УДК 519.177, 519.217, 004.942
DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.7

Оксана КИРИЧЕНКО, PhD (IT), асист.
ORCID ID: 0000-0003-0282-9958
e-mail: o.kyrychenko@chnu.edu.ua
Чернівецький національних університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

Євген КИРИЧЕНКО, асп.
ORCID ID: 0009-0005-6150-5410
e-mail: kyrychenko.yevhen@chnu.edu.ua
Чернівецький національних університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ

Розглянуто асимптотичні властивості випадкових матриць за умови відсутності другого моменту та наявності "важких хвостів" відповідних переходів у матрицях суміжності відповідного графа. Основний результат роботи сформульовано в термінах матриці переходу дискретного ланцюга Маркова та її власних значень. Отриманий результат узагальнює як класичні результати для нормального розподілу, так й аналогічні результати інших авторів і може бути використаний у задачах кластеризації для вибору оптимальної кількості кластерів.

К л ю ч о в і с л о в а : ***стохастична матриця, випадкова матриця, ланцюг Маркова, кластеризація на графах.***

Вступ

Останнім часом науковці активно займаються моделюванням таких систем, як інтернет, співтовариство вчених, харчові ланцюги в біології, комбінаторній оптимізації, задачах криптографії тощо. Це, зазвичай, системи великих розмірів зі складною взаємодією, у яких ураховують наявність випадковостей (Chen et al., 2023; Guo, Xu, 2022; Wang, Tan, & Yuan, 2023). Для цього вводяться до вивчення нові ансамблі випадкових матриць. Матриці у цих моделях суттєво відрізняються від ансамблю Вігнера (Wigner, 1958; Wigner, 1955), тому важливим і цікавим питанням стало вивчення асимптотичних спектральних властивостей різноманітних ансамблів випадкових матриць.

Пропоновану роботу присвячено розгляду асимптотичної властивості стохастичних матриць великих розмірностей N за умов незалежності елементів матриці або за умов незалежності рядків (стовпців). Проаналізовано основні властивості власних значень стохастичної матриці. Подібні дослідження проводили вітчизняні вчені (Книгніцька, Малик, & Горбатенко, 2020), де елементи матриці суміжності A – незалежні випадкові величини та мають однаковий розподіл, для якого вимагається наявність моменту порядку $2+\delta, \delta>0$. Зазначена умова необхідна у доведенні для використання центральної граничної теореми у формі Лінденберга чи Ляпунова. У випадку, який розглядаємо у цьому дослідженні, умова послаблюється і вимагається існування першого моменту й обмеженість щільності розподілу степеневою функцією. Отже, у розглянутій теоремі вдалося розширити клас випадкових матриць A, для яких може бути застосована збіжність власних значень.

Основні результати

Уведемо основні позначення та наведемо теоретичні результати, що використовуватимемо у статті. Основними математичними об'єктами є граф і відповідна стохастична матриця.

Граф позначатимемо через $G=(V,E)$, де $V=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ – множина вершин графа, а $E=\{e_1, \dots, e_m\}$ – множина ребер графа, що з'єднують вершини із множини V. Припустимо, що граф задано матрицею суміжності A:

$$A=A_{N\times N},$$

де елемент A_{ij} дорівнює ваговому коефіцієнту між вершинами i та j.

Співвідношенням (1) буде задаватись стохастична матриця

$$P_{ij}=\frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{N}A_{ik}}, \tag{1}$$

що відповідає графу G та задається матрицею суміжності A. Основним предметом дослідження в роботі буде матриця P.

Розглядатимемо власні значення матриці A в порядку спадання їхніх абсолютних величин, тобто

$$|\lambda_1(A)|\geq|\lambda_2(A)|\geq\cdots\geq|\lambda_N(A)|.$$

Скористаємось фактом, що одним із власних значень стохастичної матриці, яке відповідає незвідному ланцюгу Маркова зі стохастичною матрицею P, є одиниця, і всі власні значення стохастичної матриці не перевищують її за абсолютним значенням. Доведення цього факту є наслідком теореми Перрона – Фробеніуса (Bapat, & Raghavan, 1997).

Твердження 1. (Bapat, & Raghavan, 1997) *Нехай матриця $A=A_{N\times N}$ – нерозкладна матриця із невід'ємними елементами. Тоді існує додатне власне значення $\lambda_1(A)$ матриці A, для якого виконуються нерівності:*

$$|\lambda_i(A)|\leq\lambda_1(A), i=2,\dots,N,$$

$$\min_{j=1,\dots,N}\sum_{i=1}^{N}A_{ij}\leq\lambda_1(A)\leq\max_{j=1,\dots,N}\sum_{i=1}^{N}A_{ij}, \tag{2}$$

$$\min_{i=1,\dots,N}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\leq\lambda_1(A)\leq\max_{i=1,\dots,N}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}. \tag{3}$$

Власне значення $\lambda_1(A)$ є простим коренем характеристичного рівняння та даному власному значенню відповідає власний вектор $e_1(A)$ з невід'ємними координатами.

