https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.27
УДК 519.9

Ушакова В.С.[1], к.ф-м.н, с.н.с.,
Ушаков О.В.[2],заступник начальника центру,
Горун О.Ю. [2], пров.н.с.

Застосування згладжуючих кубічних сплайнів у моделюванні процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану

[1]Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;
e-mailcreep@inmech.kiev.ua
[2]Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України, вул. Василенка, 3, 03113, м. Київ;
e-mailnddkr_icte@ssu.gov.ua

V.S. Reznik[1], Ph.D. (Phys.-Math.), sen.sci.researcher.
O.V. Ushakov[2], Deputy head of the center,
O.Y. Gorun[2], Lead.reseacher

The use of cubic splines in the modeling of creep processes of linear viscoelastic materials under complex stress state

[1]S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Nesterov str, 3, Kiev;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua
[2]Ukrainian scientific and research Institute of special equipment and forensic expertise of the Security Service of Ukraine. 03113 Vasilenko str 5, Kyiv;
e-mail: nddkr_icte@ssu.gov.ua

Розглядаються процеси повзучості тонкостінних трубчастих елементів з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Об'єктом дослідження є базові експериментальні дані на одновісний розтяг і чисте кручення у вигляді дискретних значень. Ці дискретні значення використовуються для подальшої ідентифікації ядер спадковості, що використовують в процесах моделювання повзучості за умов складного напруженого стану. Розрахунки здійснюються на прикладі оргскла СТ1. Обґрунтовується область лінійності моделі, виходячи зі значення квантиля статистики і гіпотези існування єдиної функції повзучості у певному, заданому наперед, довірчому інтервалі. Функція повзучості інваріантна відносно напружень та побудована по кривим податливості. Визначальні рівняння моделі містять набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються з базових експериментів. Для подальших розрахунків експериментальні дані апроксимуються степеневою функцією і згладжуючими кубічними сплайнами. Проводиться аналіз апроксимації на підставі мінімуму квадратичного відхилення експериментальних даних від розрахункових. Виходячи з мінімуму квадратичного відхилення аналізується апроксимуюча функція.

Ключові слова: лінійна в'язкопружність, складний напружений стан, сплайн апроксимація, функція повзучості, ядра спадковості, квадратичне відхилення, квантиль статистики.

The processes of creep of thin-walled tubular elements made of linear viscoelastic materials under complex stress conditions are considered. The discrete values of basic experimental data on uniaxial tension and pure torsion are considered. These discrete values are used for identification of hereditary kernels normally used in creep modeling processes under complex stress conditions. As an example material, plexiglass ST1 is used for calculations. The area of linearity of the model is substantiated by the value of the quantile of statistics and the hypothesis of the existence of a unified creep function in a certain, predetermined confidence interval. The creep function is invariant with respect to stresses and is built with making use of the yield curves. Constitutive equations of the model contain a set of functions and coefficients determined from basic experiments. For further calculations, the experimental data are approximated by a power function followed by the smoothing with cubic splines. Approximation analysis is carried out by evaluation of the least squared deviation of experimental data from the calculated data. The approximating function is analyzed with making use of minimum of the quadratic deviation,.

Keywords: linear viscoelasticity, complex stress state, spline approximation, creep function, hereditarty kernels, quadratic deviation, quantile of statistics.

Статтю представив член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

© В.С. Ушакова, О.В. Ушаков, О.Ю. Горун 2023

Вступ

У лінійній теорії в'язкопружності квазістатичні механічні властивості матеріалів досить точно можуть бути задані за допомогою функцій повзучості релаксації. Ці функції будуються за результатами прямих одновісних експериментів на повзучість при постійних напруженнях або відповідно на релаксацію при фіксованих деформаціях. Загальний підхід – логічні процедури, експериментальна і чисельна реалізація процедур, потрібні для визначення механічних характеристик у лінійній теорії в'язкопружності, досліджуються в [1,2].

Моделювання процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану є фундаментальною задачею сучасної механіки деформівного твердого тіла. При розв'язуванні цієї задачі основну роль відіграє експеримент на повзучість, в якому дані представляють у вигляді дискретних значень деформацій при постійних напруженнях у певний момент часу. Функції, що задані дискретно за допомогою таблиць первинних або перетворених експериментальних даних, необхідно апроксимувати аналітичними виразами, які дають змогу визначити значення деформацій в довільний момент часу. Від точності апроксимацій експериментальних даних суттєво залежать подальші розрахунки. В роботі за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів апроксимуються експериментальні дані, а методом найменших квадратів знаходиться похибка шляхом мінімізації функціоналу [1].

