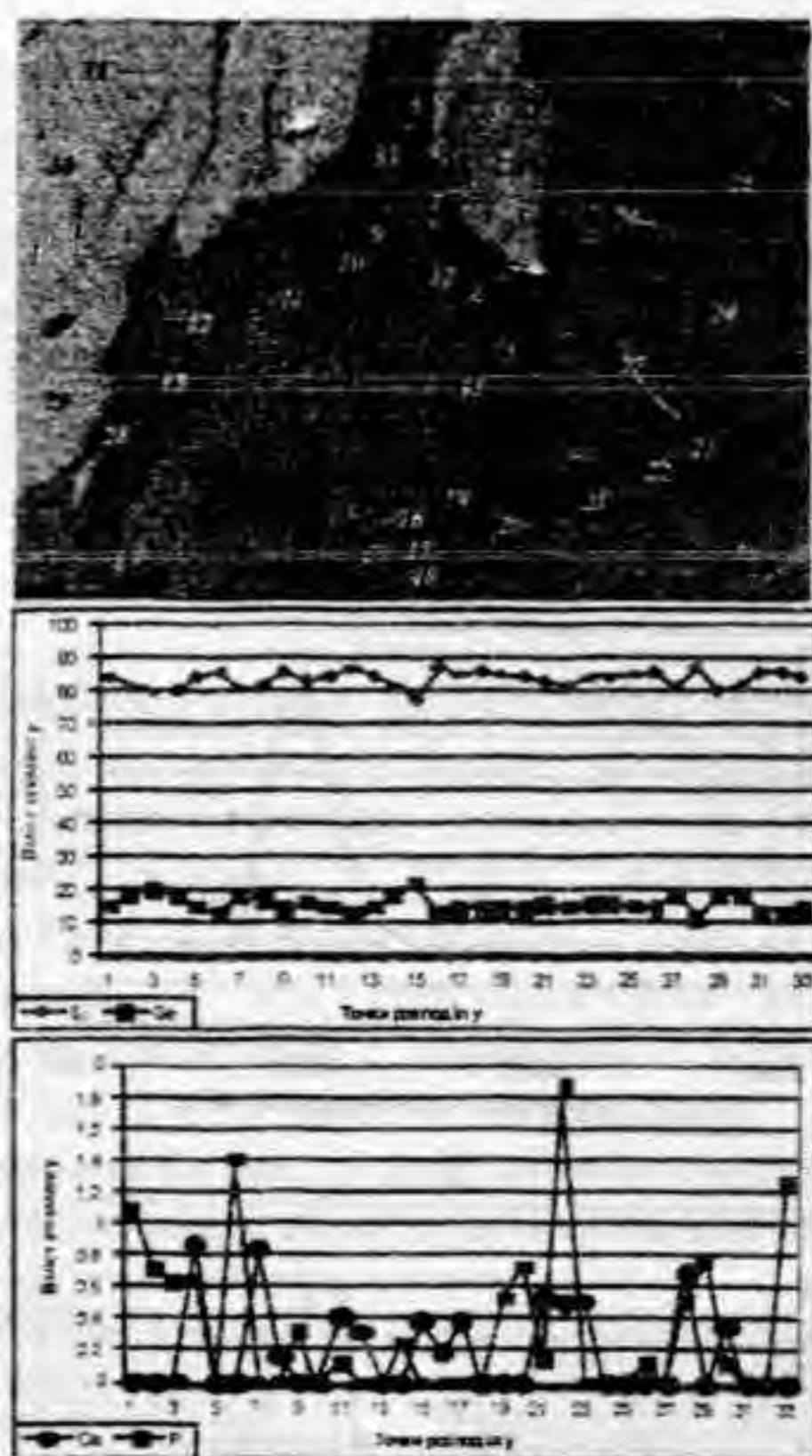


Рис. 6 Розподіл елементів у сплаві $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ (2 моль %)Ga

Такий розподіл компонентів і легуючих елементів у структурі сплаву істотно позначається на електрофізичних властивостях.

Слід зазначити, що сплав Si-Ge(2 моль %)Ga+В за розподілом елементів більш однорідний, ніж сплав з 5 моль % Ga (рис. 7). До того ж у сплаві Si-Ge(5 моль %)Ga+В виявлено фазу на основі фосфору і кремнію, (ймовірно SiP), леговану германієм і галієм (табл. 1, рис. 7).

Методом фазового рентгеноструктурного аналізу вивчено фазовий склад досліджуваних сплавів. На дифрактограмах сплавів (рис. 9, а, 10, а) крім ліній, що відповідають твердому розчину Si(Ge) з алмазною ґраткою, присутні додаткові максимуми, що свідчать про утворення твердого

розчину Si(Ge) з іншим типом ґратки. Зафіксований твердий розчин Si(Ge), характеризується кубічною тетрагональною ґраткою з відношенням с/а від 1,0018 до 1,00225.

Положення цих максимумів відповідає положенню раніше зафіксованої фази SiO₂C [2,3].

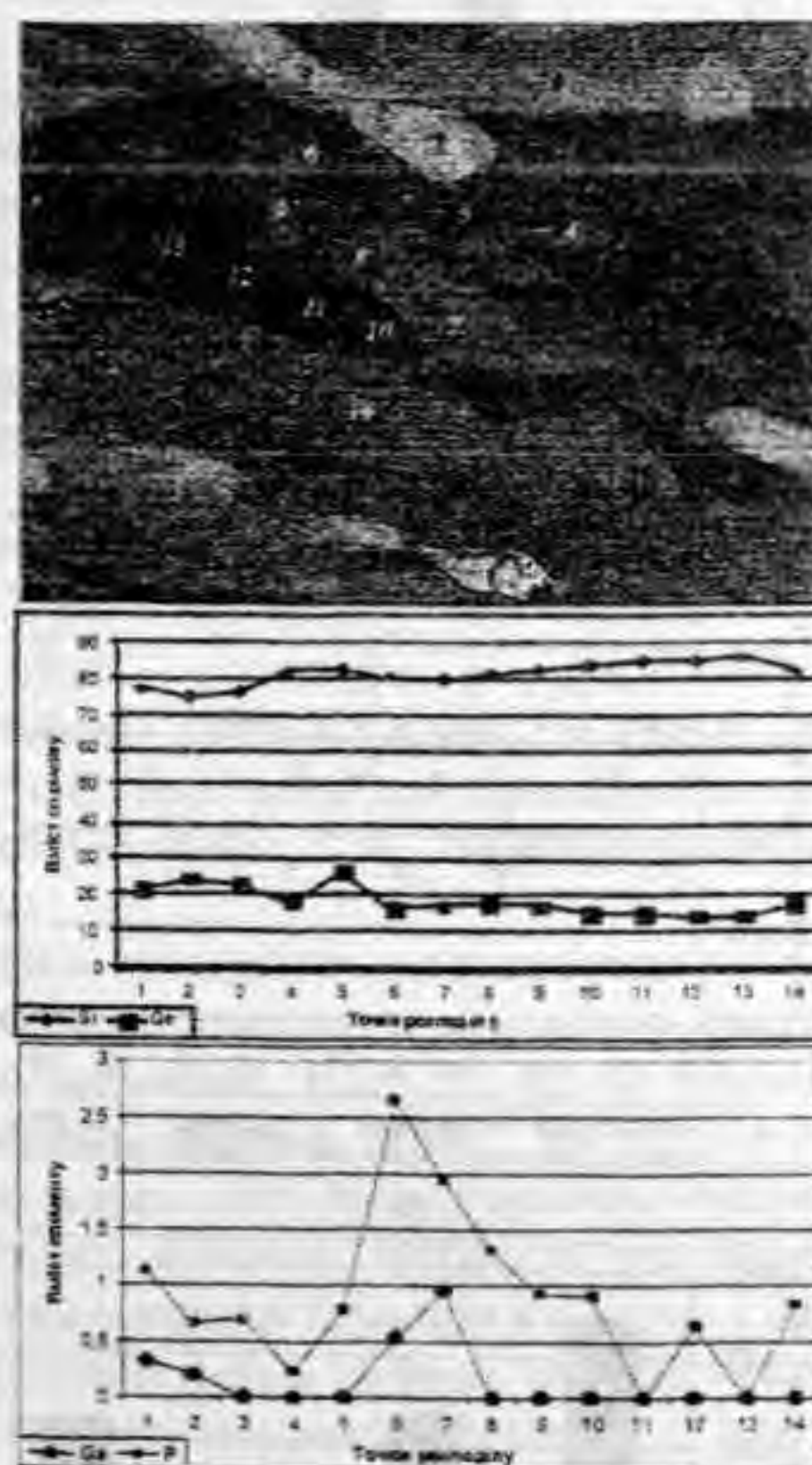
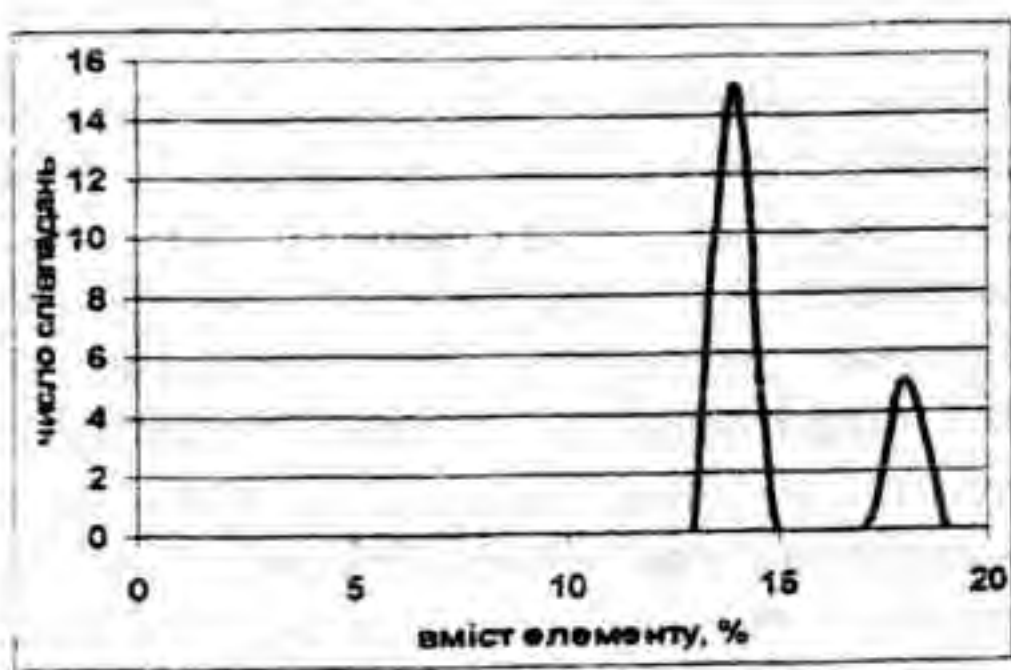
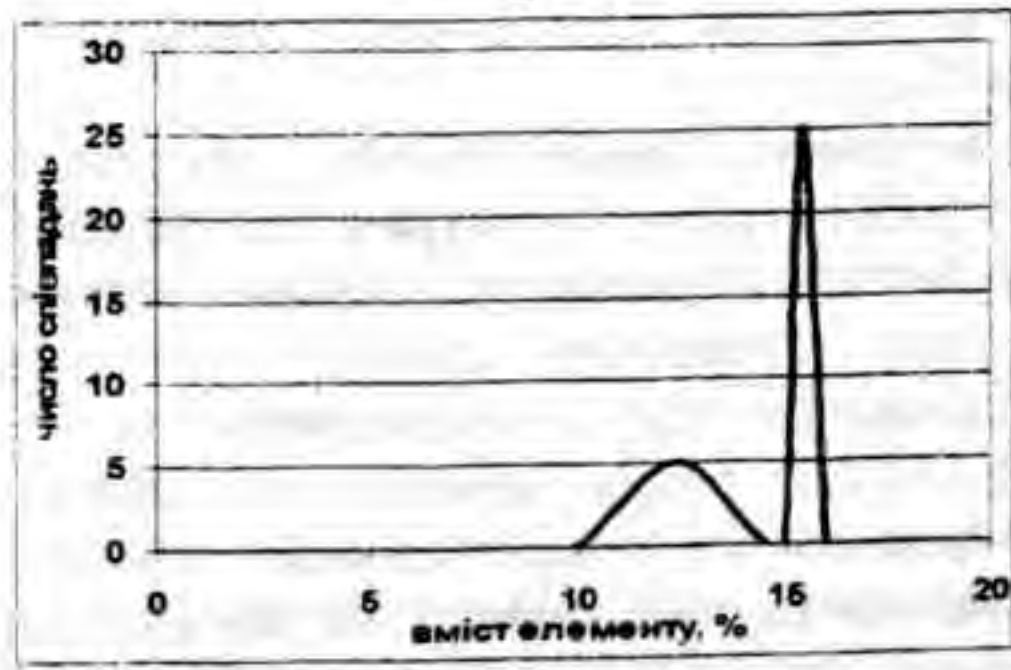


Рис. 7 Розподіл елементів у сплаві $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ (5 моль %)Ga

Легування приводить до розвитку напруг у ґратці і трансформації її в ОЦТ, про що свідчить розщеплення максимумів усіх ліній кремнієвого твердого розчину (рис.9, а). Профіль лінії (533) Si(Ge) твердого розчину з ГЦК_{алмаз} ґраткою також свідчить про наявність двох твердих розчинів (рис.9, б). Аналогічні результати отримані також для сплаву $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$ (5 моль %)Ga+В.

