

УДК 536.2

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2026/1.19>

Генадій МІШУРІС¹, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0003-2565-1961
e-mail: ggim@aber.ac.uk

Юрій ПРОЦЕРОВ², канд. фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0009-0009-2659-2802
e-mail: protserov@onu.edu.ua

Наталія ВАЙСФЕЛЬД³, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0001-8082-2503
e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

Зінаїда ЖУРАВЛЬОВА², канд. фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0000-0002-3271-8864
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

¹Університет Абериствіта, Абериствіт, Сполучене Королівство
²Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
³Кінгс-коледж Лондон, Лондон, Сполучене Королівство

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРУ З НЕІДЕАЛЬНИМИ УМОВАМИ КОНТАКТУ МІЖ ЙОГО ШАРАМИ

Розглянуто задачу теплопровідності для багат шарового циліндра з урахуванням впливу міжфазних контрастів, що істотно змінюють механізми теплоперенесення й ускладнюють визначення ефективної теплопровідності. Метою дослідження є отримання неідеальних умов контакту між шарами для різних порядків коефіцієнтів теплопровідності за наявності прошарку. На основі асимптотичного підходу виведено три типи умов спряження, що відповідають характерним режимам взаємодії шарів. Запропонований метод забезпечує можливість коректного опису ключових теплових і механічних ефектів за допомогою спрощених співвідношень, придатних для подальших інженерних застосувань.

Ключові слова: складений циліндр, теплопровідність, неідеальні умови спряження.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 80A11, 74A15.

Вступ

Наявність прошарків та інтерфейсів у багат шарових матеріалах суттєво змінює механізми теплоперенесення й ускладнює опис ефективної теплопровідності. На відміну від однорідних тіл, де теплопровідність визначається лише внутрішніми властивостями матеріалу, у шарованих структурах важливу роль відіграють термічний опір межі, мікроструктура інтерфейсів, а також можливі дефекти та неоднорідності на контакт. У сучасних композитах, тонкоплівкових системах і наноструктурах інтерфейсний тепловий опір часто стає домінуючим фактором, що визначає теплову поведінку всієї системи.

Дослідження у цьому напрямку виконувалися багатьма авторами, переважно в межах спрощених постановок, представлених у класичних монографіях (Коваленко, 1965; Nowacki, 1975). Попри здобуті результати, питання коректного формулювання умов спряження за наявності контрастних властивостей у шарованих структурах залишалося відкритим. Наявні роботи переважно ґрунтувалися на підходах класичної теорії пружності, зокрема на результатах, отриманих у працях (Bigoni et al, 1998; Mishuris et al, 2006; Dumont et al, 2022) та подальших дослідженнях, присвячених інтерфейсним ефектам.

Мета запропонованої роботи полягає у врахуванні неідеальних умов контакту, що виникають унаслідок температурних недосконалостей, та у виведенні й подальшому аналізі практично значущих умов спряження між шарами. У межах задачі теплопровідності для складеного циліндра отримано три типи умов спряження, що відповідають різним порядкам співвідношень коефіцієнтів теплопровідності шарів і властивостей міжфазного прошарку між ними.

1. Основні результати

Розглянемо в циліндричній системі координат циліндр, що складається із трьох шарів:

$$\Omega_1: 0 \leq r < R, -H_1 < z < -h/2; \Omega_0: 0 \leq r < R, -h/2 < z < h/2; \Omega_2: 0 \leq r < R, h/2 < z < H_2,$$

де $h \ll H_1, H_2$ товщина міжфазного включення.

Через u_j, k_j позначимо температуру та коефіцієнти теплопровідності в областях $\Omega_j, j = 0, 1, 2$. Функції u_j мають задовольняти рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} = 0, (r, z) \in \Omega_j. \quad (1)$$

Граничні умови, не обмежуючи загальності міркувань, вважаємо такими: циліндрична поверхня $r = R$ циліндра та його нижня основа $z = -H_1$ є теплоізовольовані, а на верхній основі $z = H_2$ задано температуру

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, j = 0, 1, 2; \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-H_1} = 0; u_2 \Big|_{z=H_2} = f(r). \quad (2)$$

Умовами спряження шарів циліндру будуть рівність температур і теплових потоків на їхніх спільних границях

$$u_1 \Big|_{z=-h/2} = u_0 \Big|_{z=-h/2}, k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} \text{ та } u_2 \Big|_{z=h/2} = u_0 \Big|_{z=h/2}, k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} \Big|_{z=h/2}. \quad (3)$$

