УДК 539.3

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

**Чисельно-аналітичний розв'язок
задачі про демпфірування ізотермічних
коливань прямокутної в'язкопружної
пластини**

**Numerical-analytic solution of the problem
about the damping isothermal vibrations of
viscoelastic rectangular plates**

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Розглянуто демпфірування коливань прямокутних пластин за допомогою як в'язкопружних шарів, так і за допомогою п'єзоелектричних включень. Для моделювання в'язкопружних властивостей пасивних і п'єзоактивних матеріалів використовуються лінійні моделі в'язкопружності інтегрального типу, які є найефективнішими для моделювання дисипативних властивостей матеріалів у лінійній області.

Ключові слова: активне демпфірування, актуатори.

The damping of vibrations of rectangular plates by means of both viscoelastic layers and using piezoelectric inclusions is considered. For modeling viscoelastic properties of passive and piezoelectric materials, linear models of integral type viscoelasticity are used, which are most effective for simulating the dissipative properties of materials in the linear region. In the case of taking into account the influence of the piezoelectric inclusions on the rigid characteristics of the passive plate and in other types of boundary conditions (for example, with rigid fixing of the ends), the finite element method was used to solve the problem of damping. The solutions of concrete problems of damping of stationary and non-stationary vibrations of plates using analytical and finite element methods are given. On the basis of the aforementioned approach, algorithms for solving dynamical problems with both fully and partially electrodes are implemented.

Key Words: active damping, actuators.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Метою даної роботи є моделювання в'язкопружних властивостей пасивних і п'єзоактивних матеріалів з використанням лінійних моделей в'язкопружності інтегрального типу, які є найефективнішими для моделювання дисипативних властивостей матеріалів у лінійній області.

2. Постановка задачі.

Розглянемо ортотропну в'язкопружну пластину, яка знаходиться під дією динамічного поверхневого стаціонарного або нестаціонарного навантаження. Пластина складається з довільного числа пакетів металевих, полімерних або композитних пасивних (без п'єзоефекту) шарів. На верхній і нижній поверхнях пасивної пластини розміщено в'язкопружні п'єзоелектричні ша-

ри довільної в плані конфігурації, одні з яких виконують функції сенсора, а інші – актуатора. Кількість п'єзошарів в плані та їх геометрична конфігурація вибираються з міркувань найефективнішого демпфірування стаціонарних або нестаціонарних коливань пасивного пакету. Зокрема, при використанні першого підходу, ці шари можуть покривати всю поверхню пасивної пластини, а демпфірування досягається за рахунок вибору тієї або іншої конфігурації електродів та підведення до них різниці потенціалів необхідної фази та амплітуди. При використанні іншого підходу маємо складну конструктивно-неоднорідну як по товщині, так і в плані пластину. Необхідно мати на увазі, що наведені нижче рівняння описують не пластину в цілому, а кожен її пластинчатий елемент скінчених розмірів (включення, пляма) окремо.

Розглянемо найпростіший випадок граничних умов, що відповідають шарнірному закріпленню торців пластини. Вважаємо, що пластина має симетричну по товщині структуру і навантажена відомим стаціонарним чи нестаціонарним поверхневим навантаженням. Для демпфірування коливань пластини будемо використовувати прямокутні в плані п'єзоелектричні актуатори. Необхідно вибрати найефективніше розміщення актуаторів (електродів) та їх розміри. Для випадку п'єзосарів, які мають однакові електро-механічні властивості та протилежні напрямки поляризації, вирази для жорсткісних характеристик залежать від присутності чи відсутності електродів між пасивним і п'єзоактивними шарами. При цьому рух пластини описується такою крайовою задачею:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} + q(x, y, t) = 0, \quad (1)$$

$$w = 0, \quad D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_0, \quad (x = 0; \quad x = a);$$

$$w = 0, \quad D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = M_0, \quad (y = 0; \quad y = b)$$

при нульових початкових умовах.

3. Алгоритм розв'язання задачі.

Розв'язок даної задачі шукається у вигляді:

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y \quad (2)$$

Для прямокутного в плані включення, яке має розміри c, d та координати центра ξ, η , вираз для викликаного актуатором моменту представимо у формі:

$$M_0 = \sum_p \sum_q M_{pq}(t) \sin k_p x \sin p_q y, \quad (3)$$

де

$$M_{mn}(t) = \frac{16 M(t)}{abk_m p_n} \sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin \frac{k_m c}{2} \sin \frac{p_n d}{2},$$

а $M(t)$ пропорційне підведеній до актуатора різниці потенціалів. Поверхнєве навантаження представляється в такій же формі:

$$q(x, y, t) = \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \sin k_m x \sin p_n y. \quad (4)$$