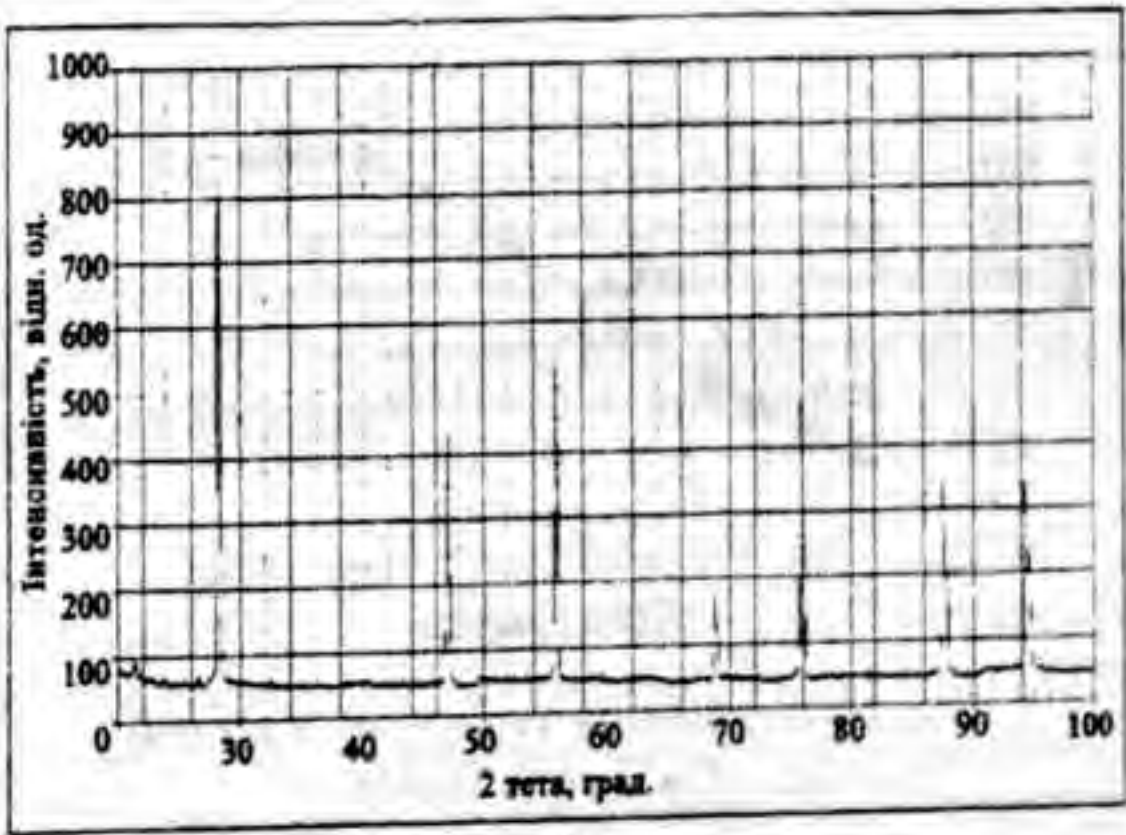


а

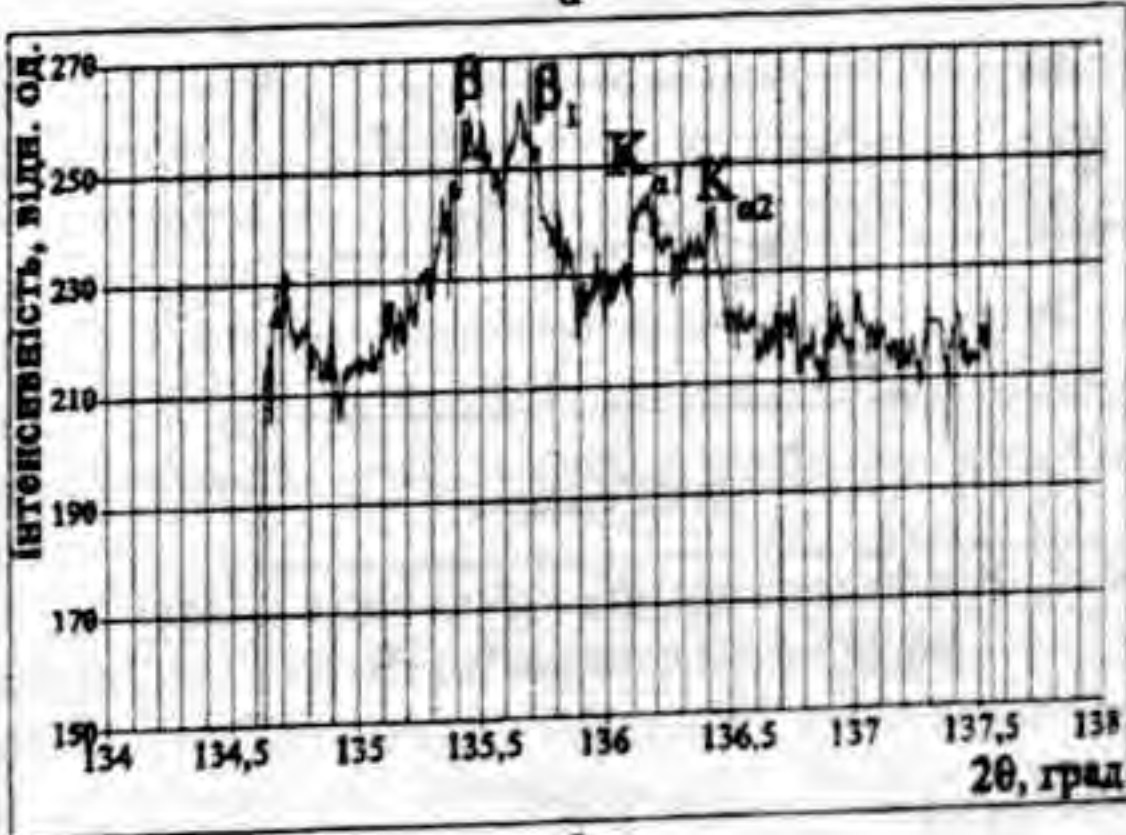


б

Рис. 8 Згортки розподілу кремнію та германію, та зміна співвідношення двох твердих розчинів у сплавах Si-Ge(2моль %Ga+B (а) і Si-Ge(5моль %Ga+B (б)



а



б

Рис. 9 Участок дифрактограми сплаву Si-Ge(2моль %Ga+B (а) і профіль лінії (533) досліджуваного сплаву (б) розчинів I і II в досліджуваних сплавах (таблиця 2).

Визначено параметри кристалічних ґраток твердих

Таблиця 2

Параметри кристалічних ґраток твердих розчинів I і II в сплавах Si-Ge(2моль %Ga+B и Si-Ge(5моль %Ga+B

Сплав	2Θ		d, Å		a, Å	
	2Θ ₁	2Θ ₂	d ₁	d ₂	a ₁	a ₂
Si-Ge-GaP(2% моль)+B	135.49	135.66	0.8322	0.8317	5.4572	5.4541
Si-Ge-GaP(5% моль)+B	135.73	136.20	0.8315	0.8301	5.4525	5.4437

Визначено абсолютні значення термо-ерс для досліджуваних сплавів в інтервалі температур 20-545°C (рис. 11, 12).

Встановлено, що зі збільшенням dt/dx град/см термо-ерс сплаву $Si_{0.85}Ge_{0.15}Ga(2\text{моль \%})+B$ безупинно росте, досягаючи значень 128,8 мВ при $dt/dx \sim 40$ град/см. Незначні відхилення від монотонної залежності спостерігаються в області температур $\sim 200^\circ\text{C}$ и $\sim 400^\circ\text{C}$ (рис. 11). Що стосується сплаву з 5 моль % Ga, то температурна залежність термо-ерс

характеризується істотною нестабільністю: спостерігається різка зміна монотонності кривої $E=f(dt/dx)$ при температурах $\sim 160^\circ\text{C}$ и $\sim 350^\circ\text{C}$.

Максимально досягнуті (рис. 12) значення $E=83$ мВ при температурі $\sim 500^\circ\text{C}$.

Випробувано режими термічної обробки для ослаблення хімічної неоднорідності та одержання максимально однорідної структури. Рекомендується високотемпературний відпал зі швидкістю охолодження і нагрівання 4 гр/хв.

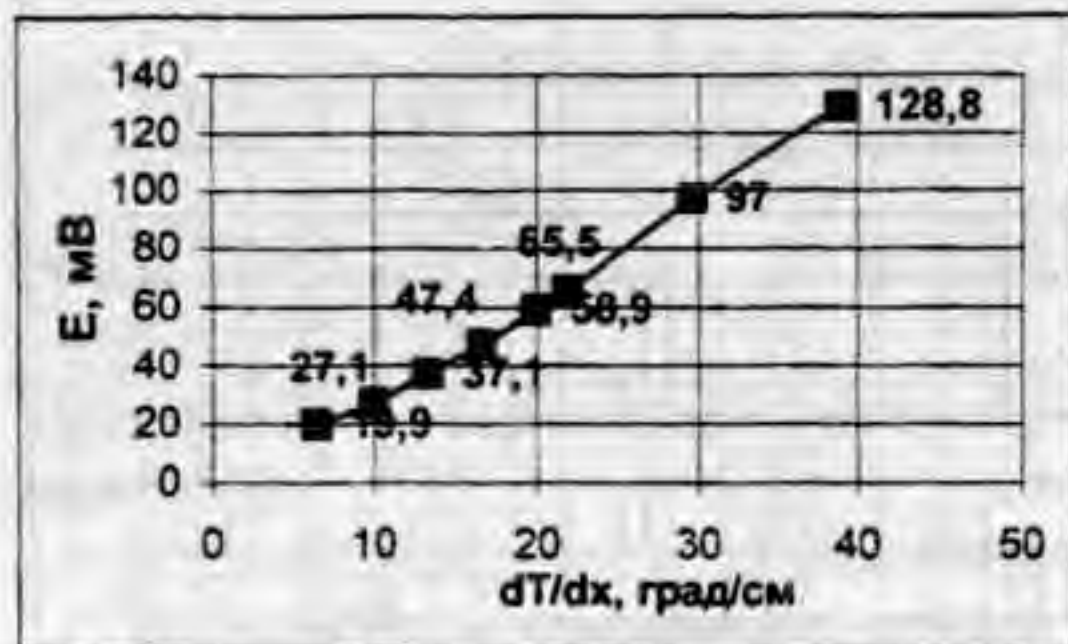


Рис. 11 Результати виміру термо-ерс в сплаві $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}\text{Ga}(2\text{моль \%})+\text{B}$



Рис. 12 Результати виміру термо-ерс в сплаві $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}\text{Ga}(2\text{моль \%})+\text{B}$

Висновки

1. Методом Чохральського отримано високоефективні термоелектричні багатокомпонентні сплави на основі твердого розчину $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$. Зразки р-типа отримані спільним легуванням сплаву кремній-германій бором і фосфідом галію, а n-типу - легуванням фосфідом галію.

2. Вивчено мікроструктуру, мікротвердість, фазовий склад сплавів $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$, комплекснолегованих галієм-фосфором і галієм-фосфором-бором; розподіл компонентів (кремній, германій) і легуючих елементів (бор, галій, фосфор) між фазами досліджуваних сплавів. Показано, що:

- мікроструктура досліджуваних сплавів істотно неоднорідна, характеризується різнозернистістю і дефектністю; в структурі виявлено двійники, границі двійникування, лінії й області локалізованого зсуву, дислокації та "свірл-дефекти"; X-фазу, що уявляє собою твердий розчин германію на основі металізованої модифікації кремнію з ромбічним типом ґратки.

- кількісне співвідношення і склад (X-фази і матриці) змінюється в залежності від легування і термічної обробки. Методом локального рентгеноспектрального аналізу показано, що X-фаза збагачена германієм у порівнянні з матрицею, мікротвердість X-фази перевищує мікротвердість матриці, що в сполученні з мікроструктурними картинками (форма X-фази, двійникування, області локалізованого зсуву, підвищена щільність дислокацій у матриці) свідчить на користь мартенситного механізму утворення X-фази.

3. В легованих сплавах $\text{Si}_{0.85}\text{Ge}_{0.15}$, вивчених у дійсній роботі, поряд з матричним твердим розчином $\text{Si}(\text{Ge})$ зафіксовано твердий розчин $\text{Si}(\text{Ge})$, що характеризується кубічною тетрагональною ґраткою з відношенням с/а від 1,0018 до 1,00225. Атоми германію, заміщуючи атоми кремнію в кристалічній ґратці, розташовуються неупорядковано, не утворюючи надструктури.

4. Вивчено температурну залежність термо-ерс. Встановлено, що термоелектрична ефективність досягає для зразків р-типа $(0,92-0,94) \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$, для зразків n-типу - $(0,95-0,98) \times 10^{-3} \text{K}^{-1}$. Реалізація цих матеріалів в термоелектричних генераторах значно збільшить їх потужність і ефективність.

Література

1. V.Z. Kutsova, O.A. Nosko, A.S. M.I. Timochina. Alloying effect on structure and properties of semi-conductor silicon and Si-Ge alloys // Silicon'2006. The Tenth Scientific and Business Conference. Roznov pod Radostem, Czedch Republic. – vol. 1-2. – pp. 450-459.
2. Таран Ю.Н., Куцова В.З., Червоний И.Ф., Швец Е.Я., Фалькевич Э.С. Полупроводниковый кремний: теория и технология производства. Монография. Год издания – 2004. Издательство – типография Запорожской государственной инженерной академии, г. Запорожье, 343 с.
3. Таран Ю.Н., Куцова В.З., Носко О.А. Фазовые переходы полупроводник-металл // Успехи физики металлов. – т.5. – 2004. – С. 87-166.

УДК 519.9

Мацуї Л.Ю., пров. наук. співр.
Вовченко Л.Л., ст. наук. співр.
Шевченко Н.М., інженер

Аномальна поведінка електроопору невпорядкованого графіту інтеркальованого SbCl_5 , AlCl_3 та ICl

В статті наведені результати експериментальних досліджень температурної залежності електроопору інтеркальованих сполук графіту з SbCl_5 , AlCl_3 та ICl на основі дрібнокристалічного анізотропного графіту та високоорієнтованого графіту, та експериментально показано, що величина та хід температурної залежності електроопору в інтеркальованих сполуках графіту суттєвим чином залежать від структури вихідного графіту.