В області Ω_0 введемо нову змінну $\zeta = \frac{z}{\varepsilon}$, де ε – мала величина, $\zeta \in (-h_0/2; h_0/2)$, $h_0 = \frac{h}{\varepsilon}$, та розглянемо рівняння відносно $u_0(r, \zeta)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} = 0, 0 \leq r < R, -h_0/2 < \zeta < h_0/2.$$

© Мішуріс Генадій, Процеров Юрій, Вайсфельд Наталія, Журавльова Зінаїда, 2026

Ураховуючи аналіз порядків його членів відносно нової змінної, отримуємо, що $\frac{\partial^2 u_0}{\partial \zeta^2} = 0$, звідки $\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} = A(r)$ та $u_0(r, \zeta) = A(r)\zeta + B(r)$. Умови спряження (3) перепишемо так:

$$u_0|_{\zeta=-h_0/2} = u_1|_{z=-h/2}; u_0|_{\zeta=h_0/2} = u_2|_{z=h/2} \text{ та } \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2}; \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=h_0/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}. \quad (4)$$

Розглянемо три випадки умов спряження залежно від порядків співвідношення коефіцієнтів теплопровідності k_0 і k_1, k_2 шарів циліндру.

I випадок. Коефіцієнт теплопровідності k_0 має порядок, що дорівнює порядкам коефіцієнтів k_1, k_2 . Зобразимо функцію $u_0(r, \zeta)$ як асимптотичний ряд за ступенями ε : $u_0 = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$.

Розглянемо спочатку другу умову спряження із (4)

$$\frac{k_0}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \dots \right) |_{\zeta=h_0/2} = k_2 \frac{\partial v_2}{\partial z}|_{z=h/2}; \frac{k_0}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \dots \right) |_{\zeta=-h_0/2} = k_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}|_{z=-h/2}.$$

У правих частинах містяться величини порядку $O(1)$, отже $\frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} = 0$. Звідси $A(r) = 0$ і $u_0 = (r, \zeta) = B(r)$. З урахуванням цього маємо, що стрибок температури $\langle u_0 \rangle = u_0|_{\zeta=-h_0/2} - u_0|_{\zeta=h_0/2} = 0$ з першої з умов (4) $u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2}$. Це надає першу з умов ідеального теплового контакту – рівність температур.

Рівняння теплопровідності (1) для цього випадку записано у формі

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Ураховуючи порядки величин доданків, маємо $\frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} = 0$, звідки $\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} = C(r)$ і

$$\frac{\partial u_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} = \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} = C(r).$$

З огляду на це стрибок теплового потоку

$$\left\langle \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right\rangle = \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} - \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=h_0/2} = 0.$$

Із другої з умов (4) отримано, що $k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}$. Це є другою умовою ідеального теплового контакту – рівність теплових потоків.

Отже, випадок I зводиться до умов класичного ідеального теплового контакту

$$u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2}; k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}. \quad (5)$$

II випадок. Нехай тепер коефіцієнт теплопровідності k_0 має порядок набагато менший ніж порядки коефіцієнтів k_1, k_2 , тобто $k_0 = \varepsilon k$, де k має порядок, такий як і коефіцієнти k_1, k_2 .

З умови (4) для теплових потоків знаходимо

$$\varepsilon k \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \dots \right) |_{\zeta=-h_0/2} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2}; \varepsilon k \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \dots \right) |_{\zeta=h_0/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}.$$

І з урахуванням того, що $\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} = A(r)$, отримуємо $k \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} = kA(r) = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2}$, звідки

$$A(r) = \frac{k_1}{k} \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} \text{ або } A(r) = \frac{k_2}{k} \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}.$$

Отже, стрибок температури набуває вигляду

$$\langle u_0 \rangle = u_0|_{\zeta=h_0/2} - u_0|_{\zeta=-h_0/2} = A(r) \frac{h_0}{2} + B(r) + A(r) \frac{h_0}{2} - B(r) = A(r)h_0 = \frac{k_1}{k} h_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2},$$

де величина $\frac{k_1}{k} h_0 = \frac{\varepsilon k_1}{k_0} \frac{h}{\varepsilon} = \frac{k_1 h}{k_0}$ має порядок $O(1)$. Ураховуючи тепер першу з умов (4), отримаємо першу умову спряження

$$u_2|_{z=h/2} - u_1|_{z=-h/2} = \frac{k_1 h}{k_0} \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} \text{ або } u_2|_{z=h/2} - u_1|_{z=-h/2} = \frac{k_2 h}{k_0} \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}.$$