Ураховуючи нерівності для стохастичної випадкової матриці P, отримаємо наслідок із теореми Перрона – Фробеніуса про рівність одиниці власного значення $\lambda_1(P)$, тобто

$$\lambda_1(P)=1 \tag{4}$$

для довільної стохастичної матриці.

Згідно із твердженням 1 правильні такі співвідношення:

$$\begin{cases}\lambda_1(P)=1,\\ |\lambda_i(A)|\leq 1, i\geq 1.\end{cases}$$

© Кириченко Оксана, Кириченко Євген, 2024

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1. Усі елементи матриці $A = A_{N\times N}$ є незалежними випадковими величинами та мають однаковий розподіл,

$$A_{ij} \sim Distr,$$

де розподіл $Distr$, для якого справджуються умови

$$P(A_{ij} < 1) = 0, \;\; EA_{ij} < \infty.$$

2. Щільність розподілу $Distr$ задовольняє умову

$$f_A(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (2,3],$$

де $M > 0$.

3. Елементи матриці переходу дискретного ланцюга Маркова за один крок P_{ij} визначаються співвідношенням (1).

З огляду на це маємо таку збіжність

$$\lim_{N\to\infty} \max(|\lambda_2(P)|, .., |\lambda_N(P)|) = 0.$$

Доведення. Зауважимо, що елементи матриці (1)

$$P_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} A_{ik}}$$

набувають значень з інтервалу $[0,1]$. Крім того, на основі однакового розподілу випадкових величин A_{ij} та їх незалежності, отримаємо такі співвідношення:

$$E(P_{ij}) = E\left(\frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} A_{ik}}\right) = \frac{1}{N},$$

$$E(P_{ij}^2) \le O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Для доведення справедливості останнього співвідношення, припустимо що $f_A(x), x \in R$ – щільність розподілу елемента матриці. Зважаючи на це, щільність розподілу елемента матриці P_{ij} дорівнюватиме

$$f_{P_{ij}}(x) = \int\limits_{R_+^{N-1}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{(x_2+\cdots+x_N)}{(1-x)^2}\,dx_2\dots dx_N =$$

$$= (N-1)\int\limits_{R_+^{N-1}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}\,dx_2\dots dx_N \le$$

$$\le M(N-1)\int\limits_{R_+^{N-1}} \left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right)^{-\alpha} f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}\,dx_2\dots dx_N \le$$

$$\le M * EA_{ij} * (N-1)^{1-\alpha}\frac{(1-x)^{\alpha-2}}{x^{\alpha}} = \frac{K}{(N-1)^{\alpha-1}}\frac{(1-x)^{\alpha-2}}{x^{\alpha}} \le$$

$$\le \frac{K}{N-1}\frac{(1-x)^{\alpha-2}}{x^{\alpha}} = O\left(\frac{1}{N}\right)\frac{(1-x)^{\alpha-2}}{x^{\alpha}},$$

де $K = M * EA_{ij}$.

Розглянемо матрицю $\tilde{P}$, елементи якої визначаємо співвідношеннями

$$\tilde{P}_{ij} = E(P_{ij}) = \frac{1}{N}.$$

Власними значеннями цієї матриці будуть

$$\lambda_1(\tilde{P}) = 1, \;\; \lambda_2(\tilde{P}) = \cdots = \lambda_N(\tilde{P}) = 0.$$

Для доведення теореми скористаємося нерівністю

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i(A) - \lambda_i(B)\right)^2 \le Tr(A-B)^2.$$

Ураховуючи той факт, що $\alpha \in (2,3]$ та взявши в ролі матриць $A,\ B$ відповідно матриці P і $\tilde{P}$, отримаємо

$$\sum_{i=2}^{N} E\left(\lambda_i(P) - \lambda_i(\tilde{P})\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=2}^{N} E\lambda_i^2(P) \le TrE(P-\tilde{P})^2.$$

Ураховуючи незалежність елементів матриці A, одержимо

$$\sum_{i=2}^{N} E\left(\lambda_i(P) - \lambda_i(\tilde{P})\right)^2 \le \sum_{i=1}^{N} D(P_{ii}) =$$

$$= O\left(\frac{N}{N^{\alpha-1}}\right) = O\left(\frac{1}{N^{\alpha-2}}\right),$$

що і доводить твердження теореми.

Зауваження. Для спрощення викладок у теоремі 1 було зроблено припущення про носій розподілу $Distr$, а саме накладено умову

$$P(A_{ij} < 1) = 0.$$

ISSN 1728-3817

Зазначену умову можна послабити до умови $P(A_{ij} < 0) = 0$, припустивши, що $P(A_{ij} > 1) > 0$. У цьому випадку

$$f_{P_{ij}}(x) = (N-1) \int\limits_{R_+^{N-1}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N =$$

$$= (N-1) \int\limits_{B^{(N)}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N +$$

$$+(N-1) \int\limits_{\overline{B^{(N)}}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N,$$

де множину $B^{(N)}$ визначаємо співвідношенням

$$B^{(N)} = \{x_2 + x_3 + \cdots + x_N \le N-1\}.$$

З оляду на це

$$f_{P_{ij}}(x) \le (N-1) \int\limits_{B^{(N)}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N +$$

$$+M(N-1) \int\limits_{R_+^{N-1}} \left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right)^{-\alpha} f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N.$$