Ключові слова: інтеркальовані сполуки графіту, дрібнокристалічний анізотропний графіт та високоорієнтований графіт

Відомо, що в низько розмірних системах при низьких температурах спостерігається аномальна поведінка кінетичних властивостей [1]. Ці аномалії пов'язані з проявом ефектів локалізації і взаємодії носіїв струму. Так для багатьох вуглеграфітових матеріалів з відмінними структурними характеристиками спостерігалось логарифмічне збільшення електроопору при зниженні температури (некласичний металічний ефект). Було виявлено, що чим вище дефектність матеріалу, тим більш чітко проявляються особливості електроопору, які пов'язані з ефектами слабкої локалізації та взаємодії. З іншого боку, інтеркалювання графіту акцепторами призводить до утворення сполук графіту з двомірною електронною структурою, що значно збільшує прояв ефектів локалізації та взаємодії.

Метою роботи було дослідження впливу типу вихідного графіту, типу інтеркалянта, умов синтезу на характер температурної залежності електроопору невпорядкованого графіту інтеркальованого SbCl_5 , AlCl_3 та ICl

В якості вихідних для інтеркалювання матеріалів було вибрано два типа вуглеграфітових матеріалів, які істотно відрізняються по своїм структурним характеристикам: дрібнокристалічний

L. Matzui,
L. Vovchenko,
N. Shevchenko

Anomal behaviour resistance disordered graphite intercalation compounds SbCl_5 , AlCl_3 та ICl

The paper presents the results of experimental researches of temperature dependence of electroresistance intercalation compounds, of graphite with SbCl_5 , AlCl_3 and ICl on the basis of small-crystalline anisotropic graphite are induced and it is experimentally shown, that size and a course of temperature dependence resistance in graphite intercalation compounds significantly depends from structurally initial graphite.

Key Words: graphite intercalation compounds, small-crystalline anisotropic graphite

анізотропний графіт УПВ та високоорієнтований, близький по параметрам структури до монокристалу графіт ВОПГ. Дрібнокристалічний графіт марки УПВ має значно більше в порівнянні з ВОПГ відстань між шарами графіту ($d_{002} \geq 3.40 \text{ \AA}$) і в 5-10 раз менше значення розмірів кристалітів L_a , при цьому в графіті УПВ зберігається вироджена анізотропія кристалічної структури. Зразки ІСГ з SbCl_5 , AlCl_3 и ICl були отримані за стандартною одно температурною методикою [2]. Як було показано в роботах [3], при інтеркалюванні невпорядкованого дрібнокристалічного графіту ($d_{002} = 3.42 \text{ \AA}$) хлоридами, спостерігається до впорядкованого розташування шарів інтеркалянта в матриці графіту, а також до формування впорядкованої структури шару інтеркалянту, (як і в випадку інтеркалювання високоорієнтованих піролітичних графітів (ВОПГ)).

Дослідження структурних характеристик зразків проводилося за допомогою рентгенографічного методу. Для отримання рентгенограм використовувався прилад ДРОН—3М. Рентгенограми отримувалися в $\text{Co K}_{\alpha_{1,2}}$ -випромінюванні (довжина хвилі $\lambda = 1.7902 \cdot 10^{-10} \text{ м}$). З рентгенівських 001-дифрактограм за формулою Вульфа-Брегга розраховувався параметр

ідентичності I_c шарів інтеркалянту. Номер стадії сполуки S визначався із співвідношення:

$$I_c = d_n + (S + 1) d_{002} \quad (1)$$

де d_{002} - відстань між шарами графіту; d_n - відстань між шарами графіту, що містять шар інтеркалянту.

В таблиці 1 наведені умови синтезу, склад отриманих зразків, номер стадії S (концентрація зразків) і період ідентичності I_c для сполук, які були досліджені.

Таблиця 1

Вихідний матеріал	Тип інтеркалянту	T інт, K	S, стадія ИСГ	I_c , Å	ρ_{300}	ρ_{77}
УПВ	SbCl ₅	493	2	12,80	$1,9150 \cdot 10^{-07}$	$1,5640 \cdot 10^{-07}$
УПВ	SbCl ₅	713	2	12,89		$1,0790 \cdot 10^{-08}$
ВОПГ	SbCl ₅	493	2	12,78		
УПВ	ICl	317	2	10,52	$2,01010 \cdot 10^{-06}$	$2,25182 \cdot 10^{-06}$
УПВ	ICl	317	2	10,44	$8,78739 \cdot 10^{-07}$	$8,8543 \cdot 10^{-07}$
УПВ	ICl	317	1		$5,83889 \cdot 10^{-07}$	$2,7047 \cdot 10^{-05}$
УПВ	AlCl ₃	453	1		$1,11367 \cdot 10^{-06}$	$1,0854 \cdot 10^{-06}$

Дослідження електроопору в зразках ИСГ проводилися стандартним чотирьохзондовим методом в інтервалі температур 4.2-300K.

Проведені дослідження показали, що величина и хід температурної залежності електроопору ИСГ істотним чином залежить від структури вихідного графіту. Так ИСГ на основі ВОПГ, якій має більш досконалу структуру в порівнянні з УПВ має менше значення питомого електроопору, хоча в вихідному графіті УПВ електроопір при $T=300K$ (ρ_{300}) відрізнялось від ρ_{300} графіту ВОПГ майже в 3 рази, то для сполук з 2 стадією SbCl₅ ця відмінність складає всього 1.1, для сполук з ICl відношення $\rho_{УПВ-ICl} / \rho_{ВОПГ-ICl}$ 1,2-1,4. Величина зміни електроопору при зміні температури в більшій мірі залежить від типу вихідного графіту, і в меншій мірі від типу інтеркалянту.

Так при зміні температури від 77K до 293K в ИСГ на основі ВОПГ ρ збільшується майже в 2-3 рази для сполук 2 стадії і величина температурного коефіцієнта електроопору істотним чином залежить від типу інтеркалянту і умов отримання.

Наприклад, для сполук 2 стадії ВОПГ з ICl ця величина майже в 1,5 рази менше ніж для сполук з SbCl₅. Для сполук на основі графіту УПВ, для всіх типів інтеркалянта, які досліджувалися величина відношення ρ_{77}/ρ_{300} для сполук 2 стадії складає 0,94-0,98, тобто зміна

електроопору в цьому температурному діапазоні складає всього декілька процентів і практично не залежить від типу інтеркалянту.

Ще одним фактором, який впливає на величину и хід температурної залежності електроопору являється температура синтезу. Як показали рентгеноструктурні дослідження ИСГ з SbCl₅ [4] підвищення температури синтезу призводить до формування більш дефектної структури в зразках, що повинно порозводити до збільшення питомого електроопору. Дійсно, як видно з таблиці 1, для сполук УПВ с ICl спостерігається збільшення питомого електроопору при підвищенні температури синтезу. Для сполук графіту з SbCl₅ збільшення температури синтезу призводить і к підвищенню долі SbCl₆⁻ і супроводжується збільшенням концентрації додаткових носіїв струму в ИСГ, що призводить до зменшення електроопору як в ИСГ на основі УПВ так и на основі ВОПГ досягає значень ρ близьких до ρ вихідного матеріалу. Характерною особливістю $\rho(S)$ для сполук на основі високоорієнтованого графіту являється наявність мінімуму на кривій $\rho(S)$ при $S=2-3$ [5]. Аналогічна залежність спостерігається і для сполук на основі УПВ, причому глибина мінімуму залежить від типу інтеркалянту. Так для сполук з AlCl₃ $\rho(1)/\rho(2)$ досягає 5, а для сполук з ICl $\rho(1)/\rho(2)$ складає всього 1,5 рази.

При підвищенні номера стадії електроопору повинно збільшуватися при цьому в ІСГ як на основі УПВ так і на основі ВОПГ спостерігається зміна знака температурного коефіцієнта електроопору. Для сполук вищих стадій ТКС становиться, так же як і в чистому

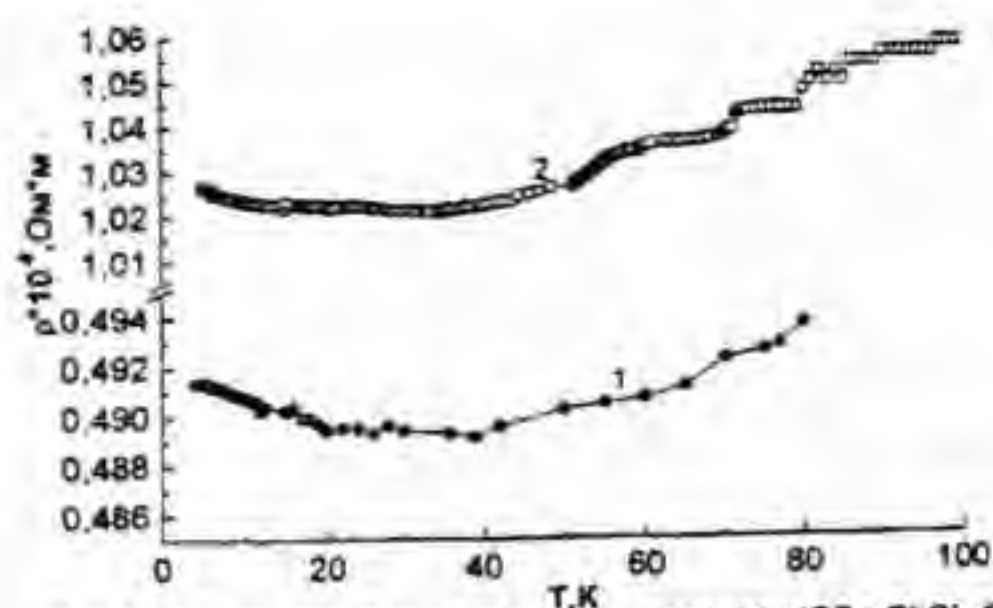


Рис.1 Температурна залежність електроопору ІСГ з SbCl_5 -1 и AlCl_3 -2 на основі УПВ

графіті від'ємним.

На рис.1, 2, 3 представлені температурні залежності електроопору ІСГ на основі неупорядкованого графіту з SbCl_5 , AlCl_3 та ICl . Звертає на себе увагу достатньо складний вигляд температурної залежності електроопору досліджуваних матеріалів: наявність мінімуму в області низьких температур, аномалії в області температур 200-300 К.

Проаналізуємо основні механізми, які визначають температурну залежність електроопору в ІСГ розглянутого типу. Розглянемо спочатку електроопір сполук другої стадії. Враховуючи два основні механізми розсіювання носіїв струму, які визначають поведінку електроопору - розсіювання на фонах та дефектах структури, класичний електроопір ІСГ другої стадії, який являється двовірним провідником може бути представлено у вигляді:

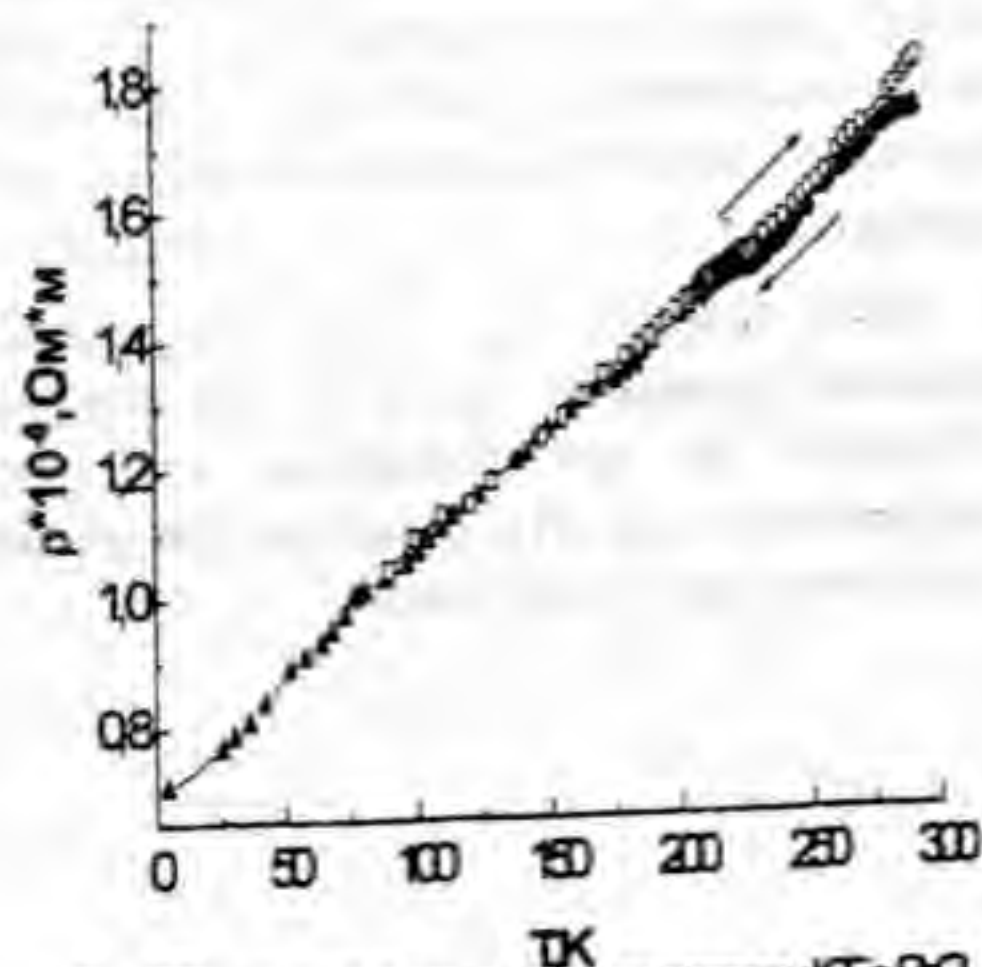


Рис.2 Температурна залежність електроопору ІСГ з SbCl_5 на основі УПВ

$$\rho_{2s} = \frac{\pi \hbar}{e^2} \frac{1}{(k_{F1} + k_{F2})} \left(\frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_{ph}} \right), \quad (2)$$