Для одержання другої умови спряження розглянемо стрибок теплового потоку

$$\langle k_0 \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \rangle = \langle k \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} \rangle = k \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} - k \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=h_0/2} = kA(r) - kA(r) = 0.$$

Тоді з другої умови (4) отримуємо, що $k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}$. Зауважимо, що ця умова також впливає з попереднього спряження. Отже, другий випадок зводиться до таких умов спряження:

$$u_2|_{z=h/2} - u_1|_{z=-h/2} = \frac{k_1 h}{k_0} \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2}; k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}. \quad (6)$$

III випадок. Коефіцієнт теплопровідності k_0 має порядок набагато більший ніж порядки коефіцієнтів k_1, k_2 , тобто $k_0 = \frac{k}{\varepsilon}$, де k має порядок такий, як і коефіцієнти k_1, k_2 . Тоді умову (4) відносно теплових потоків записано у формі

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} + \dots \right) |_{\zeta=h_0/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}.$$

Звідси, ураховуючи порядки величин доданків, отримуємо, що $\frac{\partial v_0}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} = \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm h_0/2} = 0$. Тоді $A(r) = \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} = 0$ та $v_0(r, \zeta) = B(r)$. Із цього випливає, що стрибок температури

$$\langle v \rangle = \langle v_0 \rangle = v_0|_{\zeta=h_0/2} - v_0|_{\zeta=-h_0/2} = B(r) - B(r) = 0.$$

Ураховуючи першу з умов (4), отримуємо першу з умов спряження $u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2}$. Рівняння (1) відносно функції $v_2(r, \zeta)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Після інтегрування за змінною ζ отримуємо $\frac{\partial v_2}{\partial \zeta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) \zeta + C(r)$. Стрибок теплового потоку знайдено:

$$\langle k \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} \rangle = k \frac{\partial v_2}{\partial \zeta}|_{\zeta=h_0/2} - k \frac{\partial v_2}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) k h_0.$$

Використаємо, що $k h_0 = \varepsilon k_0 \frac{h}{\varepsilon} = k_0 h$ має порядок $O(1)$ та у зазначеному випадку правильними є співвідношення

$$v_0 = u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2} \text{ та } k_0 \frac{\partial v_2}{\partial \zeta}|_{\zeta=h_0/2} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2}; k_0 \frac{\partial v_2}{\partial \zeta}|_{\zeta=-h_0/2} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2}.$$

Друга умова спряження набуває вигляду

$$k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2} - k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = -k_0 h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) |_{z=-h/2}.$$

Отже, третій випадок зводиться до таких умов спряження:

$$u_1|_{z=-h/2} = u_2|_{z=h/2}; k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}|_{z=h/2} - k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}|_{z=-h/2} = -k_0 h \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) |_{z=-h/2}. \quad (7)$$

Для зведення розглянутих крайових задач до одновимірних задач застосуємо скінчене інтегральне перетворення Ганкеля за змінною r

$$u_{jn}(z) = \int_0^R u_j(r, z) J_0(\lambda_n r) r dr, j = 1, 2; n = 0, 1, 2, \dots$$

із формулою обернення

$$u_j(r, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} u_{jn}(z) \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)},$$

де $\lambda_0 = 0$, а $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ – це додатні корені рівняння $J_1(\lambda R) = 0$, де $J_m(x), m = 0, 1$ – циліндричні функції першого роду.

Застосуємо це інтегральне перетворення до рівнянь (1) та крайових умов (2) за змінною z , при цьому крайові умови за змінною r будуть задовольнятися автоматично. Зважаючи на це, отримуємо такі крайові задачі:

$$u_{1n}''(z) - \lambda_n^2 u_{1n}(z) = 0, -H_1 < z < -h/2, u_{1n}'(-H_1) = 0, \quad (8)$$

$$u_{2n}''(z) - \lambda_n^2 u_{2n}(z) = 0, h/2 < z < H_2, u_{2n}(H_2) = f_n, f_n = \int_0^R f(r) J_0(\lambda_n r) r dr. \quad (9)$$

Додаткові крайові умови одержуємо пізніше, після застосування інтегрального перетворення Ганкеля до умов спряження (5)–(7).