1. Постановка задачі

У роботі розглядається деформування ізотропних лінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механічними властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \quad \tau \in (0,t), \tag{1}$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; t – час спостереження; τ –час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення [2]

$$\sigma_{11} = \mu(t)\overline{\sigma}_{11},...,\tau_{12} = \mu(t)\overline{\sigma}_{12},...$$

Базові експерименти, за допомогою яких ідентифікуються ядра спадковості задаються кривими повзучості за умов одновісного розтягу із заміром повздовжніх і поперечних деформацій при постійних напруженнях у вигляді дискретних значень. Для подальших розрахунків дискретні значення необхідно апроксимувати неперервними функціями, які описують процеси повзучості і в області сингулярності, і в області великих часів. Є різні варіанти апроксимуючих функцій, але найкращі результати дають наближення у вигляді сплайн апроксимації. Сплайн апроксимація досить точно описує процеси повзучості і релаксації на всій області визначення, оскільки представляє собою множину кубічних парабол у вказаному інтервалі розбиття. У роботі на прикладі оргскла СТ1 будується сплайн апроксимація і визначаються коефіцієнти моделі, а також знаходиться похибка апроксимації.

2.Побудова сплайн апроксимації експериментальних даних

Функції, задані дискретно за допомогою таблиць первинних або перетворених експериментальних даних, які використовуються для визначення механічних характеристик матеріалу, аналітично можуть бути представлені згладжуючими кубічними сплайнами у вигляді [4]

$$y(x) = y_j + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j}{6}(2k_j + k_{j+1})\right)$$

$$(x \quad x_j) + \frac{k_j}{2}(x \quad x_j)^2 + \frac{k_{j+1} - k_j}{6h}(x \quad x_j)^3 \tag{2}$$

$$x \in [x_j; x_{j+1}]; \quad h_j = x_{j+1} - x_j; j = \overline{1, l-1},$$

де k_j – коефіцієнти сплайна, що визначаються з умови неперервності першої похідної в точках x_j і деяких краєвих умов на кінцях відрізка, що задає апроксимуючу функцію $y(x)$; h_j– табличні значення функції, що апроксимується в точках x_j. На рис. 1 як приклад наведено сплайн апроксимацію кривих поздовжньої повзучості оргскла СТ1, що побудовані за умов одновісного розтягу при постійних напруженнях. Напруження для кривих 1, 2 і 3 відповідно складають σ_{11}= 7,65 (1), 11,45 (2) і 15,30 (3) МПа. Тут і далі експериментальні дані нанесено точками. Апроксимацію експериментальних даних згладжуючими кубічними сплайнами нанесено суцільними лініями. Коефіцієнти сплайн апроксимації кривих поздовжньої повзучості структурою (2) наведено в таблицях 1-3.

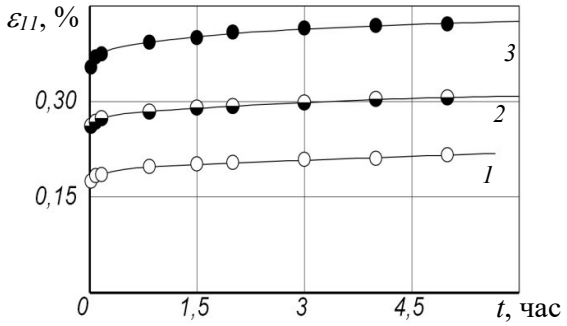

Рис. 1 – Сплайн апроксимація кривих повздовжньої і повзучості оргскла СТ-1.

Таблиця 1.
Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 7{,}65$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0125	0,000145	-0,0004	0,000462	0,00179
0,9375	1,35E-06	-1,3E-05	8,21E-05	0,00191
3,2085	-2,7E-10	-3,8E-09	4,04E-05	0,00195
6	0	0	0	0

Таблиця 2.
Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 11{,}45$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0156	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257
0,2444	8,21E-05	-0,00026	0,000353	0,00269
1,0654	-8,6E-07	1,09E-06	7E-05	0,00279
1,9958	-1,1E-06	2,59E-06	6,7E-05	0,00279
3,1835	5,56E-07	-1,3E-05	0,000118	0,00273
7	0	0	0	0

Таблиця 3.
Коефіцієнти сплайн апроксимації при $\sigma_{11} = 15{,}3$

tj	A0	A1	A2	A3
0,0156	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257
0,2444	8,21E-05	-0,00026	0,000353	0,00269
1,0654	-8,6E-07	1,09E-06	7E-05	0,00279
1,9958	-1,1E-06	2,59E-06	6,7E-05	0,00279
3,1835	5,56E-07	-1,3E-05	0,000118	0,00273
7	0,007807	-0,00593	0,001737	0,00257

З таблиць 1-3 бачимо, що кількість інтервалів розбиття відрізняється. Це пов'язано з тим, що чим більше інтервалів розбиття, тим точнішою є сплайн апроксимація експериментальних даних. Для першої кривої для досягнення точності апроксимації не менше 95% достатньо трьох інтервалів, для другої і третьої кривої для досягнення даної точності знадобилось 5 інтервалів розбиття [4].