де k_{F1} та k_{F2} ферміївські хвильові вектори першої та другої зон провідності ІСГ другої стадії, а L_{ph} згідно [6]:

$$L_{ph} = L_0 T^{-c} \quad (3)$$

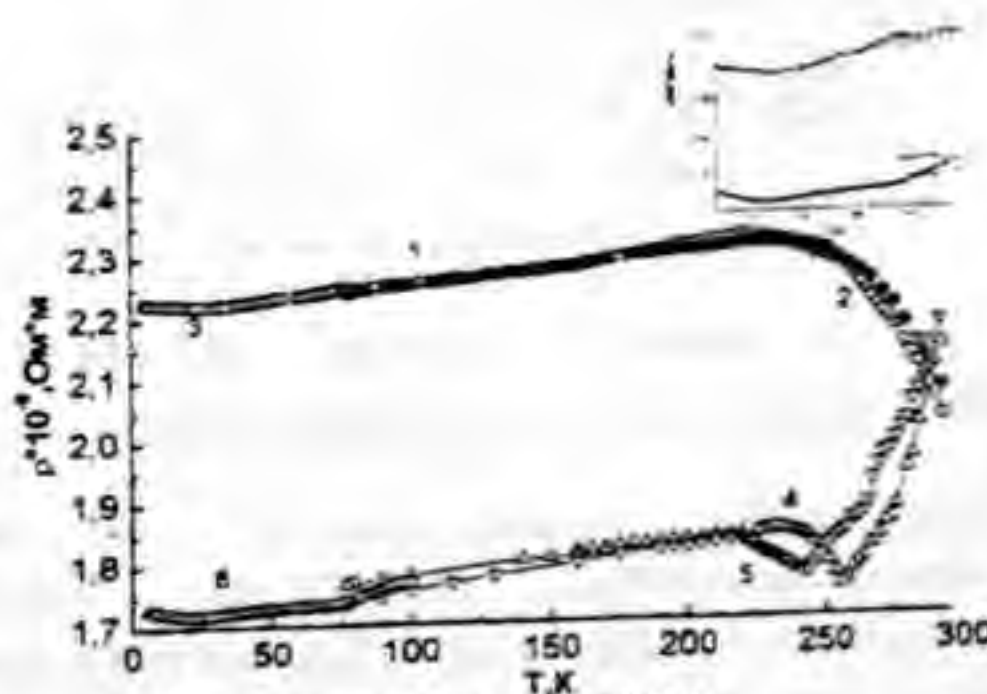


Рис.3 Температурна залежність електроопору ІСГ з ICl
 $T_{\text{ср}} = T_{\text{ср}} = 1.23$ - ІСГ 2 стадії 4.5.8 - ІСГ 3 стадії

Згідно [6] залежність енергії Фермі від хвильового вектора для сполук другої стадії і коефіцієнта акомодатії f , тобто долі додаткового заряду, який передається шарам графіту інтеркалянт, має:

$$E_F = \frac{3}{2\sqrt{2}} b \gamma_0 (k_{F1} + k_{F2}), \quad (4)$$

де $b=1$, $42\text{\AA}^{-1}$, $\gamma_0=2.4$ еВ-параметр, який характеризує взаємодію між атомами, і-стехіометричний коефіцієнт в формулі ІСГ C_{4i}X .

Для аналізу експериментальної температурної залежності електроопору ІСГ $\rho_{35}(T)$ другої стадії вираз (2) з врахуванням (3) та (4) зручно записати у вигляді

$$\rho_{35} = AT^c + B, \quad (5)$$

де

$$A = \frac{\pi \hbar}{e^2} \frac{I_{cs}}{k_F L_0} = \frac{3 \pi \hbar \gamma_0 I_{cs}}{2 e^2 E_F L_0}, \quad (6)$$

$$B = \frac{\pi \hbar}{e^2} \frac{I_{cs}}{k_F L_a} = \frac{3 \pi \hbar \gamma_0 I_{cs}}{2 e^2 E_F L_a}, \quad (7)$$

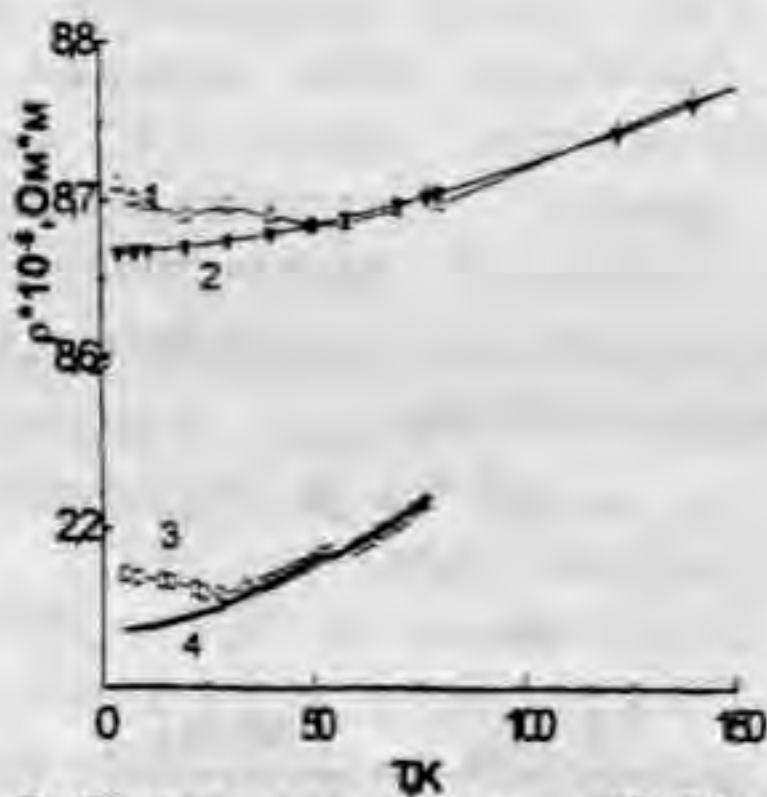
Із експериментальних даних ρ_{35} по вимірюванні електроопору дрібнокристалічного графіту, інтеркальованого SbCl_5 , AlCl_3 , ICl до другої стадії в інтервалі температур 77-200К

Значення коефіцієнтів A , B , C , енергії Фермі E_F для ИСГ с $SbCl_5$ на основі дрібнокристалічного піролітичного графіту УПВ.

Значения коэффициентов A , B , C , энергии Ферми E_F для ИСГ на основе мелкокристаллического пиролитического графита УПВ

Тип СГ (T _{мрт} , К)	A, Ом/К	B, Ом	C	E _F · L ₂
SbCl ₅	3.37 · 10 ⁻¹²	8.65 · 10 ⁻⁷	1.6 ± 0,01	7.79 · 10 ⁻²⁸
SbCl ₅ (493K)	1.50 · 10 ⁻¹¹	8.74 · 10 ⁻⁷	1.6 ± 0,07	7.7 · 10 ⁻²⁸
SbCl ₅ (713K)	6.25 · 10 ⁻¹²	4.87 · 10 ⁻⁷	1.6 ± 0,08	1.39 · 10 ⁻²⁷
ICl	4.40 · 10 ⁻¹¹	2.12 · 10 ⁻⁶	1.6 ± 0,2	3.50 · 10 ⁻²⁸
ICl	3.55 · 10 ⁻¹¹	1.83 · 10 ⁻⁶	1.6	4.05 · 10 ⁻²⁸
AlCl ₃	2.96 · 10 ⁻¹²	1.21 · 10 ⁻⁶	1.6	6.14 · 10 ⁻²⁸

Наявність мінімуму на кривих $\rho(T)$ свідчить про наявність в даних сполуках в області гелієвих температур механізму електропровідності, відмінного від класичного. Як відмічалось раніше, аномальна поведінка електроопору структурно недосконалих вуглеграфітових матеріалів в області гелієвих температур пов'язано з проявом ефектів слабкої локалізації і електрон-електронної взаємодії носіїв струму [8]. Отже, можна припустити, що і в ІСГ на основі невпорядкованих графітів аномальна поведінка $\rho(T)$ в області низьких температур також будуть проявлятися дані ефекти. Оскільки ІСГ акцепторного типу являються двомірними системами, то квантові поправки до провідності в цьому випадку мають вигляд [9]:



Ю 20-го експерименту № 13 зареєстровано збегнуто-24

$$\delta\sigma_{2loc} = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \alpha \ln\left(\frac{\tau_0}{\tau_\phi}\right).$$

$$\delta\sigma_{2int} = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \gamma \ln\left(\frac{2\pi k\tau_0 T}{\hbar}\right) \quad (8)$$

де τ_0 - час розсіяння носіїв струму при різних механізмах розсіяння (у випадку неупорядкованого графіту спостерігається переважно розсіяння носіїв струму на границях кристалітів і $\tau_0 = L_b / V_F$, V_F - швидкість носіїв на рівні Фермі); τ_ϕ - час релаксації фази хвильової функції і $\tau_\phi = A^* T^P$, де коефіцієнт P відповідає за тип розсіяння носіїв струму. Підставивши τ_ϕ в (8) отримаємо для поправки до провідності наступний вираз:

$$\delta\sigma_2 = \delta\sigma_{int} + \delta\sigma_{loc} = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left[(\alpha p + \gamma) \ln T + \gamma \ln \left(\frac{2\pi k \tau_0}{\hbar} \right) + \alpha \ln \left(\frac{\tau_0}{A^*} \right) \right] \quad (9)$$

Або в спрощеному вигляді:

$$\delta\sigma = K \ln T + E \quad (10)$$

$$\text{Де } K = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} (\alpha p + \gamma),$$

$$E = \frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \left[\gamma \ln \left(\frac{2\pi k \tau_0}{\hbar} \right) + \alpha \ln \left(\frac{\tau_0}{A^*} \right) \right]$$

Час релаксації фази хвильової функції τ_0 можна оцінити використовуючи вираз для A^* в наступному вигляді [10]:

$$\frac{1}{A^*} = \frac{k}{2E_F\tau_0} \ln \left(\frac{E_F\tau_0}{\hbar} \right) \quad (11)$$

Або при переході до L_b :

$$\frac{1}{A^*} = \frac{kV_F}{2E_FL_b} \ln \left(\frac{E_FL_b}{V_F\hbar} \right) \quad (12)$$

Розглянемо добавку до провідності в області низьких температур для інтеркальованих сполук на основі УПВ, яку можна представити у вигляді:

$$\delta\sigma(T) = \sigma_{\text{зкс}}(T) - \sigma_p(T), \quad (13)$$

де $\sigma_p(T)$ – електропровідність досліджуваних зразків, розрахована за формулою (5) з врахуванням значень A , B та C , які наведені в таблиці 3, тобто, з врахуванням основних класичних механізмів розсіяння носіїв струму (на фонах, домішках, електронах). Як видно з рис. 5 ця добавка добре описується залежністю типа (10).

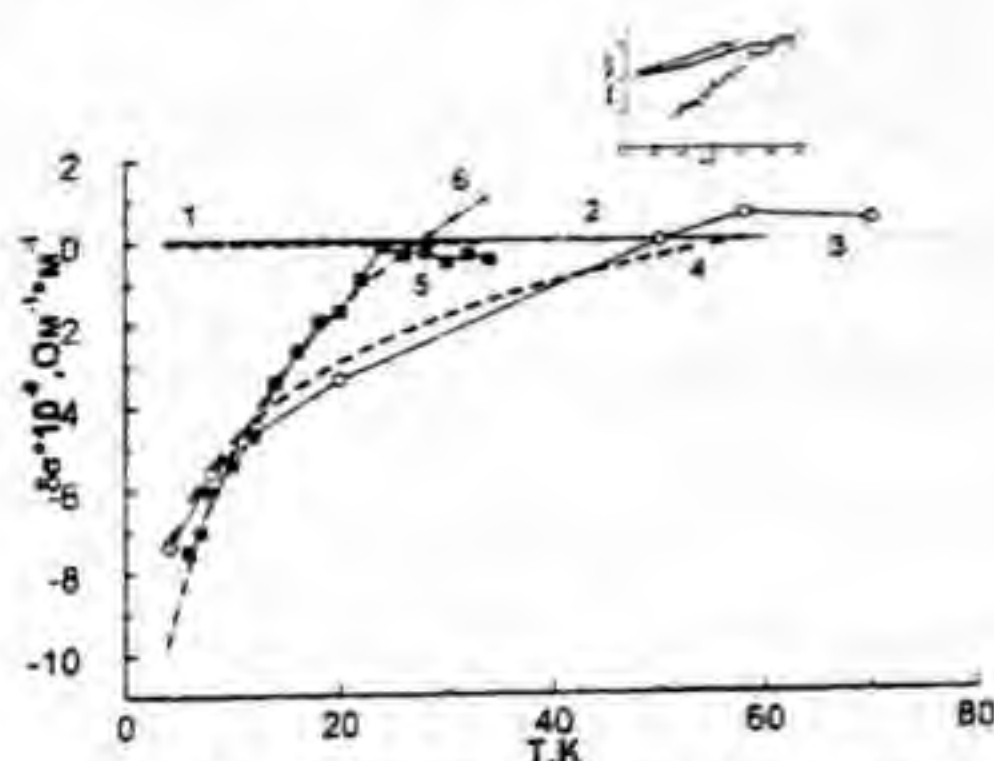


Рис 5. Температурна залежність квантових добавок до провідності в області низьких температур для ІСГ з SbCl₅ 2 стадія - (3,4), та ІСГ 2 стадія - (5,6).

З експериментальних залежностей $\delta\sigma_2(T)$ були розраховані коефіцієнти E , K для досліджуваних ІСГ. Використовуючи отримані значення K і E за формулами (9), (10), (11) можна розрахувати значення α , $\alpha p + \gamma$, γ , а також встановити взаємозв'язок між τ_0 і α , $\alpha p + \gamma$, γ , E_F . Значення цих величин наведені в таблиці 3. Аналіз отриманих величин α , $\alpha p + \gamma$, γ , E_F дозволяє зробити висновок, що у випадку ІСГ на основі неупорядкованого графіту квантова поправка до провідності обумовлена в основному ефектом взаємодії носіїв струму, коефіцієнт α близький до нуля для всіх типів досліджуваних сполук. Коефіцієнт γ , який відображає ступінь екранування носіїв струму, як видно з таблиці 3, найбільший для сполук з SbCl₅, причому для сполук отриманих при високих температурах спостерігається більш висока ступінь дисоціації молекул SbCl₅ і, відповідно більш висока концентрація носіїв струму ($E_F \sim 0,6 \text{ eV}$) значення $\gamma \sim 1$, що свідчить про практично повному екрануванні носіїв струму. В то же час для сполук з AlCl₃ $\gamma \sim 0,1$.

