

УДК 532.59: 534.29

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2026/1.16>

Олександр ЖУК, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

ORCID: 0009-0004-7253-6127

e-mail: opzhuk1939@gmail.com

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Ярослав ЖУК, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України

ORCID: 0000-0002-2726-8395

e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Марія КАШТАЛЯН, д-р філософії, проф.

ORCID: 0000-0003-1950-5677

e-mail: m.kashtalyan@abdn.ac.uk

Абердинський університет, Абердин, Шотландія, Велика Британія

ДІЯ СИЛ АКУСТИЧНОГО ВИПРОМІНЕННЯ В ІДЕАЛЬНІЙ РІДИНІ НА В'ЯЗКУ КРАПЛЮ

Досліджено дію акустичної радіаційної сили на сферичну краплю в'язкої рідини, розташовану в ідеальній рідині в полі плоскої звукової хвилі. Акустична радіаційна сила є мірою взаємодії між падаючою акустичною хвилею та краплею в'язкої рідини, що визначається як середнє за часом інтегральне значення звукового тиску на поверхню в'язкої краплі. Розроблено процедуру розв'язання задачі, що реалізується у два етапи. На першому етапі для визначення тиску розроблено підхід, що передбачає застосування потенціалу поля швидкості, отриманого як рішення лінійної задачі дифракції первинної хвилі на перешкоді. Під час формулювання граничних умов тиск поверхневого натягу краплі не враховували, а її радіус вважали незмінним, тобто розглядали випадок малих пульсаційних коливань. Задоволення граничних умов на поверхні в'язкої краплі й умов Зоммерфельда на нескінченності разом із використанням властивості ортогональності поліномів Лежандра дало змогу отримати нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів у розвиненнях потенціалів у ряди Фур'є. На другому етапі розв'язування задачі за допомогою знайдених потенціалів обчислено тиск і гідродинамічну силу, викликану акустичним полем. Наступне осереднення гідродинамічної сили за часом допомогло обчислити безпосередньо акустичну радіаційну силу. Числові розрахунки проведено для випадку, коли зовнішньою рідиною є вода, а крапля, утворена із нерозчинної у воді в'язкої рідини, – гліцерин. Проведено серію розрахунків для множини значень радіусу в'язкої краплі. Встановлено, що акустична радіаційна сила не є монотонною функцією частоти первинної хвилі. У випадку твердої сферичної частинки напрям дії радіаційної сили, як відомо, збігається з напрямом поширення акустичної хвилі. У випадку в'язкої сферичної краплі напрям дії радіаційної сили може як збігатися з напрямом поширення хвилі, так і бути протилежним. Виявлено, що існують частоти падаючої хвилі, які забезпечують нульову радіаційну силу, що діє на краплю, яка в цьому випадку є нерухомою.

Ключові слова: акустична радіаційна сила, сферична крапля рідини, ідеальна стислива рідина, в'язка рідина, плоска гармонічна хвиля, звукове поле.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 76Q05, 74F10.

Вступ

Уперше явище акустичного тиску, що виникає під дією звукової хвилі, було описане у класичній роботі (King, 1934). Подальший розвиток теорії спрямований на дослідження акустичних радіаційних сил (APC), які діють на тверді, рідинні та газові об'єкти, що перебувають у полі звукової хвилі (Zhuk O., Zhuk Y., & Klimchuk, 2023; Cantrell, 2018). Ці сили є результатом перерозподілу імпульсу хвилі внаслідок розсіювання на межах поділу середовищ і зумовлюють сталу компоненту тиску (King, 1934; Doinkinov, 2005). З практичного погляду, ефект акустичного випромінення широко застосовують у сучасних технологіях – зокрема, для ультразвукової левітації, очищення рідин, акустичного транспортування мікрокрапель, маніпуляцій із мікрочастинками тощо. Для опису таких систем необхідно враховувати як властивості зовнішнього середовища, так і внутрішню в'язкість краплі, що впливає на розподіл тиску та швидкості в рідині.