Розв'язком крайової задачі (8) є функції

$$u_{10}(z) = B_0 \text{ та } u_{1n}(z) = B_n \frac{\cosh \lambda_n(z+H_1)}{\cosh \lambda_n H_1}, \quad (10)$$

де B_0, B_n – невідомі сталі, а розв'язком крайової задачі (9) – функції

$$u_{20}(z) = f_0 - C_0(H_2 - z) \text{ та } u_{2n}(z) = f_n \frac{\cosh \lambda_n z}{\cosh \lambda_n H_2} - C_n \frac{\sinh \lambda_n(H_2 - z)}{\cosh \lambda_n H_2}, \quad (11)$$

де C_0, C_n – невідомі сталі.

Розглянемо спочатку випадок I, тобто ідеальний тепловий контакт. Застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля до умов спряження (5):

$$u_{1n}(-h/2) = u_{2n}(h/2); k_1 u_{1n}'(-h/2) = k_2 u_{2n}'(h/2), n = 0, 1, 2, \dots$$

Підставимо вирази (10) і (11) та знайдемо

$$B_0 = f_0, C_0 = 0, B_n = \frac{k_2 f_n}{\Delta_n} \cosh \lambda_n H_1, C_n = \frac{f_n}{\Delta_n} \left[k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right].$$

Тут $\Delta_n = k_1 \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \sinh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right) + k_2 \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \cosh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right)$.

За формулою обернення інтегрального перетворення Ганкеля отримаємо:

$$u_1(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2k_2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\cosh \lambda_n(z+H_1)}{\Delta_n} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)},$$

$$u_2(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\cosh \lambda_n H_2} \left\{ \cosh \lambda_n z - \frac{\sinh \lambda_n(H_2 - z)}{\Delta_n} \left[k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)}.$$

Розглянемо тепер випадок II. Умови спряження (6) у просторі трансформант Ганкеля мають такий вигляд:

$$u_{2n}(h/2) - u_{1n}(-h/2) = \frac{k_1}{k_0} h u_{1n}'(-h/2); k_1 u_{1n}'(-h/2) = k_2 u_{2n}'(h/2).$$

Підставивши вирази (10) та (11), знайдемо

$$B_0 = f_0, C_0 = 0, B_n = \frac{k_2 f_n}{\Delta_n^*} \cosh \lambda_n H_1,$$

$$C_n = \frac{f_n}{\Delta_n^*} \left\{ k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \left[\cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{k_1}{k_0} h \lambda_n \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right] \right\}.$$

Тут $\Delta_n^* = k_1 \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \sinh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right) + k_2 \cosh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right) \left[\cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{k_1}{k_0} h \lambda_n \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right]$.

За формулою обернення інтегрального перетворення Ганкеля отримаємо

$$u_1(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2k_2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\cosh \lambda_n(z+H_1)}{\Delta_n^*} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)},$$

$$u_2(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\cosh \lambda_n H_2} \left\{ \cosh \lambda_n z - \frac{\sinh \lambda_n(H_2 - z)}{\Delta_n^*} \left[k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \left[\cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + \frac{k_1}{k_0} h \lambda_n \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right] \right] \right\} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)}.$$

Розглянемо тепер випадок III. Застосовувавши інтегральне перетворення Ганкеля до умов спряження (7), отримуємо

$$u_{1n}(-h/2) = u_{2n}(h/2); k_2 u_{2n}'(h/2) - k_1 u_{1n}'(-h/2) = k_0 h \lambda_n^2 u_{1n}(-h/2).$$

Підставимо до них вирази (10) і (11) та знайдемо

$$B_0 = f_0, C_0 = 0, B_n = \frac{k_2 f_n}{\Delta_n^{**}} \cosh \lambda_n H_1,$$

$$C_n = -\frac{f_n}{\Delta_n^{**}} \left\{ k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \left[\sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + h \lambda_n \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right] \right\}.$$

Тут $\Delta_n^{**} = k_2 \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \cosh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right) + k_1 \sinh \lambda_n \left(H_2 - \frac{h}{2} \right) \left[\sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + h \lambda_n \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right]$.

За формулою обернення інтегрального перетворення Ганкеля маємо:

$$u_1(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2k_2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\cosh \lambda_n(z+H_1)}{\Delta_n^{**}} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)},$$

$$u_2(r, z) = \frac{2}{R^2} f_0 + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\cosh \lambda_n H_2} \left\{ \cosh \lambda_n z + \frac{\sinh \lambda_n(H_2 - z)}{\Delta_n^{**}} \left\{ k_2 \sinh \lambda_n \frac{h}{2} \cosh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) - k_1 \cosh \lambda_n \frac{h}{2} \left[\sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) + h \lambda_n \sinh \lambda_n \left(H_1 - \frac{h}{2} \right) \right] \right\} \right\} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)}.$$

Дискусія і висновки

У проведеному дослідженні враховано неідеальні умови контакту, зумовлені температурними недоскональностями на межах шарів скінченного циліндра. Отримано три типи умов спряження, що відповідають різним порядкам співвідношень коефіцієнтів теплопровідності шарів і характеристик міжфазного прошарку. Запропонований підхід ґрунтується на асимптотичному методі, що дає змогу адекватно відобразити ключові механічні ефекти й водночас використовувати спрощені співвідношення для подальших інженерних розрахунків.