Таблиця 3

Теоретично розраховані значення α , $\alpha p + \gamma$, τ_0 , γ .

Тип ІСГ	$\delta\sigma_{2\text{жст}}$ ($T=4.2\text{K}$)	T_{min} K	A^*	E	K	τ_0 , c	α	$p + \gamma$	γ
SbCl5	$1.0 \cdot 10^{-5}$		$6.50 \cdot 10^{-11}$	$-1.33 \cdot 10^{-5}$	$2.38 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-14}$	$6.18 \cdot 10^{-3}$	0.198	0.205
SbCl5	$8.1 \cdot 10^{-6}$	30	$6.46 \cdot 10^{-11}$	$-1.6 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-14}$	$.99 \cdot 10^{-3}$ ¹	0.358	0.356
SbCl5	$3.77 \cdot 10^{-5}$	30-31	$9.18 \cdot 10^{-11}$	$-5.36 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$1.83 \cdot 10^{-14}$	$.52 \cdot 10^{-3}$ ³	1.1	1.09
ICI	$2.5 \cdot 10^{-6}$	28	$4.13 \cdot 10^{-11}$	$-8.87 \cdot 10^{-6}$	$2.15 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-14}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	0.179	0.181
ICI	$2.7 \cdot 10^{-6}$	26	$4.33 \cdot 10^{-11}$	$-6.2 \cdot 10^{-6}$	$1.91 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-14}$	$2.04 \cdot 10^{-2}$	0.159	0.139
AlCl3	$1.44 \cdot 10^{-6}$	33	$5.19 \cdot 10^{-11}$	$-3.69 \cdot 10^{-6}$	$9.1 \cdot 10^{-7}$	$2.3 \cdot 10^{-14}$	$7.67 \cdot 10^{-5}$	0.076	0.076

Значення коефіцієнта A (тобто залишковий електроопір, обумовлений розсіянням на границях кристалітів, дефектах) збільшується зі зменшенням номера стадії і з підвищенням температури синтезу ІСГ. Оскільки він, фактично визначає величину поправки до електроопору за рахунок квантових поправок, то така його поведінка цілком зрозуміла. Квантові ефекти слабкої локалізації та електрон-електронної взаємодії пов'язані з розупорядкуванням кристалічної структури. Величина розупорядкування збільшується з пониженням стадії інтеркальованої сполуки, адже зниження стадійності сполуки вимагає занурення великої кількості речовини інтеркалянта шарами, що призводить до збільшення числа дефектів. Число дефектів структури також збільшується і з підвищенням температури отримання збільшується і з підвищенням температури отримання ІСГ, оскільки збільшується інтенсивність синтезу. Цей факт знаходить відображення і в зменшенні величини L_2 для сполук більш низьких стадій і отриманих при більш інтенсивних умовах інтеркалювання. Наступне, на що хотілося б звернути увагу це величини енергії E_F . Величини енергії E_F , які отримані при аналізі основних механізмів розсіяння в досліджуваних матеріалах достатньо добре співпадає зі значеннями, які отримані в порівнянні експериментальних даних з розрахунковими при низьких температурах, і складають 0,1-0,6 еВ, що в 2-3 рази менше відповідних значень для ІСГ на основі монокристалічного графіту [11].

Таким чином, як і для чистих структурно недосконалих аномальна поведінка

електроопору ІСГ на основі УПВ в області гелієвих температур може бути пояснено в рамках теорії слабкої локалізації і електрон-електронної взаємодії. В даному випадку, квантові поправки носять двомірний характер, на відміну від трьохмірного для чистих вуглеграфітових матеріалів. Зміна електроопору при підвищенні температури для вказаних сполук являється результатом двох протилежно діючих ефектів: зменшенням величини електроопору за рахунок квантових ефектів і її збільшенням за рахунок розсіяння на фононах. В області температур рідкого гелію переважає перший ефект. При подальшому підвищенні температур вклад в електроопір другої складової збільшується і при деякій температурі настає рівновага і, як результат, на температурній залежності електроопору спостерігається мінімум.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. A.B. Kaiser. Incipient localisation and the termopower analog of the Mooij correlation. //Phys. Rev.B.-1987.-Vol.35, N35.-P.2480-2483.
2. A.Mawdsley. Termopower and resistivity of amorphous metallic In-Sb near the metal-insulator transition. //Phys. Rev.B.-1988.-Vol.38, N6.-P.3770-3780.
3. C.Castellani, C.di Castro et al. Thermoelectric power in disordered electronic systems near the Anderson transition. //Phys. Rev.B.-1988.-Vol.37, N12.-P.6663-6666.
4. L.Piroux, K.Amine, V.Bayot, M.S.Dresselhaus et al. 2D electronic transport in fluorine and transition metal fluorine GICs. //1st World

- Conference on Carbon.-V.-1. - Berlin. 2000. P.293-294.
5. Bayot V., Piraux L., Issi J.P., et al. Two-dimensional weak localization in partially graphite carbons. // Phys. Rev.B.-1990.-Vol.41, N17.-P.11770-117778.
 6. McRae E., Mareche J.F. Stage dependence of the electrical resistivity of graphite intercalation compounds. //J. Phys. Solid State Phys.-1985.-V.18.-P.1627-1640
 7. Onta Y., Kawamura K., Tzuzuru T. C-axis conduction in low stage graphite intercalation compounds with iodine monochloride. //J.Phys.Soc.Jap.-1986.- V.55, N.7.-P.2338-2342.
 8. Kamimura H., Nakao K., Ohno T., Ishida T. Mechanism for conduction in graphite intercalation compounds. //Physica BC. 1999.-V.99.-P.401-405.
 9. Matsubara K., Higano S., Kawamura K., Sugihara K., Susuki M., Susuki I.S. A- axis and C-axis resistivity and magnetoresistivity of stage 2-9 SbCl_5 GICs. //Carbon 97, extended Abstracts and Program. - Penn State (USA). - 1997.-P.128.
 10. Thouless D.J. Lower dimensionality and localization. // Physica.- 1982.-V.109B, N8.-P1523-1530.
 11. L.Piriaux V.Bayot ., Issi J.P., et al Electrical and thermal properties of fluorine-intercalated graphite fibers. // Phys. Rev.B.-1990.-Vol.41, N8.-P.4961-4969.

Надійшла до редколегії 8.10.2007

УДК 543.423:574

В.В. Пророк, к.ф.-м.н., ст.н.с.
Л.Ю. Мельниченко, к.ф.-м.н., ст.н.с.

Особливості надходження цезію та стронцію з ґрунту до рослин

Проведені дослідження надходження цезію та стронцію до рослин. Показано, що вміст ^{137}Cs у всіх одночасно відібраних на даній дослідній ділянці рослин різних видів незначно відрізняється один від одного. Вміст ^{137}Cs у відібраних у різний час рослин одного виду на тій самій ділянці може інколи відрізнятися більше ніж у 10 разів. Відношення Sr/Ca у рослині у межах експериментальної похибки дорівнює цьому відношенню у відповідному ґрунтовому розчині й практично не змінюється з часом. Вміст стронцію у рослині, що виросла на даному полі, визначається вмістом кальцію у цій рослині.

Ключові слова: цезій, стронцій, ґрунтовий розчин, надходження радіонуклідів до рослин

E-mail: prorok@univ.kiev.ua

V.V. Prorok, senior researcher
L.Yu. Melnichenko, senior researcher

Peculiarities of cesium and strontium uptake by plant

Investigations of cesium and strontium uptake by plants were conducted. The investigations shown that ^{137}Cs content in all selected at the same date different kinds of plants differ slightly for the land. Content of ^{137}Cs in the selected in different times the same kind plants from the same site differ sometime in more than 10 times. Ratio Sr/Ca in the plant is equal to the ratio in the corresponding soil solution for all investigated soils and plants and is practically invariable with time. Content of strontium in the plant at the land is determined by calcium content in this plant.

Key Words: cesium, strontium, soil solution, uptake radionuclides by plant

Вступ

Надходження цезію та стронцію з ґрунту до рослин вивчається вже на протязі більше п'ятдесяти років але особливо актуальною ця проблема стала після Чорнобильської аварії. Різні автори вважають різні параметри ґрунту визначальними для надходження ^{137}Cs до рослини. Короткий огляд методик оцінки надходження ^{137}Cs до рослини зроблено у роботі [1]. Більшість цих методик лише дають змогу говорити в деяких випадках про кореляцію деяких параметрів ґрунту або ґрунтового розчину з надходженням ^{137}Cs до рослини. З нашої точки зору найбільш адекватною є методика, що описана в [1-3]. Згідно роботам [1-3] надходження ^{137}Cs до рослини пропорційне кількості розчиненого ^{137}Cs у одиниці об'єму ґрунту. У вказаних роботах показано, що надходження ^{137}Cs до рослини не є сталою величиною для даного ґрунту та даної рослини а весь час змінюється у залежності від параметрів ґрунтового розчину у даний момент часу, а цезій не має аналогів серед елементів макроживлення

рослин відносно надходження до рослин. Літературні дані різних авторів щодо змін надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини у природних умовах на протязі сезону часто дуже суперечливі (див., наприклад [4, 5]).

Більшість дослідників погоджується з тим, що відношення Sr/Ca у рослині дорівнює цьому відношенню у відповідному ґрунтовому розчині, якщо цей розчин рівноважний [6, 7]. Рівність вказаних відношень спрощує задачу прогнозування надходження стронцію до рослин. У літературі практично відсутні дані про те, як змінюється відношення Sr/Ca на даній ділянці на протязі сезону вегетації рослин.

У даній роботі ми досліджуємо зміни у надходженні ^{137}Cs до рослини та зміни величини відношення Sr/Ca у рослині та у відповідному ґрунтовому розчині на протязі сезонів 2002 та 2003 років у природних умовах на кількох експериментальних ділянках.

Опис експерименту та обговорення отриманих результатів

Рослини вирощувалися у польових умовах на трьох експериментальних ділянках, розташованих у зоні відчуження Чорнобильської АЕС: ділянка А – дерено-підзолистий середньоопідзолений глеюватий піщаний ґрунт, що розвивається на водно-льодовикових пісках; ділянка В – торф'яно-болотний низинного типу ґрунт, що розвивається на торфах середньої товщини з осоки, очерету та деревини, що добре розклалися; ділянка С – дерено-підзолистий середньоопідзолений з ознаками тимчасового надмірного зволоження супіщаний ґрунт, що розвивається на водно-льодовикових супісках.

Для дослідження надходження стронцію та цезію з ґрунту до рослин ми використовували метод змішаного висіву, що описаний у роботах [1-3]. При цьому використовуються швидковиростаючі види рослин, щоб параметри ґрунтового розчину не встигали значно змінитися, поки ці рослини ростуть. При використанні цього метода можна вважати у деякому наближенні, що параметри ґрунтового розчину однакові для всіх рослин, що ростуть

одночасно на даній ділянці, а тому різні концентрації радіонуклідів у рослинах можна пояснити тільки різними властивостями цих рослин. У цьому експерименті досліджувалося також надходження валового стронцію з ґрунту до рослин на тих самих зразках рослин, що й надходження ^{137}Cs . Вміст ^{137}Cs у зразках визначався за допомогою гама-спектрометра "Kanberra". Вміст кальцію та валового стронцію у зразках вимірювався оптичним методом за допомогою ІСР-спектрометра "Spectro" з похибкою 0,5%. Застосування цього оптичного методу для знаходження вмісту валового стронцію значно здешевлювало виміри та підвищувало їх точність у порівнянні з визначенням вмісту ^{90}Sr у зразках за допомогою відомих радіохімічних методів. Вологість ґрунту h визначалася як відношення маси води у зразку до маси сухого ґрунту в цьому зразку з експериментальною похибкою 10 %.

Якщо ґрунтовий розчин рівноважний відносно валового стронцію та ^{90}Sr , то можна вважати, що концентраційні коефіцієнти ґрунтовий розчин-рослина для валового стронцію та ^{90}Sr практично дорівнюють один одному. Тому отримані для валового стронцію результати

Таблиця 1

Ділянка А. Вміст ^{137}Cs , Sr, Ca та відношення Sr/Ca у висушених рослинах та у відповідних ґрунтових розчинах. Вологість ґрунту на момент відбору зразків (для рослин) та на момент початку екстрагування ґрунтового розчину (для ґрунтових розчинів).

Soil humidity h	Date	Sample name	Sample №	Cs-^{137} Bq/kg	Ca	Sr	Sr/Ca
0,23	12May 2002	<i>Phleum pratense</i>	57	10880	1,43	0,010	0,0070
- " -	09June2002	<i>Phleum pratense</i>	58	5276	1,53	0,011	0,0072
0,062	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	55	1746	6,616	0,038	0,0057
- " -	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	65	2018	15,54	0,133	0,0086
- " -	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	67	4540	9,90	0,088	0,0089
0,094	14July 2002	<i>Phleum pratense</i>	75	5725	1,93	0,008	0,0042
- " -	14July 2002	<i>Stachys palustris</i>	76	10206	4,19	0,034	0,0081
0,29	08June 2003	Soil solution	5	4,9	53,62	0,224	0,0042
0,016	08June 2003	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	35	216	13,81	0,109	0,0079
- " -	08June 2003	<i>Lepidium sativum</i>	36	265	8,36	0,0506	0,0061
- " -	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	37	672	7,41	0,0507	0,0068
- " -	08June 2003	<i>Stachys palustris</i>	38	606	5,21	0,0292	0,0056
0,30	13July 2003	Soil solution	8	3,2	59,3	0,3641	0,0061
0,035	13July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	21	585	12,18	0,0474	0,0039
- " -	13July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	22	679	7,6	0,0656	0,0086
- " -	13July 2003	<i>Stachys palustris</i>	24	1722	5,57	0,0355	0,0064

Таблиця 2

Ділянка В. Вміст ^{137}Cs , Sr , Ca та відношення Sr/Ca у висушених рослинах та у відповідних ґрунтових розчинах. Вологість ґрунту на момент відбору зразків (для рослин) та на момент початку екстрагування ґрунтового розчину (для ґрунтових розчинів).