У пропонованій статті досліджено дію акустичного випромінення на сферичну краплю в'язкої рідини, розміщену в ідеальній стисливій рідині під дією плоскої гармонічної звукової хвилі. Метою роботи є встановлення закономірностей впливу параметрів звукового поля та фізичних характеристик рідин на величину і напрям акустичної сили. Використано аналітичний підхід, що базується на розв'язанні лінійної задачі дифракції хвилі методом розділення змінних і подальшому визначенні гідродинамічних та радіаційних сил шляхом усереднення за період хвилі (Zhuk O., Zhuk Y., & Klimchuk, 2023).

1. Постановка задачі

Уведемо з початком у центрі сферичної краплі дві системи координат: прямокутну декартову $Ox_1x_2x_3$ і сферичну $O\theta\varphi$. Динамічний процес у зовнішній ідеальній рідині, визначений на першому етапі під час розв'язання лінійної задачі дифракції, описується потенціалом Φ_i первинної хвилі та потенціалом Φ_s розсіяної хвилі на краплі, що є розв'язками лінійного хвильового рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

$$\Phi_i = A \exp[i(kx - \omega t)], \quad \Phi_i = A \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t), \quad \Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t),$$

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \vec{v} = \text{grad } \Phi, \quad \Phi = \Phi_i + \Phi_s, \quad k = \frac{\omega}{a_0}.$$

© Жук Олександр, Жук Ярослав, Кашталян Марія, 2026

Потенціал Φ_s задовольняє умови Зоммерфельда на нескінченності.

Динамічний процес у в'язкій рідині краплі на першому етапі під час розв'язування лінійної задачі дифракції опишемо за допомогою лінеаризованої теорії в'язкої стисливої рідини, використавши потенціали швидкості потенціальної $\bar{\Phi}_d$ і вихрової $\bar{\Psi}_d$ складових потенціалу швидкості хвильового поля, що є розв'язками рівнянь:

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda' + 2\mu'}{\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{\bar{a}_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \bar{\Phi}_d = 0, \quad \left(v' \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\Psi}_d = 0, \quad (2)$$

$$\bar{\Phi}_d = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n j_n(\alpha r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t), \quad \bar{\Psi}_d = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n j_n(\beta r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t). \quad (3)$$

$$\alpha = \bar{k} + i\bar{k}_1, \quad \bar{k} = i\bar{k}_1, \quad \bar{k}_1 = (\lambda' + 2\mu')\omega / (2\bar{\rho}_0 \bar{a}_0^2), \quad \beta = (i\omega/v')^{1/2}, \quad \bar{v} = \nabla \bar{\Phi}_d + \nabla \times (\nabla \times \bar{e}_r r \bar{\Psi}_d),$$

$$\hat{\sigma} = (-\bar{p} + \lambda' \nabla \cdot \bar{v}) \hat{E} + 2\mu' \hat{e}, \quad 2\hat{e} = \nabla \bar{v} + (\nabla \bar{v})^T, \quad \bar{p} = \bar{\rho}_0 \left(\frac{\lambda' + 2\mu'}{\bar{\rho}_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\Phi}_d, \quad \sigma_{rr} = \bar{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{e}_r, \quad \sigma_{r\theta} = \bar{e}_r \cdot \hat{\sigma} \cdot \bar{e}_\theta.$$

Із множин розв'язків для $\Phi_s, \bar{\Phi}_d$ і $\bar{\Psi}_d$ вибір необхідних співвідношень для потенціалів – обчислення невідомих коефіцієнтів в їхніх розвиненнях у ряди Фур'є – проведено шляхом дотримання граничних умов на поверхні сферичної краплі в'язкої рідини:

$$v_r|_{r=R} = \bar{v}_r|_{r=R}, \quad p|_{r=R} = \sigma_{rr}|_{r=0}, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0. \quad (4)$$

Під час формулювання граничних умов тиск поверхневого натягу краплі не враховували, а її радіус R вважали незмінним – малі пульсаційні коливання.

