

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2026/1.14>

Олександр ГРИГОРЕНКО¹, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-4109-2672
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

Володимир ТРАЧ², д-р техн. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0001-9500-2743
e-mail: v.m.trach@nuwm.edu.ua

Андрій ПОДВОРНИЙ², д-р техн. наук, доц.
ORCID ID: 0000-0001-8518-4395
e-mail: a.v.podvorniy@nuwm.edu.ua

Наталія ЖУКОВА¹, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.
ORCID ID: 0000-0002-2699-3771
e-mail: zukowa_n@ukr.net

¹Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

²Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН АНІЗОТРОПНИХ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ЗМІННИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Товстостінні циліндричні оболонкові конструкції є важливими елементами різноманітних сучасних інженерних споруд, таких як трубопроводи, резервуари, реакторні установки й аерокосмічні корпуси. Експлуатація цих конструкцій в умовах складного силового або температурного навантаження потребує достовірного аналізу їхнього напружено-деформованого стану, особливо у разі дії розподіленого навантаження, що може змінюватися за коловим напрямком. Подібні впливи можуть бути зумовлені нерівномірним тиском робочого середовища, як-от несиметричний турбулентний потік у трубопроводах або асиметричне аеродинамічне навантаження на корпуси літальних апаратів. Подібні чинники можуть суттєво впливати на міцність, стійкість і довговічність конструкцій.

У пропонованій роботі розглянуто просторовий підхід до розв'язку задачі дослідження напружено-деформованого стану для анізотропної товстостінної циліндричної оболонки з боропластика, на яку діє розподілений тиск, періодично змінний у коловому напрямку. Анізотропія пружних властивостей матеріалу конструкції обумовлена незбігом його власних осей ортотропії із криволінійною системою координат циліндричної оболонки.

Для побудови тривимірної системи диференціальних рівнянь застосовано модифікацію варіаційного принципу Ху – Васілізу. Розв'язок отриманої системи рівнянь здійснюється з використанням аналітичного методу Бубнова – Галеркіна. Згідно з ним усі компоненти напружено-деформованого стану системи рівнянь розкладаються у подвійні ряди Фур'є так, щоб за координатою уздовж твірної оболонки вони задовольняли граничним умовам на торцях, а у коловому напрямку була врахована їхня періодичність. Результуюча система неоднорідних диференціальних рівнянь розв'язується чисельним методом дискретної ортогоналізації. Представлений підхід дає змогу отримати достовірні результати для конструкцій, що функціонують в умовах складного навантаження, і може бути використаний для підвищення їхньої надійності та безпеки.

Ключові слова: товстостінна анізотропна оболонка, просторова постановка, напружено-деформований стан, змінне розподілене навантаження.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74G10, 74G15.

Вступ

Товстостінні циліндричні оболонки є ключовими елементами багатьох інженерних конструкцій, таких як трубопроводи, резервуари, корпуси космічних апаратів та інших споруд, що експлуатуються в умовах силового навантаження або температурного впливу. Дослідження їхнього напружено-деформованого стану (НДС) набуває особливої актуальності у врахуванні змінного в коловому напрямку навантаження, що часто виникає в реальних умовах експлуатації. Такі навантаження, спричинені, наприклад, нерівномірним розподілом тиску, можуть суттєво впливати на міцність, стійкість і довговічність конструкції.

Аналіз НДС товстостінних циліндричних оболонок у просторовій постановці (Григоренко, Василенко, & Панкратова, 1991) дає змогу найповніше врахувати характер деформування та взаємодії напружень, що не завжди можливо забезпечити в межах класичних чи уточнених теорій. Використання просторового підходу є необхідним для забезпечення функціонування конструкцій, особливо в умовах, коли їхнє руйнування може призвести до значних економічних або екологічних наслідків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій вказує на те, що наукові роботи із цієї тематики практично відсутні. У дослідженні (Григоренко, Василенко, & Панкратова, 1991) представлено підхід до розв'язку подібної задачі, але лише для окремих видів граничних умов на торцях циліндричних оболонок.

У представленій роботі автори пропонують підхід до розв'язання задачі про НДС анізотропної циліндричної оболонки (рис. 1) у просторовій постановці, що перебуває в полі дії розподіленого бокового тиску, змінного в коловому напрямку. Матеріалом, з якого виготовлена оболонка, є волокнистий композит – боропластик. Анізотропія пружних властивостей пов'язана з незбігом його власних осей ортотропії з криволінійною системою координат циліндричної оболонки.