Підставляючи (2)-(4) у варіаційне рівняння [1], після використання традиційної варіаційної техніки одержимо інтегро-диференціальне рівняння за часом:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Delta_{mn} * w_{mn} + p_{mn}(t) - M_{mn}(t) = 0 \quad (5)$$

з нульовими початковими умовами. Тут

$$\Delta_{mn} = (D_{11} k_m^4 + 2(D_{12} + D_{66}) k_m^2 p_n^2 + D_{22} p_n^4) / \tilde{\rho},$$

$$M_{mn} = M_{mn} / \tilde{\rho}, \quad p_{mn} = q_{mn} / \tilde{\rho}.$$

$$p_{mn}(t) = p_{mn} H(t), \quad M_{mn}(t) = m_{mn} H(t), \quad (5')$$

де $H(t)$ – функція Хевісайда.

Застосування методу осереднення приводить до такого розв'язку цього рівняння [1]:

$$w_{mn}(t) = \frac{p_{mn} - m_{mn}}{\Delta_{mn}^2} - \exp\left(-\frac{\Delta_{mn}}{2} t\right) \times$$

$$\times \left[\frac{A_{mn}(p_{mn} - m_{mn})}{\Delta_{mn}^2 (2 - B_{mn})} \sin\left(\frac{B_{mn}}{2} t\right) - \frac{(p_{mn} - m_{mn})}{\Delta_{mn}^2} \cos\left(\frac{B_{mn}}{2} t\right) \right]. \quad (6)$$

Тут A_{mn}, B_{mn} відповідно синус – і косинус – перетворення Фур'є ядер $\Delta'_{mn}(t)$. Як видно з (6), при $p_{mn} = m_{mn}$ відповідна мода не збуджується. Тому якщо розмістити на поверхні пластини s актуаторів, можна компенсувати s мод коливань і суттєво зменшити амплітуду коливань пластини. Для оптимального вибору координат центра актуатора та його розмірів з метою компенсації відповідної моди необхідно розглянути задачу про вимушені коливання пластини, коли

$$p_{mn}(t) = p_{mn} \cos \omega t. \quad (7)$$

Якщо пластина не контролюється, тобто до актуатора не підводиться різниця потенціалів, то розв'язок крайової задачі (1) має вигляд:

$$w_{mn} = -p_{mn}^0 / \Delta_{mn},$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \Delta'_{mn} + i\Delta''_{mn} - \tilde{\rho}\omega_{mn}^2 = (D'_{11} + iD''_{11})k_m^4 + \\ & 2[(D'_{12} + iD''_{12}) + 2(D'_{66} + iD''_{66})]k_m^2 p_n^2 + \\ & + (D'_{22} + iD''_{22})p_n^4 - \tilde{\rho}\omega_{mn}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для шарнірного закріплення резонансна частота визначається формулою:

$$\tilde{\rho}\omega_{mn}^2 = \Delta'_{mn}. \quad (8)$$

При цьому

$$w_{mn} = i p_{mn}^0 / \Delta'_{mn}.$$

Якщо $D''_{mn} = D'_{mn} \tan \delta$, то

$$w_{mn} = i p_{mn}^0 / \Delta'_{mn} \tan \delta.$$

Як видно, при $\tan \delta \ll 1$ прогин буде дуже великим, хоч і скінченним. Зі збільшенням тангенса кута втрат прогин буде зменшуватися. Тепер нехай до актуатора підведена різниця потенціалів, яка змінюється за гармонічним законом з частотою поверхневої сили.

Тоді на резонансі маємо:

$$w_{mn} = i [p_{mn}^0 - (k_m^2 + p_n^2) m_{mn}^0] / \Delta'_{mn} \tan \delta. \quad (9)$$

На кожному актуаторі різниця потенціалів постійна. Тому ми можемо вибрати у виразі (9) довільно тільки одне значення різниці потенціалів на кожному актуаторі. Якщо на поверхню пластини нанесено один актуатор, ми можемо компенсувати тільки одну складову поверхневого навантаження у виразах (6), (9). Як правило, найбільш енергоємною є перша мода коливань, що відповідає індексам $m = n = 1$. При необхідності компенсації декількох мод коливань, потрібно збільшити кількість актуаторів. Для компенсації будь-якої з гармонік необхідно різницю потенціалів вибирати з умови рівності нулеві чисельника виразу (9), тобто покласти

$$p_{mn}^0 - (k_m^2 + p_n^2) m_{mn}^0 = 0. \quad (10)$$

Тоді розв'язок матиме вигляд:

$$w = \sum_{r \neq m} \sum_{s \neq n} \frac{p_{rs}^0 - (k_r^2 + p_s^2) m_{rs}^0}{\Delta_{rs}} \sin k_r x \sin p_s y. \quad (11)$$

$$\text{Тут } \Delta_{rs} = \Delta'_{rs} + i\Delta''_{rs} - \tilde{\rho}\omega_{mn}^2. \quad (12)$$

Як видно з (11), (12), прогин різко зменшується із-за відсутності резонансного члена в (11) і швидкої збіжності ряду Фур'є.