Внесок авторів: Геннадій Мішуріс – концептуалізація, методика, Наталя Вайсфельд, Юрій Процеров, Зінаїда Журавльова – теоретичні дослідження та числові розрахунки.

Подяки та джерела фінансування. Дослідження підтримано європейським проектом, що фінансується Рамковою програмою з досліджень та інновацій Горизонт 2020 (2014–2020) (H2020-MSCA-RISE-2020) Грантова угода № 101008140 EffectFact "Ефективні методи факторизації для матричних функцій: Розвиток теорії, чисельних методів і ефективних застосувань", Наталя Вайсфельд є вдячною гранту Вольфсона Королівського товариства R3/233003.

Список використаних джерел

- Коваленко, А. Д. (1965). *Введение в термоупругость*. Наукова думка.
- Bigoni, D., Serkov, S. K., Valentini, M., & Movchan, A. B. (1998). Asymptotic models of dilute and densely packed composites with imperfectly bonded inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 3239–3258.
- Dumont, S., Lebon, F., Rizzoni, R., & Serpilli, M. (2022). Derivation of Imperfect Interface Laws for Multi-Physic Composites by a Multiscale Approach: Theoretical and Numerical Studies. In: *The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS Congress, ECCOMAS*, Oslo, Norway.
- Mishuris, G. S., Movchan, N. V., & Movchan, A. B. (2006). Steady-state motion of a mode-III crack on imperfect interfaces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 59(4), 487–516. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbl013>
- Nowacki, W. (1975). *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Springer Dordrecht.

References

- Bigoni, D., Serkov, S. K., Valentini, M., & Movchan, A. B. (1998). Asymptotic models of dilute and densely packed composites with imperfectly bonded inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 35, 3239–3258.
- Dumont, S., Lebon, F., Rizzoni, R., & Serpilli, M. (2022). Derivation of Imperfect Interface Laws for Multi-Physic Composites by a Multiscale Approach: Theoretical and Numerical Studies. In: *The 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS Congress, ECCOMAS*, Oslo, Norway.
- Kovalenko, A. D. (1965). *Introduction in thermoelasticity*. Naukova dumka [in Russian].
- Mishuris, G. S., Movchan, N. V., & Movchan, A. B. (2006). Steady-state motion of a mode-III crack on imperfect interfaces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 59(4), 487–516. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbl013>
- Nowacki, W. (1975). *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Springer Dordrecht.

Отримано редакцією журналу / Received: 02.12.25

Прорецензовано / Revised: 08.03.26

Схвалено до друку / Accepted: 16.04.26

Опубліковано / Published: 05.06.26

Gennady MISHURIS¹, DSc (Phys. & Math.), Prof.

ORCID ID: 0000-0003-2565-1961

e-mail: ggmm@aber.ac.uk

Yurii PROTSEROV², PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0009-0009-2659-2802

e-mail: protserov@onu.edu.ua

Natalya VAYSFELD³, DSc (Phys. & Math.), Prof.

ORCID ID: 0000-0001-8082-2503

e-mail: natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

Zinaida ZHURAVLOVA², PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-3271-8864

e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

¹Aberystwyth University, Ceredigion, United Kingdom

²Odesa I. I. Mechnikov National University, Odesa, Ukraine

³King's College London, London, United Kingdom

HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR A COMPOSITE CYLINDER WITH IMPERFECT CONTACT CONDITIONS BETWEEN ITS LAYERS

The paper considers the thermal conductivity problem for a multilayer cylinder, taking into account the influence of interface contrasts, which significantly change the mechanisms of heat transfer and complicate the determination of effective thermal conductivity. The aim of the study is to obtain non-ideal contact conditions between layers for different orders of thermal conductivity coefficients in the presence of an interlayer. Based on an asymptotic approach, three types of coupling conditions are derived that correspond to the characteristic modes of interaction between the layers. The proposed method provides the possibility of correctly describing key thermal and mechanical effects using simplified relationships suitable for further engineering applications.

К е у о р д с : composite cylinder, heat conduction, imperfect contact conditions.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.