3. Обгрунтування застосування моделі в'язкопружності

Побудова сплайн апроксимації кривих повзучості є першим етапом при виборі моделі в'язкопружного деформування. Розрізняють лінійні і нелінійні моделі в'язкопружного деформування [3]. Матеріал вважають лінійно-в'язкоупружним, якщо функція повзучості $J(t)$ інваріантна по відношенню до рівня напруження $\sigma_m \left(m = \overline{1,k}\right)$

$$J_1(t) = \frac{\varepsilon(t,\sigma_1)}{\sigma_1} = J_2(t) = \frac{\varepsilon(t,\sigma_2)}{\sigma_2} = \ldots = J_m(t) = \frac{\varepsilon(t,\sigma_m)}{\sigma_m},$$

а розрахункове значення квантиля статистики $t_{\alpha,k}$ більше його критичного табличного значення $t^*_{\alpha,k}$. Тобто виконується умова

$$t_{\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} J_k(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{S_j(t_j)} \delta \bar{J}(t_j) > t^*_{\alpha,k}.$$

Тут $J_k(t_j)$ – значення функції повзучості в момент часу t_j при напруженнях σ_k; $\bar{J}(t_j)$ вибіркове середнє функції повзучості [4].

Для побудови єдиної функції повзучості аналітичні значення кривих повзучості діляться на відповідні значення напружень, сплайн апроксимація кривих дозволяє знайти значення функції повзучості в довільний момент часу визначеного інтервалу.

Величина похибки δ в розрахунках прийнята рівною $\pm$5%, а ймовірність p попадання експериментальних функцій повзучості в інтервал, обмежений величиною похибки δ становить 90%.

На рис. 2 як приклад наведено функції поздовжньої $J_{11}(t_l)$ і поперечної повзучості $J_{22}(t_l)$ оргскла СТ-1.

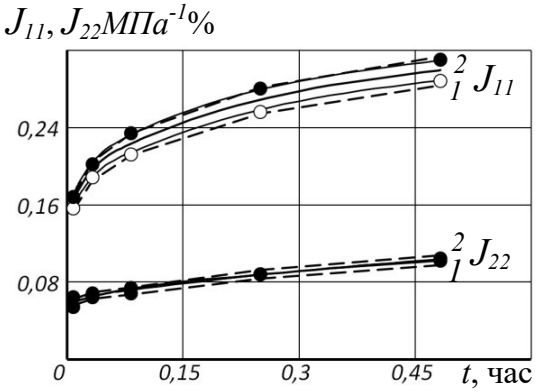

Рис. 2 – Функції поздовжньої і поперечної повзучості оргскла СТ-1

Тут суцільними лініями нанесено апроксимацію дискретних значень функцій повзучості згладжуючими кубічними сплайнами, на основі

яких розраховувалось вибіркове среднє $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$. Штриховими лініями нанесено межі інтервала, який відповідає величині максимальної похибки $\delta_{\max} = \pm 5\%$ від величин $\bar{J}_{11}(t_l)$ і $\bar{J}_{22}(t_l)$. Як видно з рис.2, склопластик СТ1 проявляє лінійність в'язкопружних властивостей при даних напруженнях на всьому проміжку, що досліджується, а тому до даного матеріалу можна застососувати лінійну теорію в'язкопружності.

4. Висновки

У роботі розглядається актуальна тема моделювання процесів повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Еесперементальні дані на поздовжню повзучість представлено у вигляді дискретних значень деформацій при постійних напруженнях у певний момент часу. Функції, що задані дискретно за допомогою таблиць, апроксимуються згладжуючими кубічними сплайнами. Дана апроксимація дозволяє отримати досить точну апроксимацію експериментальних даних, від яких суттєво залежать подальші розрахунки.

За допомогою сплайн апроксимації кривих досліджується лінійність або нелінійність матеріалу, що дозволяє обрати модель в'язкопружного деформування.

Список використаних джерел

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н.Работнов. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости / Р.М. Кристенсен // Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. *Голуб В. П.* К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В. С. Рагулина // Теорет. и прик. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Теор. и прикл. механика.- 2014.- Вып 8 (54).- С. 45-56

References

1. RABOTNOV, U.N. (1966) *Polzuchest` elementov konstrukcii.* Moskva: Nauka.
2. KRISTENSEN, R.M. (1974). *Vvedenie v teoriu vyazkouprugosti*. Moskva: Mir.
3. GOLUB,V.P., KOBZAR,U.M., RAGULINA, V.S. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosti izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. 5(51). p. 26-35.
4. GOLUB, V.P., KOBZAR, U.M., FERNATI,P.V. (2014). K resheniu zadach polzuchesti izotropnih nelineyno-vyazkouprugih materialov pri slognom napryagennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mehanika*. 8(54). p. 45-56.

Надійшла до редколегії 28.05.2023

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).