Soil humidity h	Date	Sample name	Sample №	Cs-137 Bq/kg	Ca	Sr	Sr/Ca
2.35	09June2002	Soil solution	24	61	33,65	0,081	0,0024
2.35	09June 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	59	609400	18,12	0,06	0,0033
- " -	09June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	60	606600	8,55	0,036	0,0042
3.20	22June 2002	Soil solution	19	40,8	145,0	0,409	0,0028
2.06	22June 2002	Roots of <i>raphanus sativus</i>	54	240760	8,95	0,028	0,0031
- " -	22June 2002	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	64	414700	34,46	0,103	0,0030
- " -	22June 2002	<i>Lepidium sativum</i>	68	758800	15,24	0,056	0,0037
- " -	22June 2002	<i>Polygonum hydropiper</i>	69	305700	13,8	0,072	0,0052
3.20	14 July 2002	Soil solution	23	95	58,63	0,133	0,0023
1.46	14 July 2002	<i>Urticaceae dioica</i>	72	230900	14,79	0,035	0,0024
- " -	14 July 2002	Motley grass	73	617500	9,26	0,023	0,0025
1.38	08June 2003	Soil solution	6	44,3	267,9	0,509	0,0019
0.45	08June 2003	<i>Lactuca sativa</i>	39	35911	18,24	0,039	0,0021
- " -	08June 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	41	47741	3,80	0,012	0,0032
- " -	08June 2003	<i>Urticaceae dioica</i>	42	55260	37,99	0,077	0,0020
- " -	08June2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	43	118888	21,40	0,052	0,0024
0.72	13 July 2003	Soil solution	9	27	304,5	0,035	0,0001
- " -	13 July 2003	<i>Lactuca sativa</i>	26	64924	16,43	0,045	0,0027
- " -	13 July 2003	Leaf of <i>raphanus sativus</i>	27	26130	30,58	0,079	0,0026
- " -	13 July 2003	<i>Polygonum hydropiper</i>	28	54348	21,49	0,068	0,0032
- " -	13 July 2003	Blades of <i>elytrigia repens</i>	29	36505	5,27	0,016	0,0030

Таблиця 3

Ділянка С. Вміст ^{137}Cs , Sr , Ca та відношення Sr/Ca у висушених рослинах та у відповідних ґрунтових розчинах. Вологість ґрунту на момент відбору зразків (для рослин) та на момент початку екстрагування ґрунтового розчину (для ґрунтових розчинів).

Soil humidity h	Date	Sample name	Sample №	Cs-137 Bq/kg	Ca	Sr	Sr/Ca
0,34	09June2002	Soil solution	12	4,8	51,3	0,3570	0,0070
0,069	09June2002	<i>Barbarea vulgaris</i>	61	5212	7,41	0,0648	0,0088
0,15	08June2003	Soil solution	4	1,9	23,10	0,135	0,0058
	08June2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	31	82	12,48	0,0811	0,0065
	08June2003	<i>Lepidium sativum</i>	32	65	3,96	0,0251	0,0063
0,12	13July2003	Soil solution	7	7,1	17,79	0,1305	0,0073
	13July2003	Leafs of <i>raphanus sativus</i>	16	164	9,96	0,0855	0,0086
	13July2003	<i>Barbarea vulgaris</i>	20	105	9,94	0,0967	0,0097

стосовно коефіцієнта переходу "ґрунтовий розчин-рослина" можна використовувати також і для ^{90}Sr . Зауважимо, що всі досліджувані рослини відбиралися до стадії цвітіння, а тому наступне

обговорення отриманих результатів стосується рослин саме в цій стадії.

Більш докладно методика експерименту описана в роботі [3].

Експериментальні результати, що наведені в табл. 1 – 3, показують, що для кожної з трьох дослідних ділянок відношення „стронцій-кальцій” змінюється при зміні температури та вологості ґрунту не більше чим на 30% від його середнього значення. Зважаючи на те, що експеримент проводився у природних умовах, можна вважати цю величину незмінною. Для кожної з трьох дослідних ділянок та для кожної досліджуваної рослини відношення „стронцій-кальцій” відрізняється від середнього значення цього параметра для ґрунтового розчину не більше, ніж на 30%, тобто змінюється приблизно в тих самих межах. Отримані результати дозволяють зробити висновок, що величина відношення „стронцій-кальцій” у ґрунтовому розчині є достатньо адекватним критерієм для передбачення величини цього відношення в рослині. Надходження кальцію до різних видів рослин різне, а тому вміст стронцію у різних рослинах, що вирости одночасно на даній ділянці, теж може бути різним. Вміст стронцію у рослинах одного виду, що вирости на даній ділянці в різний час, теж може бути різним, якщо відрізняється вміст кальцію в цих рослинах.

На відміну від стронцію, вміст ^{137}Cs в різних видах рослин, що вирости одночасно на даній ділянці, однаковий у межах експериментальної похибки. Однак вміст ^{137}Cs у рослинах одного виду, що вирости на даній ділянці у різний час, може інколи відрізнятися більше ніж у десять разів у залежності від параметрів ґрунтового розчину під час виростання цих рослин. Це було перевірено багато разів для всіх дослідних ділянок та різних видів рослин. Це не може бути зумовлено експериментальною похибкою. Це об'єктивна реальність.

Список використаних джерел

1. Пророк В.В., Булавін Л.А., Агеев В.А., Мельниченко Л.Ю., Липська А.І., Осташко В.В. Закономірності надходження ^{137}Cs з ґрунту до рослини. // Ядерна фізика та енергетика. 2007.-19, №1.-С.115 – 122
2. Пророк В.В., Масон К.Ф.В., Тимофєєв С.Ф., Макаренко Т.І., Мельниченко Л.Ю. Стронцій-кальцієве відношення для стабільних стронцію та кальцію у рослині та у ґрунтовому розчині. //

Вісник Київського університету.
Сер.: Фізико-математичні науки. -
2003.- №1.- С.399-405.

3. Prorok V.V., Mason C.F.V., Ageyev V.A., Ostashko V.V., Melnichenko L.Yu. The Transfer of dissolved ^{137}Cs from soil to plants. // Proceeding of WM'06. Session 66. Tucson (Arizona), 26 February – 2 March 2006. – Tucson, 2006. -WM06/66.html
4. Prister B.S., Perepelyatnikov, G.P., Perepelyatnikova L.V. Countermeasures used in the Ukraine to produce forage and animal food products with radionuclide levels below intervention limits after Chernobyl Accident. // The Science of the Total Environment. - 1993. -137. -P.183-198.
5. Ehlken S., Kirchner G. Seasonal variations in soil-to-grass transfer of fallout strontium and cesium and potassium in North German soils. // J. Environ. Radioact. -1996. -33. -P.147-181.
6. Russell R.S. Deposition of Strontium-90 and its Content in Vegetation and in Human Diet in the United Kingdom // Nature. – 1958. - 182. - P. 834 – 839.
7. Nisbet A.F., Konoplev A.V., Shaw G. et al. Application of Fertilizers and Ameliorants to Reduce Soil to Plant Transfer of Radiocaesium and Radiostrontium in the Medium to Long Term a Summary // The Science of the Total Environment. - 1993. -137. - P. 173 - 182.

Надійшла до редколегії 7.09.07 р.

УДК 519.9

Костянтин В. Усенко¹, канд. фіз-мат. наук,
доцент, Наталія О. Черкашина²

Відносні координата та імпульс пари когерентних електронів

Відносні координати пари електронів внаслідок тотожності частинок означити просто як різницю координат електронів пари не можна, тому потрібне альтернативне означення. В цій роботі на прикладі пари електронів, що знаходяться в когерентних станах, ми доводимо, що існують вимірювані величини, залежні від відносних координат та імпульсів – квадрупольний електричний та дипольний магнітний моменти пари електронів, яким відповідають нецентральні поправки до електромагнітного поля такої пари. Експериментальне визначення таких величин може бути здійснене вимірюванням електромагнітного поля пари електронів, а за результатами їх визначення можна обчислювати відносні координати та імпульси і в такий спосіб надати їм сенс спостережуваних.

Ключові слова: пара когерентних електронів, відносні координати, електромагнітне поле.

¹ E-mail: usenko@univ.kiev.ua

² E-mail: ncherkashyna@ukr.net

Вступ

Останнім часом властивості окремих квантових частинок та малочастинкових систем активно досліджуються у зв'язку з задачами квантової інформації. Головним об'єктом дослідження квантової інформації є квантовий гейт – логічна операція, в основі якої лежить взаємодія двох кубітів. [1,3,4,5,6,7,8,9].

Квантовий гейт, що лежить в основі квантового комп'ютера, може бути реалізований за допомогою переплутаних електронних пар. Найпростіші моделі квантового комп'ютера можуть бути використані для здійснення експериментів над зв'язаними переплутаними квантовими станами. Квантовий комп'ютер дозволяє проводити операції з двобітовими гейтами, в системах з дуже великим часом зсуву фази (тобто часом квантової фазової когерентності). Двобітовий гейт, в свою чергу, може бути реалізований за допомогою дії

Costyantyn V. Usenko¹, candidate of science,
associate professor, Nataliia O. Cherkashyna²

Relative coordinate and momentum of coherent electron pair

It is impossible to define relative coordinates of coherent electron pair as a difference between the coordinates of electrons. That is why we need an alternative definition. In this work we prove the existence of observables which depend on the relative coordinates and momentums. Those observables are quadrupole electric and dipole magnetic moments of coherent electron pair. Non-central corrections of electromagnetic field correspond to these moments. Experimental definition of those values could be held by the measuring of electromagnetic field of coherent electron pair. Relative coordinates and momentums can be calculated by the experimental data. Relative coordinates and momentums obtain the meaning of observables.

Key Words: coherent electron pair, relative coordinates, electromagnetic field.

магнітного резонансу на пару електронних або ядерних спінів [12].

Приділяється чимала увага двоелектронній взаємодії. Двоелектронна взаємодія відбувається за рахунок локального кулонівського відштовхування. Електрони з протилежними спінами розповсюджуються через періодичні структури (кристалічні ґратки, тощо) за допомогою прямого та послідовного двоелектронного тунелювання. Взаємодія між двома електронами може також відбуватись між електронами в сусідніх квантових точках за допомогою міжточкового кулонівського відштовхування [13].

Дослідження спин-орбітальної взаємодії становлять загальнонауковий інтерес [23]. Її загальні властивості можна добре зрозуміти, обмежуючись наближенням, в якому просторова частина хвильової функції кожного з електронів

пари описується гаусовим хвильовим пакетом. Електрони в такому стані отримали назву пари когерентних електронів [2, 7, 8, 10, 11].

Активно досліджуються властивості когерентного стану пари майже вільних електронів, оскільки інтерес становлять властивості систем, що складаються з невеликої кількості носіїв інформації, за які часто обирають електрони. Знайдено умови, за яких кулонівське відштовхування мало впливає на систему, та енергію взаємодії можна розглядати як збурення. Залежність властивостей системи від сумарного спіну є суттєвою, коли відстань між частинками порівняна з невизначеністю координати, а відносний імпульс порівняний з його дисперсією [2, 7].

Специфіка станів тотожних квантових частинок полягає в неможливості безпосереднього вимірювання характеристик кожної окремої частинки. З огляду на це твердження типові для квантової механіки міркування про вимірювання координати або імпульсу окремого електрона потребують певних застережень, оскільки електронів існує багато і всі вони мають утворювати квантову систему зі спільною хвильовою функцією, антисиметричною відносно перестановки довільної пари електронів. Середнє значення оператора координати якогось одного з електронів внаслідок тотожності електронів в точності дорівнює середньому значенню оператора координати будь-якого іншого.

Зазвичай ми можемо не звертати увагу на тотожність далеких один від одного електронів внаслідок того, що їх хвильові пакети локалізовані у просторі, але для таких електронів, що мають хвильові пакети з перекриттям, питання про визначення положення кожного з електронів лишається невирішеним.

В задачах квантової статистичної механіки питання про координати окремого електрона зазвичай виноситься за межі досліджень, тим більше що кількість електронів в термодинамічній межі прямує до нескінченності. Натомість розподіл електронів може характеризуватись дво- або більше-частинковими кореляційними функціями.

В задачах розсіювання питання про координати окремих частинок ховається за міркуваннями про напрямки розсіювання – вважається, що за межами області взаємодії перекриття хвильових пакетів електронів зникає.

За межами названого лишається невелике коло задач, подібних до руху пари вивільнених подвійною іонізацією електронів, які використовують уявлення про координати та імпульси окремих електронів.

Зазвичай вважається, що для пари електронів можна означити оператори положення та імпульсу центра мас і подібні до них оператори відносної відстані та відносного імпульсу $\hat{x} = x_1 - x_2$, $\hat{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $\hat{p} = \frac{p_1 - p_2}{2}$, $\hat{P} = p_1 + p_2$, але обидва набори величин використовують для свого означення окремі оператори для координати та імпульсу одного та другого електронів.

Наслідком такої спроби означення є відсутність змістовних можливих середніх значень для відносної координати і відносного імпульсу, оскільки внаслідок тотожності частинок середні значення відповідних операторів обертаються на нуль навіть в тому випадку, коли з фізичних міркувань легко здогадатись, що відстань між електронами є достатньо великою. Таким чином, залишається не дослідженою проблема фізичного тлумачення операторів відносних координат та імпульсів, як спостережуваних величин пари електронів.

В квантовій механіці спостережувані величини або безпосередньо вимірюються, або обчислюються за значеннями безпосередньо вимірюваних спостережуваних. Наприклад, імпульс електрона може бути виміряний шляхом пружного розсіювання з передачею імпульсу фотону. В цій роботі на прикладі пари електронів ми доводимо, що існують вимірювані величини, залежні від відносних координат та імпульсів – квадрупольний електричний та дипольний магнітний моменти пари електронів, яким відповідають нецентральні поправки до електромагнітного поля такої пари. Експериментальне визначення таких величин може бути здійснене вимірюванням електромагнітного поля пари електронів, а за результатами їх визначення можна обчислювати відносні координати та імпульси і в такий спосіб надати їм сенсу спостережуваних.