Другий випадок аналогічно із доведеною теоремою дорівнює $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$. Згідно з нашими припущеннями щодо щільності $f_A(x)$ отримаємо, що

$$(N-1) \int\limits_{B^{(N)}} f_A\left(\frac{x(x_2+\cdots+x_N)}{1-x}\right) f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N \le$$

$$\le K(N-1) \int\limits_{B^{(N)}} f_A(x_2)\dots f_A(x_N)\frac{x_2}{(1-x)^2}dx_2\dots dx_N \le$$

$$\le K_1(N-1)a^{N-2} \le \frac{K_1}{N^2}$$

для великих N, де

$$K_1 = (N-1)EA_{ij}, \qquad a = \int\limits_0^1 f_A(x)dx < 1.$$

Дискусія і висновки

У роботі розглянуто асимптотичну поведінку власних значень стохастичної випадкової матриці з розподілом, для якого відсутній скінчений другий момент. Використання зазначеної теореми дає змогу розширити клас прикладних задач, які описуються з використанням матриць суміжності, наприклад у теорії графів. Отже, вдалося розширити область застосування випадкових матриць на випадок наявності "важких хвостів".

Внесок авторів: Оксана Кириченко – концептуалізація, формальний аналіз; Євген Кириченко – аналіз джерел, підготовка огляду літератури.

Список використаних джерел

Книгніцька, Т. В., Малик, І. В., & Горбатенко, М. Ю. (2020). Кластеризація: марковський алгоритм. *Буковинський математичний журнал*, 7(2), 59–75. https://doi.org/10.31861/bmj2019.02.059
Bapat, R. B., & Raghavan, T. E. S. (1997). *Nonnegative Matrices and Applications (1 ed.)*. Cambridge University Press.
Chen, Y., Xie, R., Zhang, H., Li, D., & Lin, W. (2023). *Generation of high-order random key matrix for Hill Cipher encryption using the modular multiplicative inverse of triangular matrices*. Wireless Netw. https://doi.org/10.1007/s11276-023-03330-8
Guo, S., & Xu, J. (2022). *Art Financial Risk Prediction Algorithm Based on Random Matrix. Mathematical Problems in Engineering*. https://doi.org/10.1a155/2022/8477065
Wang, J., Tan, F. S., & Yuan, Y. (2023). Random Matrix Transformation and Its Application in Image Hiding. *Sensors (Basel)*, 23 (2), 1017. https://doi.org/10.3390/s23021017
Wigner, E. P. (1958). On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2), 325–327.
Wigner, E. (1955). Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions. *Annals of Mathematics*, 62(3), 548–564. https://doi.org/10.2307/1970079

References

Bapat, R. B., & Raghavan, T. E. S. (1997). *Nonnegative Matrices and Applications (1 ed.)*. Cambridge University Press.
Chen, Y., Xie, R., Zhang, H., Li, D., & Lin, W. (2023). *Generation of high-order random key matrix for Hill Cipher encryption using the modular multiplicative inverse of triangular matrices*. Wireless Netw. https://doi.org/10.1007/s11276-023-03330-8
Guo, S., & Xu, J. (2022). Art Financial Risk Prediction Algorithm Based on Random Matrix. *Mathematical Problems in Engineering*. https://doi.org/10.1a155/2022/8477065
Knignitska, T. V., Malyk, I. V., & Gorbatenko, M. Yu. (2020). Clustering: Markov algorithm. *Bukovinian Mathematical Journal*, 7(2), 59–75 [in Ukrainian]. https://doi.org/10.31861/bmj2019.02.059.
Wang, J., Tan, F. S., & Yuan, Y. (2023). Random Matrix Transformation and Its Application in Image Hiding. *Sensors (Basel)*, 23(2), 1017. https://doi.org/10.3390/s23021017
Wigner, E. P. (1958). On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2), 325–327.
Wigner, E. (1955). Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions. *Annals of Mathematics*, 62(3), 548–564. https://doi.org/10.2307/1970079

Отримано редакцією журналу / Received: 10.04.24
Прорецензовано / Revised: 15.05.24
Схвалено до друку / Accepted: 20.05.24

Oksana KYRYCHENKO, PhD (IT), Assist.
ORCID ID: 0000-0003-0282-9958
e-mail: o.kyrychenko@chnu.edu.ua
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Yevhen KYRYCHENKO, PhD Student
ORCID ID: 0009-0005-6150-5410
e-mail: kyrychenko.yevhen@chnu.edu.ua
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF RANDOM MATRICES

The paper investigates the asymptotic properties of random matrices under the absence of the second moment and the presence of "heavy tails" in the corresponding transitions of adjacency matrices of the associated graph. The main result of the study is stated in terms of the transition matrix of a discrete Markov chain and its eigenvalues. This result generalizes both classical findings for the normal distribution and analogous results by other authors. It can be applied to clustering tasks for determining the optimal number of clusters.

K e y w o r d s : ***stochastic matrix; random matrix; Markov chain; clustering on graphs.***

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.