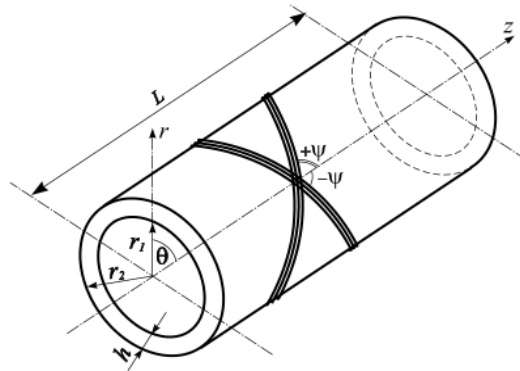


Рис. 1. Нетонка анізотропна циліндрична оболонка

1. Основні означення та результати

Відповідно до варіаційного принципу Ху – Васідзу (Washizu, 1982) з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\Pi_1 = \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} dV + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS_1 - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS_2, \quad (1)$$

можливо здобути необхідні для розв'язку поставленої задачі рівняння рівноваги, співвідношення пружності та граничні умови. У виразі (1), без додаткових умов, варіюються переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} , напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями $\bar{u}_i$. Також у цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $\Psi(u_i)$ – потенціал поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$, де 1 відповідає координаті z , 2 – θ , 3 – r ; V – об'єм матеріалу оболонки.

Згідно з підходом, представленим у (Semenyuk, Trach, & Podvornyi, 2023), використовуючи умову стаціонарності виразу для варіації функціонала (1) та із застосуванням геометричних співвідношень (Novozhilov, 1961), отримано тривимірну систему із шести диференціальних рівнянь рівноваги для циліндричних анізотропних оболонок у частинних похідних виду (Semenyuk, Trach, & Podvornyi, 2023).

2. Доведення

З метою зменшення розмірності здобутої системи рівнянь скористаємося процедурою аналітичного методу Бубнова – Галеркіна (Semenyuk, Trach, & Podvornyi, 2023), відповідно до якого розкладемо функції напружень і переміщень у подвійні тригонометричні ряди Фур'є з урахуванням їхньої періодичності за коловим напрямом, а також уздовж твірної циліндричної оболонки так, щоб вони задовольняли умовам на торцях оболонки.

Після відповідних математичних перетворень отримаємо одновимірну систему диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші:

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r)\bar{y} + f, \quad T(r) = t_{n,l}(r); \quad (n, l = 1 \div 12), \quad (2)$$

де $\bar{y} = \{y_{1,p}; y_{2,p}; y_{3,p}; y_{4,p}; y_{5,p}; y_{6,p}; y_{1,m}'; y_{2,m}'; y_{3,m}'; y_{4,m}'; y_{5,m}'; y_{6,m}'\}$ – розв'язуюча вектор-функція, а f – навантаження, $T(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r , $t_{n,l}(r)$ – ненульові елементи матриці $T(r)$, вони ж є коефіцієнтами за невідомих систем (2).

Систему рівнянь НДС (2) за умовами на торцях оболонки

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0 \quad (3)$$

розв'язуємо з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації (Григоренко, Василенко, & Панкратова, 1991).

3. Приклади

Для представлення можливостей запропонованого підходу розглянемо циліндричну товстостінну анізотропну оболонку, виготовлену з волокнистого композиту – боропластику (рис. 1). Оболонкова конструкція перебуває під дією розподіленого зовнішнього тиску $q = -q_0 \sin(\pi z / L) \cos k\theta$, за $q_0 = 1,0$ МПа та параметра хвилеутворення $k = 4$ за коловим напрямком θ . Осі ортотропії матеріалу боропластику можуть бути повернуті на кут $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$ відносно твірної оболонки (рис. 1). Геометричні параметри циліндра: радіус внутрішньої поверхні $r_1 = 0,54$ м; зовнішньої – $r_2 = 0,66$ м; довжина уздовж твірної $L = 1,2$ м. Механічні характеристики однонапрявленого волокнистого композиту боропластику: $E_{zz} = 280 E_0$; $E_{\theta\theta} = E_{rr} = 31 E_0$; $G_{z\theta} = G_{r\theta} = 10,5 E_0$; $G_{rz} = 21,2 E_0$; $\nu_{\theta z} = 0,25$; $\nu_{z\theta} = 0,0277$; $E_0 = 1000$ МПа.

На рис. 2 представлено залежність величин нормальних напружень $\sigma_{\theta\theta}$ від кута θ на рівні зовнішньої (завантаженої) поверхні оболонки. Крива 1 відповідає куту $\psi = 0^\circ$, крива 2 для $\psi = 30^\circ$, 3 – $\psi = 60^\circ$, 4 – $\psi = 90^\circ$.

З аналізу результатів, наведених на рис. 2, бачимо, що зміна величин нормальних напружень $\sigma_{\theta\theta}$ за коловим напрямком на зовнішній навантаженій поверхні оболонки відбувається циклічно відповідно до параметру хвилеутворення k

та залежить від величини кута повороту ψ головних напрямів пружності волокнистого матеріалу конструкції. Показано, що за кута $\psi = 0^\circ$ величини $\sigma_{\theta\theta}$ набувають мінімальних значень, зростаючи за збільшення кута ψ . Розбіжність між мінімальними величинами $\sigma_{\theta\theta}$ за $\psi = 0^\circ$ та максимальними за $\psi = 90^\circ$ досягає 43 %.