1. Постановка задачі

Надалі ми вважатимемо, що стан кожного з електронів, якби він був окремим, був би когерентним і характеризувався б гаусівським хвильовим пакетом

$$\varphi(\vec{p}_1, \vec{r}_1; \vec{p}_{01}, \vec{r}_{01}) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi(1+\omega^2(t-t_0)^2)}}\right)^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_{01} - \frac{\vec{p}_{01}}{m}(t-t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1+\omega^2(t-t_0)^2)} + i\frac{\vec{p}_{01}\vec{r}_1}{\hbar}\right),$$

$$\varphi(\vec{p}_2, \vec{r}_2; \vec{p}_{02}, \vec{r}_{02}) = \frac{1}{\left(\sqrt{\sigma\sqrt{2\pi(1+\omega^2(t-t_0)^2)}}\right)^3} \exp\left(-\frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_{02} - \frac{\vec{p}_{02}}{m}(t-t_0)\right)^2}{4\sigma^2(1+\omega^2(t-t_0)^2)} + i\frac{\vec{p}_{02}\vec{r}_2}{\hbar}\right).$$

Тут σ – невизначеність координати, однакова для обох електронних станів. Їй відповідає невизначеність імпульсу $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma}$.

Це спрощення дозволяє повністю обчислити електромагнітне поле розглядуваної пари, а водночас враховує найважливішу властивість хвильових пакетів різних частинок – перекриття хвильових функцій.

Надалі ми використовуватимемо систему координат центру мас. В ній центри пакетів відхилені від початку координат на однакову відстань в протилежні боки $\vec{r}_0 = \vec{r}_{01} = -\vec{r}_{02}$, $\vec{p}_0 = \vec{p}_{01} = -\vec{p}_{02}$.

Внаслідок тотожності спільна хвильова функція пари електронів є антисиметричною комбінацією одночастинкових хвильових пакетів:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1) - \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1-N^2}}$$

для електронів, спіни яких паралельні, або симетричною комбінацією одночастинкових хвильових пакетів:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\varphi_1(\vec{r}_2)\varphi_2(\vec{r}_1) + \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1+N^2}}$$

для електронів, спіни яких антипаралельні.

Тут через N позначено інтеграл перекриття. Величина цього інтегралу швидко спадає від одиниці, як тільки відстань між центрами хвильових пакетів або відносний імпульс перевищують відповідну міру невизначеності.

Параметри двочастинкової хвильової функції, що становлять інтерес для нас, є величини $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$, оскільки неможливо визначити величини $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$, $\vec{p}_{01}$, $\vec{p}_{02}$, що стосуються кожного з електронів, коли мова йде про стан пари.

Середнє значення оператора координати першого або другого електрону, так само як і операторів імпульсу, обертається на нуль, тому їх різниця, що мала б відповідати за відносну координату або відносний імпульс, тотожно дорівнює нулю – через тотожність електронів.

Таким чином, виникає проблема спостережуваності відносних координат та імпульсу. Внутрішні властивості пари електронів (як і всі інші властивості), проявляються в електромагнітній взаємодії системи електронів з оточенням. Тому з'ясування питання про спостережуваність відносних координат та імпульсу можна здійснити, якщо дослідити електромагнітне поле такої пари електронів. Це поле повністю визначається, наприклад, значенням вектор-потенціалу, але повний його розрахунок супроводжується обчислювальними складностями.

Основна задача полягає у тому, щоб віднайти такі характеристики пари когерентних електронів, які можна було би трактувати, як відстань між частинками, або спостережувані величини, за допомогою яких можна визначити відносні координату та імпульс.

Якщо мова йде про класичну пару електронів, то їх характеристикою є електромагнітне поле, ними створене. Це поле визначається координатами та імпульсами частинок. За розподілом скалярного потенціалу можна визначити координати, а з розподілу векторного потенціалу напрямок вектора швидкості. Для частинок, що мають квантові властивості, такі твердження справедливі лише в тому випадку, коли невизначеності координат та імпульсів є незначними, а самі частинки можна вважати майже класичними. Для того, щоб застосувати такі міркування до квантової пари електронів, потрібно з'ясувати, чи можна визначати відносні координати та імпульси і за характеристиками поля. Далі показано, що за

допомогою застосування властивостей поля до визначення відносних координат та імпульсів квантової пари електронів, їх величини можна отримати з точністю до знака.

Вплив невизначеності координати та імпульсу кожного з електронів можна дослідити, обчисливши магнітний та квадрупольний моменти електромагнітного поля цієї пари електронів. Тому для того, щоб описувати пару когерентних електронів за допомогою спостережуваних, розглянемо електромагнітне поле. Характеристики цього поля, такі, як магнітний момент та квадрупольний електричний момент, є спостережуваними. За їх допомогою можна вирахувати відносні координату та імпульс. Таким чином, показати, що вони є спостережуваними.

2. Хвильова функція пари когерентних електронів

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = |\Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0)|^2, \quad (2)$$

$$j(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) = \frac{1}{mc} \cdot \frac{1}{2} \left[\int \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) \nabla \Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) d^3r + \int \Psi(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) \nabla \Psi^*(\vec{r}, \vec{r}_0, \vec{p}_0) d^3r \right]. \quad (3)$$

Такі розподіли імовірностей характеризуються невизначеностями координати σ_x та імпульсу σ_p . Користуючись співвідношенням невизначеностей Гайзенберга, яке для когерентних станів є мінімальним в певний момент часу, можемо записати:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}, \quad (4)$$

звідки невизначеність координати $\sigma_x = \frac{\hbar}{2\sigma_p}$.

$$\Psi(\vec{r}, \vec{p}_0) = \frac{1}{(\sqrt{\sigma} \sqrt{2\pi})^3} \exp \left(-\frac{\vec{r}^2}{4\sigma^2} + i \frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar} \right). \quad (5)$$

Величина $\vec{p}_0$ для вільної частинки характеризує швидкість її руху $\vec{V} = \frac{\vec{p}_0}{m}$, що буде визначати векторний потенціал електромагнітного поля.

Хвильова функція пари когерентних електронів є комбінацією добутків хвильових функцій кожного з електронів. У випадку, коли електрони мають антисиметричні спіни, хвильова функція повинна бути симетричною комбінацією, а у випадку, коли спіни паралельні – антисиметричною комбінацією. Можемо вирахувати середні значення координат:

$$\langle \vec{r}_1 \rangle + \langle \vec{r}_2 \rangle = \langle \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \rangle.$$

Досліджуючи електромагнітне поле когерентного електрона, (а також пари когерентних електронів), ставимо за мету дослідження впливу невизначеностей координати та імпульсу вільної частинки. Враховуючи це, бачимо, що плоска хвиля як інструмент для опису стану когерентного електрона, нас не влаштовує. Це ж саме стосується і функцій, локалізованих у просторі, що мають вигляд типу $\delta(x - x_0(t))$. Замість таких функцій, будемо розглядати суперпозицію плоских хвиль:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \Psi(p) \exp \left(i \frac{px}{\hbar} \right) dp. \quad (1)$$

Амплітуди імовірностей $\Psi(x)$ та $\Psi(p)$ дають у результаті гаусів розподіл імовірностей координати та імпульсу відповідно:

Залежність хвильового пакету від часу така, що рівність (4) порушується, тобто хвильовий пакет з часом "розпливається".

Розглядаючи електрон в момент кульмінації (тобто в момент часу $t = t_0$), отримаємо таке значення хвильової функції когерентного електрона:

антисиметричною комбінацією (відповідно до принципу Паулі).

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\Psi_1(\vec{r}_2)\Psi_2(\vec{r}_1) - \Psi_1(\vec{r}_1)\Psi_2(\vec{r}_2)}{\sqrt{1 \pm N^2}}, \quad (6)$$

де N – інтеграл перекривання, що представляє собою скалярний добуток хвильових функцій, визначається наступним чином:

$$N = \int \Psi_1^*(r) \Psi_2(r) d^3r = \langle \Psi_1(r) | \Psi_2(r) \rangle. \quad (7)$$

Отже, можемо визначити параметр, який в класичній механіці є середнім значенням координати центра мас.

Підставивши вирази для хвильових функцій кожного з електронів в (6), та обираємо систему відліку, що співпадає з системою центра мас. Отже, $\vec{r}_{01} = \vec{r}_0$, $\vec{r}_{02} = -\vec{r}_0$, $\vec{p}_{01} = -\vec{p}_0$, $\vec{p}_{02} = \vec{p}_0$, а

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm N^2}} \frac{1}{\left(\sigma \sqrt{2\pi(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} \right)^3} \cdot \left[\exp \left(-\frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0) \right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} - \frac{\left(\vec{r}_2 + \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0) \right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} + i \frac{\vec{p}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\hbar} \right) \pm \exp \left(-\frac{\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0) \right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} - \frac{\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_0 - \frac{\vec{p}_0}{m}(t - t_0) \right)^2}{4\sigma^2(1 + \omega^2(t - t_0)^2)} - i \frac{\vec{p}_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\hbar} \right) \right] \quad (8)$$

$$\text{де } N = \exp \left(-\frac{2p_0^2 \sigma^2}{\hbar^2} - \frac{r_0^2}{2\sigma^2} \right).$$

Хочемо довести, що параметри $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$ набувають значень відносної координати та відносного імпульсу пари когерентних електронів відповідно. Але характеристики двочастинкової хвильової функції $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$ не можна вважати за середні значення відносних координати та імпульсу, оскільки їх середні значення набувають нульового значення для пари когерентних електронів внаслідок їх тотожності.

Розглядатимемо пару когерентних електронів, як і окремий когерентний електрон, в момент кульмінації, тобто в момент часу $t = t_0$.

$$\langle \vec{m} \rangle = \frac{e_0}{2c} \int \Psi^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) [\vec{r}_1 \times \vec{V}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{V}_2] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2,$$

де $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ - хвильова функція пари когерентних електронів.

Для середнього значення магнітного моменту маємо:

$$\langle \vec{m} \rangle = \frac{e_0}{cm} \frac{1}{1 \mp N^2} \vec{r}_0 \times \vec{p}_0,$$

де N - інтеграл перекриття, а знаки $-$ чи $+$ в знаменнику відповідають випадкам паралельних та антипаралельних спінів відповідно. Квантові властивості системи проявляються лише з урахування цього знаменника. Коли значення інтегралу перекриття прямує до нуля, середнє значення магнітного моменту набуває значення, яке властиве для пари класичних електронів, а на малих відстанях від системи зарядів, значення магнітного моменту може бути суттєвим.

момент кульмінації $t_{01} = t_{02} = t_0$. Тоді хвильова функція набуває наступного вигляду:

3. Моменти електромагнітного поля, створеного парою когерентних електронів

3.1 Магнітний момент магнітного поля пари когерентних електронів

Як відомо, значення магнітного моменту розраховується за формулою:

$$\vec{m} = \frac{e_0}{2c} [\vec{r}_1 \times \vec{V}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{V}_2], \text{ де } \vec{V}_1 \text{ та } \vec{V}_2 -$$

швидкості. У випадку квантової системи, для визначення співвідношення між спостережуваними величинами, вирахуємо квантовомеханічне середнє значення магнітного моменту:

3.2 Квадрупольний момент електричного поля пари когерентних електронів

Скалярний потенціал електромагнітного поля на великій відстані від системи зарядів можна представити у вигляді:

$$\varphi(r) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, \quad (9)$$

де

$$\varphi^{(0)} = \frac{\Sigma q_i}{r};$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{p} = \Sigma q_i \vec{r}_i;$$

$$\varphi^{(2)} = \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha, \beta} \frac{x^\alpha x^\beta}{r^5},$$

$$D_{\alpha, \beta} = \sum_i q_i (3x_i^\alpha x_i^\beta - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

$\varphi^{(1)}$ - дипольний момент, $\varphi^{(2)}$ - квадрупольний момент. В нашому випадку, для пари електронів $\varphi^{(1)} = 0$, оскільки частинки тотожні. Отже, потенціал електромагнітного поля набуває вигляду:

$$\varphi(r) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(2)}.$$

У випадку, коли поле спостерігають на великій відстані від системи зарядів, тобто при

$r \gg r_0$, або $r \gg p_0 \frac{\sigma^2}{\hbar}$, скалярний потенціал можна представити у вигляді:

$$\varphi(r) = \frac{2e_0}{r} + D_{\alpha\beta} \frac{n^\alpha n^\beta}{r^3}.$$

Нагадаємо, що для системи класичних частинок квадрупольний момент визначається наступним чином:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i q_i (3x_i^\alpha x_i^\beta - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (9a)$$

Для випадку довільної взаємної орієнтації векторів $\vec{p}_0$ та $\vec{r}$ ($\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$, $\vec{r}_0 = (0, 0, r_0)$), вирахуємо компоненти тензора квадрупольного моменту електромагнітного поля.

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & 0 & D_{xz} \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ D_{xz} & 0 & D_{zz} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

при цьому $D_{xx} = D_{zz}$.

Ненульові компоненти тензора визначаються наступним чином:

$$D_{xx} = \int \rho(x, y, z) (2x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz, \quad (15)$$

$$D_{yy} = \int \rho(x, y, z) (2y^2 - x^2 - z^2) dx dy dz, \quad (16)$$

$$D_{zz} = \int \rho(x, y, z) (2z^2 - x^2 - y^2) dx dy dz, \quad (17)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = \int \rho(x, y, z) xz dx dy dz, \quad (18)$$

де $\rho(x, y, z)$ - густина імовірності.