2. Методика розв'язання задачі та властивості рідин

Використавши ортогональність поліномів Лежандра в рівняннях (4), одержано нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A_n, \bar{A}_n, \bar{B}_n$ в розвиненнях потенціалів у ряди Фур'є

$$\begin{cases} k \frac{dh_n^{(1)}(q)}{dq} A_n + i \frac{\omega}{R} \beta_{1n} \bar{A}_n + i \frac{\omega}{R} \beta_{2n} \bar{B}_n = -A(2n+1) i^n k \frac{dj_n(q)}{dq} \\ i\omega \rho_0 h_n^{(1)}(q) A_n - \frac{2\mu'}{R^2} \alpha_{1n} \bar{A}_n - \frac{2\mu'}{R^2} \alpha_{2n} \bar{B}_n = -A(2n+1) i^{n+1} \omega \rho_0 j_n(q) \\ \varepsilon_{1n} \bar{A}_n + \varepsilon_{2n} \bar{B}_n = 0, \quad q = kR. \end{cases} \quad (5)$$

У системі рівнянь (5) уведено такі позначення:

$$\alpha_{1n} = \left[n^2 - n - \frac{(\beta R)^2}{2} \right] j_n(\alpha R) + 2(\alpha R) j_{n+1}(\alpha R), \quad \alpha_{2n} = n(n+1) [(n-1) j_n(\beta R) - (\beta R) j_{n+1}(\beta R)], \quad \beta_{2n} = n(n+1) j_n(\beta R),$$

$$\beta_{1n} = n j_n(\alpha R) - (\alpha R) j_{n+1}(\alpha R), \quad \varepsilon_{1n} = (n-1) j_n(\alpha R) - (\alpha R) j_{n+1}(\alpha R), \quad \varepsilon_{2n} = \left[n^2 - 1 - \frac{(\beta R)^2}{2} \right] j_n(\beta R) - (\beta R) j_n(\beta R).$$

Система рівнянь (5) розв'язана для випадку малої в'язкості. Уведено параметр $\varepsilon = (v'/(\omega R^2))^{1/2} \ll 1$ і з точністю до ε^2 одержано: $\alpha R \approx \bar{k} R$, $\beta R \approx (1+i)/(\varepsilon \sqrt{2}) = \varepsilon^{-1} \exp(i\pi/4)$.

Під час обчислення сферичних функцій за великих значень аргументів використано їхні асимптотичні представлення. Визначенням потенціалів акустичного поля завершується розв'язування задачі дифракції первинної хвилі на в'язкій краплі.

На другому етапі розв'язування задачі обчислено гідродинамічну силу, викликану акустичним полем. Симетрія акустичного поля відносно осі Ox_3 обумовлює напрям її дії на краплю вздовж цієї осі. Вона дорівнює

$$F_{x3} = -R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} p \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi. \quad (6)$$

Відповідно до прийнятого методу дослідження, тиск P у формулі (5) для гідродинамічної сили обчислено, використавши потенціал $\Phi = \Phi_i + \Phi_s$ акустичного поля, одержаний на першому етапі розв'язування задачі. До того ж відповідно до застосованого методу дослідження тиск P у формулі (6) для гідродинамічної сили визначено з точністю до величин другого порядку

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (grad \Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2. \quad (7)$$

Структура формули (7) передбачає під час обчислення тиску P використання дійсної складової потенціалу Φ . Тоді у формулі (7) для тиску необхідно покласти

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - V_{x3} \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + V_{x3} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Для визначення швидкості коливального руху краплі вздовж осі Ox_3 застосовано рівняння

$$m \frac{dV_{x3}}{dt} = - \iint_S p \cos \theta dS, \quad p = -\bar{p}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad m = \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho}_0. \quad (9)$$

Інтеграл у правій частині рівняння (9) береться по всій поверхні сферичної краплі й визначає силу, що діє на неї з боку оточуючої ідеальної рідини.

Вважаючи радіус сферичної краплі малим і не наводячи громіздкі викладки під час обчислення гідродинамічної сили (7) і в її осередненні в часі, одержимо:

$$\begin{aligned} \langle F_{x3} \rangle &= \langle F_{x3}^{(1)} \rangle + \langle N_{x3}^{(1)} \rangle + \langle N_{x3}^{(2)} \rangle + \langle F_{x3}^{(3)} \rangle. \\ \langle F_{x3}^{(1)} \rangle &= 2\pi\rho_0\eta \left[\frac{1}{3}q \left(K_1(q) \frac{dK_0(q)}{dq} + L_1(q) \frac{dL_0(q)}{dq} \right) + \frac{2}{15}q \left(K_1(q) \frac{dK_2(q)}{dq} + L_1(q) \frac{dL_2(q)}{dq} \right) + \frac{2}{5} (K_1(q)K_2(q) + L_1(q)L_2(q)) \right], \\ \langle N_{x3}^{(1)} \rangle &= 2\pi\rho_0q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{dK_n(q)}{dq} \frac{dK_{n+1}(q)}{dq} + \frac{dL_n(q)}{dq} \frac{dL_{n+1}(q)}{dq} \right), \\ \langle N_{x3}^{(2)} \rangle &= 4\pi\rho_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} (K_n(q)K_{n+1}(q) + L_n(q)L_{n+1}(q)), \\ \langle F_{x3}^{(3)} \rangle &= -2\pi\rho_0q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} (K_n(q)K_{n+1}(q) + L_n(q)L_{n+1}(q)). \end{aligned} \quad (10)$$

У формулах для складових APC позначено:

$$\begin{aligned} K_n(q) &= (2n+1)A_j(q) \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + A_{n1}j_n(q) - A_{n2}y_n(q), \quad L_n(q) = (2n+1)A_j(q) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + A_{n1}y_n(q) + A_{n2}j_n(q), \\ A_n &= \text{Re } A_n + i \text{Im } A_n = A_{n1} + iA_{n2}. \end{aligned}$$

Аргумент q в обчисленні наведених вище співвідношень дорівнює kR .

3. Результати розрахунків й аналіз

Для числових досліджень дії APC на сферичну краплю в'язкої рідини в ідеальній рідині використано формулу (10). Зовнішньою рідиною є вода (густина 1000 кг/м^3 , швидкість звуку 1500 м/с), а, крапля утворена із нерозчинної у воді в'язкої рідини, – гліцерин (густина 1264 кг/м^3 , швидкість звуку 1920 м/с , коефіцієнт динамічної в'язкості $1,412 \text{ Па}\cdot\text{с}$). Амплітуда A первинної хвилі Φ_i становить $0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Результати розрахунків зображено на рис. 1, 2. Цифри, якими позначено криві, вказують радіус краплі в міліметрах.

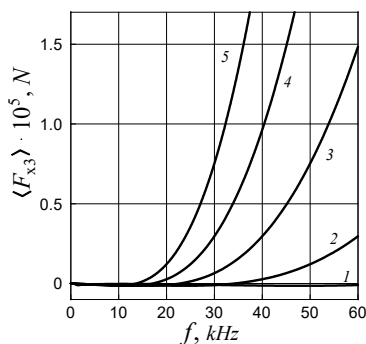


Рис. 1. Загальна залежність APC від нуля

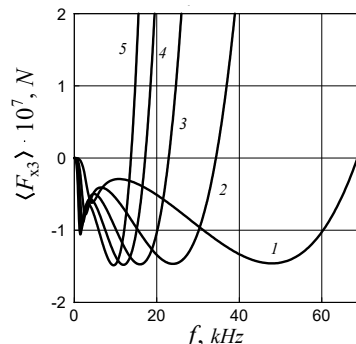


Рис. 2. Особливість поведінки APC в околі частоти первинної хвилі

Бачимо, що радіаційна сила не є монотонною функцією частоти первинної хвилі. На відміну від випадку твердої сферичної частинки, напрям дії радіаційної сили може як збігатися з напрямом поширення акустичної хвилі, так і бути протилежним.

Дискусія і висновки

Встановлено, що акустична радіаційна сила не є монотонною функцією частоти первинної хвилі. У випадку твердої сферичної частинки напрям дії APC, як відомо, збігається з напрямом поширення акустичної хвилі. У випадку в'язкої сферичної краплі напрям дії радіаційної сили може як збігатися з напрямом поширення хвилі, так і бути протилежним. Виявлено, що існують частоти падаючої хвилі, які забезпечують нульову APC, що діє на краплю, яка в цьому випадку є нерухомою.

Внесок авторів: Олександр Жук – концептуалізація, методика; Ярослав Жук – збір і перевірка емпіричних даних, емпіричне дослідження, програмне забезпечення; Марія Кашталян – аналіз джерел, підготовка огляду літератури або теоретичних основ дослідження.