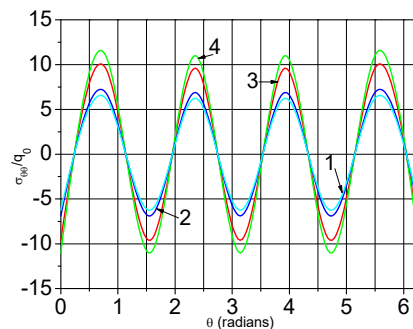


Рис. 2. Графік залежності нормальних напружень $\sigma_{\theta\theta}$ від кулової координати θ

Дискусія і висновки

У пропонуваній роботі шляхом модифікації варіаційного принципу Ху – Васіду отримано тривимірну систему диференціальних рівнянь рівноваги в частинних похідних, що описують напружено-деформований стан анізотропних товстостінних циліндричних оболонок. Для приведення такої системи рівнянь до одновимірної використано процедуру аналітичного методу Бубнова – Галеркіна. Розв'язок одновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь напружено-деформованого стану в нормальній формі Коші здійснюється за радіальним напрямком циліндра за використання чисельного методу дискретної ортогоналізації.

Розглянуто зміну одного з параметрів напружено-деформованого стану за куловим напрямком анізотропної товстостінної циліндричної оболонки для різних кутів повороту головних напрямів пружності попередньо ортотропного волокнистого матеріалу конструкції.

Внесок авторів: Олександр Григоренко – концептуалізація, методика, збір і перевірка емпіричних даних, емпіричне дослідження; Володимир Трач – концептуалізація, методика, збір і перевірка емпіричних даних, емпіричне дослідження; Андрій Подворний – програмне забезпечення, емпіричне дослідження; Наталія Жукова – програмне забезпечення, аналіз джерел, підготовка огляду літератури.

Джерела фінансування: Дослідження було проведено власним коштом авторів.

Список використаних джерел

- Григоренко, Я. М., Василенко, А. Т., & Панкратова, Н. Д. (1991). *Задачи теории упругости неоднородных тел*. Наукова думка.
 Novozhilov, V. V. (1961). *Theory of elasticity*. Elsevier.
 Semenyuk, N. P., Trach, V. M., & Podvornyi, A. V. (2023). Stress-strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. *International Applied Mechanics*, 59(1), 79–89. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01201-5>
 Washizu, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press. <https://doi.org/10.1002/zamm.19840640121>

References

- Grigorenko, Y. M., Vasilenko, A. T., & Pankratova, N. D. (1991). *Problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies*. Naukova dumka [in Russian].
 Novozhilov, V. V. (1961). *Theory of elasticity*. Elsevier.
 Semenyuk, N. P., Trach, V. M., & Podvornyi, A. V. (2023). Stress-strain state of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. *International Applied Mechanics*, 59(1), 79–89. <https://doi.org/10.1007/s10778-023-01201-5>
 Washizu, K. (1982). *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press. <https://doi.org/10.1002/zamm.19840640121>

Отримано редакцією журналу / Received: 24.12.25

Прорецензовано / Revised: 17.03.26

Схвалено до друку / Accepted: 16.04.26

Опубліковано / Published: 05.06.26

Alexander GRIGORENKO¹, DSc (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4109-2672
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com

Volodymyr TRACH², DSc (Engin.), Prof.
ORCID ID: 0000-0001-9500-2743
e-mail: v.m.trach@nuwm.edu.ua

Andrii PODVORNYI², DSc (Engin.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0001-8518-4395
e-mail: a.v.podvornyi@nuwm.edu.ua

Natalia ZHUKOVA¹, PhD (Phys. & Math.), Senior Research
ORCID ID: 0000-0002-2699-3771
e-mail: zukowa_n@ukr.net

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kyiv, Ukraine

²National University of Water and Environmental Engineering, Rivne, Ukraine

STRESS-STRAIN STATE OF ANISOTROPIC THICK-WALLED CYLINDRICAL SHELLS UNDER VARIABLE LOADING

Thick-walled cylindrical shell structures are essential components of various modern engineering systems, including pipelines, storage tanks, reactor installations, and aerospace bodies. The operation of such structures under complex mechanical or thermal loading requires reliable analysis of their stress-strain state, particularly in the presence of distributed loads varying along the circumferential direction. Such effects may arise from non-uniform working medium pressure, for example, asymmetric turbulent flow in pipelines or asymmetric aerodynamic loads acting on aerospace hulls. These factors can significantly influence the strength, stability, and service life of the structures.

This study presents a three-dimensional approach to the analysis of the stress-strain state of an anisotropic thick-walled cylindrical boroplastic shell subjected to distributed pressure periodically varying in the circumferential direction. The anisotropy of the elastic properties of the material is determined by the misalignment of its orthotropy axes with the curvilinear coordinate system of the cylindrical shell.

To derive the three-dimensional system of differential equations, a modification of the Hu – Washizu variational principle is applied. The resulting system is solved using the analytical Bubnov – Galerkin method. Within this framework, all stress-strain components are expanded into double Fourier series, ensuring that the longitudinal coordinate satisfies boundary conditions at the shell ends, while circumferential periodicity is preserved. The final system of nonhomogeneous differential equations is solved numerically using the discrete orthogonalization method.

The proposed approach provides accurate results for structures operating under complex loading conditions and can be effectively applied to improve their reliability and safety.

Keywords: *thick-walled anisotropic shell, three-dimensional formulation, stress-strain state, variable distributed load.*

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.