пов'язана з системою координат пари когерентних електронів):

Явний вигляд компонент тензора квадрупольного моменту (в системі відліку, що

$$D_{xx} = \frac{2N^2 \left(\frac{4\sigma^4}{\hbar^2} (p_{0z}^2 - 2p_{0x}^2) \right) - 2r_0^2}{1 \pm N^2}, \quad (10)$$

$$D_{yy} = \frac{2N^2 \left(\frac{4\sigma^4}{\hbar^2} (p_{0z}^2 + p_{0x}^2) \right) - 2r_0^2}{1 \pm N^2}, \quad (11)$$

$$D_{zz} = \frac{2N^2 \left(\frac{4\sigma^4}{\hbar^2} (p_{0z}^2 - 2p_{0x}^2) \right) + 4r_0^2}{1 \pm N^2}, \quad (12)$$

$$D_{xz} = D_{zx} = \frac{-12N^2 \frac{\sigma^2 p_{0x} p_{0z}}{\hbar^2}}{1 \pm N^2}. \quad (13)$$

Розглянемо випадок, коли $N \rightarrow 0$. Це стає можливим за наступних умов: $\frac{4(p_{0x}^2 + p_{0z}^2)\sigma^2}{\hbar^2} \gg 1$, та $-\frac{r_0^2}{\sigma^2} \gg 1$, тобто коли

$$r_0 \gg \sigma \text{ та } (p_{0x}^2 + p_{0z}^2) \gg \sqrt{\frac{\hbar}{4\sigma}}.$$

При виконанні цих умов, скориставшись (10)-(13), отримаємо наступні вирази для

спостережуваної r_0 через компоненти тензора квадрупольного моменту:

$$r_0 = \sqrt{-\frac{D_{xx}}{2}} = \sqrt{-\frac{D_{yy}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{D_{zz}}. \quad (19)$$

Для того, аби визначити спостережувані p_{0x} та p_{0z} , розглянемо випадок, коли $N \rightarrow 1$. Це є

можливим, коли $\frac{4(p_{0x}^2 + p_{0z}^2)\sigma^2}{\hbar^2} \ll 1$ та

$-\frac{r_0^2}{\sigma^2} \ll 1$, тобто за умов $(p_{0x}^2 + p_{0z}^2) \ll \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$ та

$r_0 \ll \sigma$. За цих умов, для спостережуваних p_{0x} та p_{0z} з (15)-(18) отримаємо наступні вирази:

$$D = D_{zz} \cos^2(\vartheta) + (D_{xx} \cos^2(\varphi) + D_{yy} \sin^2(\varphi)) \sin^2(\vartheta) + 2D_{xz} \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \cos(\varphi). \quad (22)$$

Вираз для квадрупольного моменту (в сферичних координатах, початок яких розташований в центрі системи зарядів) можемо записати наступним чином:

$$p_{0x} = \frac{\hbar}{2\sigma^2} \sqrt{-\frac{D_{zz} + 2D_{xx}}{3}}, \quad (20)$$

$$p_{0z} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{D_{zz}}{\sqrt{-(D_{zz} + 2D_{xx})}}. \quad (21)$$

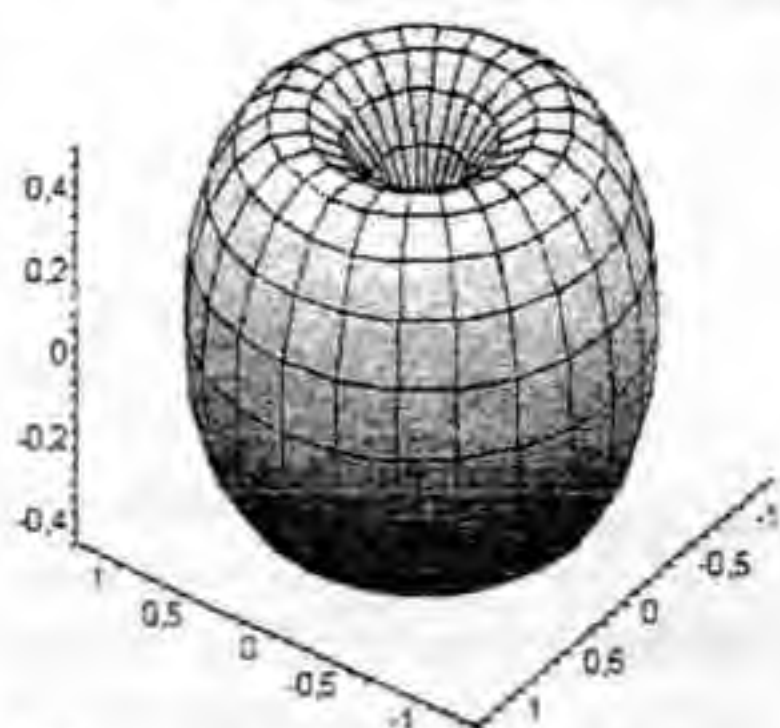


Рис.1. Поверхня квадрупольного моменту за умови $\vec{r}_0 \parallel \vec{p}_0$, $r_0 = 0.42$, $p_0 = 0.3$.

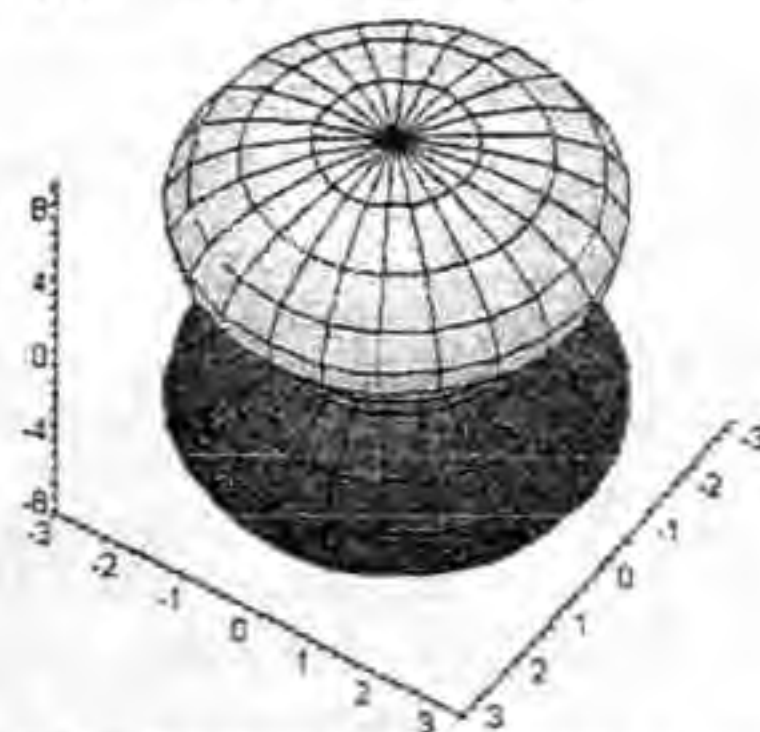


Рис.3. Поверхня квадрупольного моменту за умови $r_0 = 0.42$, $p_0 = 0$.

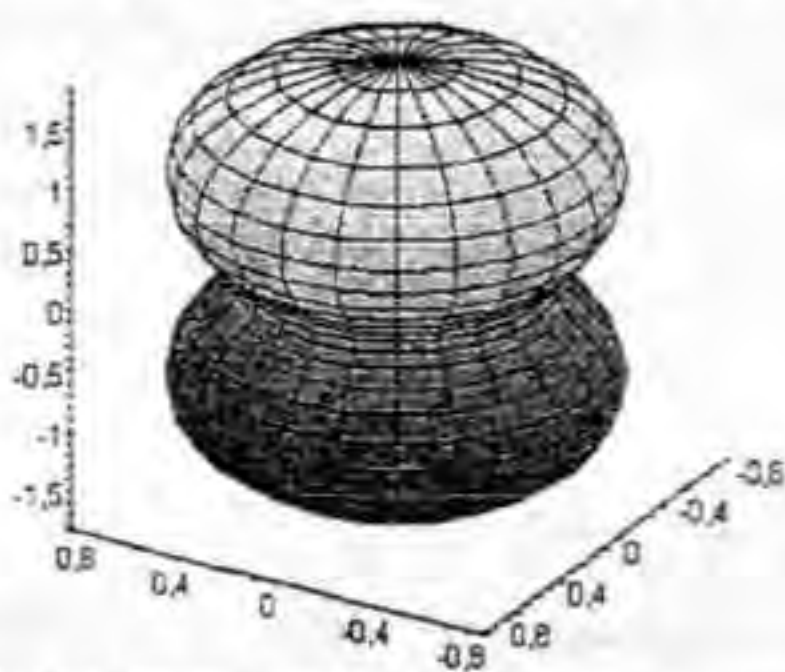


Рис. 2. Поверхня квадрупольного моменту за умови $\vec{r}_0 \parallel \vec{p}_0$, $r_0 = 0.42$, $p_0 = 0.23$.

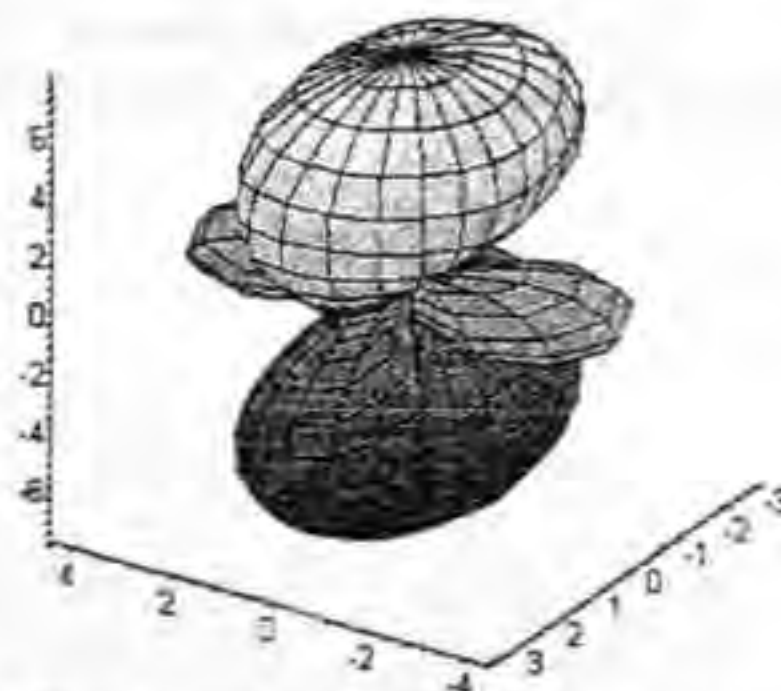


Рис. 4. Поверхня квадрупольного моменту за умови $\vec{r}_0 \perp \vec{p}_0$, $r_0 = 0.7$, $p_0 = 0.4$.

Висновки

Результати проведених досліджень свідчать, що зв'язок між квадрупольним електричним та магнітним моментом і відносними координатою та імпульсом є властивими і для пари електронів, поки невизначеності координати та імпульсу залишаються малими порівняно з їх значеннями. На малих відстанях від системи зарядів значення магнітного моменту може бути суттєвим. Відхилення квадрупольного моменту пари когерентних електронів від квадрупольного моменту для пари класичних точкових зарядів обумовлені впливом невизначеності координати; та інтерференцією хвильових функцій, що залежить від відносного імпульсу та його невизначеності.

Одним із цікавих наслідків залежності електричного квадрупольного моменту від відносного імпульсу є втрата аксіальної симетрії квадрупольного моменту пари частинок (див. рис.4)

Відносна координата повністю визначають електричний квадрупольний момент класичної пари частинок, а відносний імпульс характеризує їх магнітний момент. Така залежність зберігається і у випадку, коли мова йде про квантові частинки, за умови, що відносні координата та імпульс пари частинок значно перевищують відповідні невизначеності.

Для значень відносних координати та імпульсу, які менші (або порівняні) з їх невизначеностями, залежність залишається, і в цьому разі дозволяє повністю визначити відносні координату та імпульс пари електронів за властивостями квадрупольного електричного та магнітного моментів. Ці величини піддаються вимірюванню, і мають сенс спостережуваних для пари когерентних електронів. Ці величини можна визначити за результатами вимірювання квадрупольного моменту.

Список використаних джерел

1. S.A. Gurvitz, Two-electron correlated motion due to Coulomb repulsion, e-print cond-mat/0203545.
2. Гнатівський В. О., Усенко К. В. УФЖ 2001, 46, №9, с. 999-1006.
3. D. R. Dounas-Frazer and L. D. Carr, Tunneling resonances and entanglement dynamics of cold bosons in the double well, e-print quant-ph/0610166.
4. D. Rohrllich, O. Zarchin, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky, Controlled Dephasing of a Quantum Dot: From Coherent to Sequential Tunneling, e-print cond-mat/0607495.
5. E. Calzetta, E. Verdaguer, J. Phys. A: Math. Gen. 39 9503-9532.
6. X. Hu, B. Koiller, S. Das Sarma, Phys. Rev. B 2005, vol. 23, pp. 235332.1 - 235332.9.
7. F. Verstraete, M. Popp and J. I. Cirac, Phys. Rev. Lett. 92(2): 027901 (2004).
8. Гнатівський В. О., Усенко К. В. УФЖ 2000, 45, №8, с.1009-1014.
9. Лев Е. І., Семенов А. О., Усенко К. В. УФЖ, 2000, 45, №3, с.372-380.
10. S. A. Gurvitz, Phys. Rev. B 56, 15215 (1997).
11. Usenko C. V., Gnatovskyy V. O. Cherkashina N. A. The effect of coordinate and momentum uncertainties on collision of coherent electrons, Optics and Spectroscopy, 2005, Vol. 99. p. 511-513.
12. Cherkashyna N. O., Usenko C. V., Optics and Spectroscopy, 2007, Vol.103, № 3, pp. 318-323.
13. Sangchul Oh and Jaewan Kim, Phys. Rev. B 71, 144523 (2005).

Підписано до друку 12.11.2007

Формат 70 x 100 /16

Папір офсетний

Ум. друк. арк. 26,28

Фіз.друк.арк. 39,58

Наклад 350 прим. Зам. №386

ДП "Інформаційно-аналітичне агентство"
01001, Київ - 1, вул. Еспланадна, 4-6 оф. 419-2.
Тел./факс (044) 287-03-79

Наукова бібліотека
ім. М. Максимовича

КНУ

ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА



12835JB

45 - чит. зал періодики та дисерт. 20.00