Джерела фінансування. Робота фінансувалася частково власним коштом і коштом КНУ імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Cantrell, J. H. (2018). *Acoustic radiation pressure in fluids*. NASA/TM–2018-219806.
 Doinikov, A. A. (2005). *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications*. Research Signpost.
 King, L. V. (1934). On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of Royal Society of London A*, 147, 212–240. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
 Zhuk, O. P., Zhuk, Y., & Klimchuk, T. (2023). On the Acoustic Radiation Force Affecting Two Liquid Drops Located in the Wave Field. *Axioms*, 12(10), 940. <https://doi.org/10.3390/axioms12100940>

References

- Cantrell, J. H. (2018). *Acoustic radiation pressure in fluids*. NASA/TM–2018-219806.
 Doinikov, A. A. (2005). *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications*. Research Signpost.
 King, L. V. (1934). On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proceedings of Royal Society of London A*, 147, 212–240. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
 Zhuk, O. P., Zhuk, Y., & Klimchuk, T. (2023). On the Acoustic Radiation Force Affecting Two Liquid Drops Located in the Wave Field. *Axioms*, 12(10), 940. <https://doi.org/10.3390/axioms12100940>

Отримано редакцією журналу / Received: 30.10.25
 Прорецензовано / Revised: 18.03.26
 Схвалено до друку / Accepted: 16.04.26
 Опубліковано / Published: 05.06.26

Oleksandr ZHUK, DSc (Phys. & Math.), Senior Researcher
 ORCID: 0009-0004-7253-6127
 e-mail: opzhuk1939@gmail.com
 S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Yaroslav ZHUK, DSc (Phys. & Math.), Prof., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine
 ORCID: 0000-0002-2726-8395
 e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Maria KASHTALYAN, PhD, Prof.
 ORCID: 0000-0003-1950-5677
 e-mail: m.kashtalyan@abdn.ac.uk
 University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, UK

THE EFFECT OF ACOUSTIC RADIATION IN AN IDEAL FLUID ON THE VISCOSITY OF A DROP

The effect of acoustic radiation force on a spherical drop of viscous liquid, located in turn in an ideal liquid in a plane sound wave field, is investigated. Acoustic radiation force is a measure of the interaction between an incident acoustic wave and a drop of viscous liquid, defined as the time-averaged integral value of the sound pressure over the surface of the viscous drop. A procedure for solving the problem has been developed, which is implemented in two steps. At the first step, an approach was developed to determine the pressure, which involves the use of the velocity field potential obtained as a solution to the linear problem of incident wave scattering at an obstacle. When formulating the boundary conditions, the surface tension pressure of the drop was not taken into account, and its radius was considered constant, i.e., the case of small pulsation oscillations was considered. Satisfying the boundary conditions on the surface of a viscous drop and Sommerfeld's conditions at infinity, together with the use of the orthogonality property of Legendre polynomials, made it possible to obtain an infinite system of algebraic equations with respect to unknown coefficients in the Fourier series expansions of potentials. At the second step of solving the problem, the pressure and hydrodynamic force caused by the acoustic field were calculated using the found potentials. The subsequent averaging of the hydrodynamic force over time allowed us to calculate the acoustic radiation force directly. Numerical calculations were performed for the case where the external fluid is water and the drop is formed from a viscous fluid insoluble in water - glycerin. A series of calculations was performed for a set of values of the radius of the viscous drop. It was found that the acoustic radiation force is not a monotonic function of the incident wave frequency. In the case of a solid spherical particle, the direction of the radiation force, as is known, coincides with the direction of propagation of the acoustic wave. In the case of a viscous spherical drop, the direction of the radiation force can be either coincident with the direction of wave propagation or opposite to it. It has been found that there are frequencies of the incident wave that provide zero radiation force acting on the drop, which in this case is stationary.

Key words: *acoustic radiation force, spherical liquid drop, ideal compressible fluid, viscous fluid, plane harmonic wave, sound field.*

Один з авторів (Я. Жук) є членом редколегії видання, тому він не брав участі у рецензуванні та прийнятті рішення щодо публікації цієї статті.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

One of the authors (Ya. Zhuk) is a member of the journal editorial board; he did not take part in the peer-review process or in the decision to publish this article.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.