Якщо враховується вплив п'єзошарів на жорсткісні характеристики пластини або розглядаються інші типи граничних умов (наприклад, жорстке закріплення торців), то приходимо до складної задачі для структурно-неоднорідної як по товщині, так і в плані пластини. У цьому випадку знайти будь-які точні аналітичні розв'язки досить важко.

Задачу можна суттєво спростити, якщо використати, наприклад, тришарову пластину, яка складатиметься з пасивного середнього шару та двох п'єзоактивних шарів протилежної поляризації, які покривають всю поверхню пластини. При використанні такого підходу компенсація зовнішнього механічного навантаження досягається нанесенням на п'єзошари нескінченно тонких електродів необхідної конфігурації, до яких підводиться різниця потенціалів, яка вибирається з вищевказаних міркувань. Можна також повністю покрити п'єзошари електродами і потім розрізати електроди на плями необхідної конфігурації.

Для розв'язку задачі активного демпфірування стаціонарних і нестаціонарних коливань можна використати чисельні методи, зокрема, метод скінченних елементів.

Розглянемо техніку використання цього методу для випадку демпфірування нестаціонарних коливань, коли поведінка ізотропного матеріалу описується моделлю Фойгта, а поверхневе навантаження змінюється за часом по закону $q = q_0 H(t)$, де $H(t)$ - функція Хевісайда. При цьому всі оператори в (5') мають вигляд:

$$D_{kl} = D_{kl}^0 + D_{kl}^1 \frac{\partial}{\partial t}. \quad (13)$$

Для згаданого вище механічного навантаження різниця потенціалів буде також змінюватись в часі по закону $V(t) = V_0 H(t)$. Тоді

$$M_0 = \frac{1}{2} \gamma_{11} (h_1 + h_2) V_0 H(t). \quad (14)$$

Константи $E_1, E_2, C_1, C_2, \nu_1, \nu_2$ характеризують пружні й дисипативні властивості пасивного матеріалу [1], а

$$\gamma_{11} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E (1 - \nu_1)},$$

$$\nu_1 = -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}, \quad k_p^2 = \frac{2 d_{31}^2}{S_{11}^E (1 - \nu_1) \varepsilon_{33}^T}.$$

Для шарнірного закріплення торців пластини рівняння (5) прийме вигляд:

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + 2\mu_{mn} \frac{dw_{mn}}{dt} + \omega_{mn}^2 w_{mn} = F_{mn} H(t),$$

де

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D_{11}}{\tilde{\rho}} (k_m^2 + p_n^2)^2, \quad \mu_{mn} = \frac{D_{11}}{2D_{11}} \omega_{mn}^2,$$

$$F_{mn} = \frac{16}{ab k_m p_n \tilde{\rho}} [p_0 - M_0 (k_m^2 + p_n^2)].$$

Розв'язок рівняння (15) повинен задовольняти нульовим початковим умовам. Необхідно зауважити, що для моделі Фойгта це рівняння є точним, а при використанні методу осереднення для рівнянь стану інтегрального типу воно дає наближений розв'язок. Для вказаного типу навантаження можна одержати точний розв'язок, який має вигляд

$$w = \frac{16}{ab D_{11}} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{p_0 - (k_m^2 + p_n^2) M_0}{k_m p_n (k_m^2 + p_n^2)^4} \times$$

$$\times \left[1 - e^{-\mu_{mn} t} \left(\cos \omega_{mn} t + \frac{\mu_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right) \right] \sin k_m x \sin p_n y,$$

(16)

$$\text{де} \quad \omega_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \mu_{mn}^2}.$$

Як і у загальному випадку, вибором різниці потенціалів відповідно до залежності

$$V_0 = \frac{2p_0}{\gamma_{11}(h_1 + h_2)(k_m^2 + p_n^2)},$$

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖТТУ, 2005. - 428 с.

можна виключити будь-яку гармоніку в співвідношенні (16). Компенсуючи основну гармоніку, ми суттєво зменшимо прогин пластини. Аналітичний розв'язок (16) може бути еталоном при розробці чисельних методів моделювання демпфірування коливань за допомогою п'єзоелектричних включень, зокрема і методу скінченних елементів. Для моделі Фойгта варіаційне рівняння в просторі зображень по Лапласу має вигляд:

$$\delta \bar{\mathcal{E}}(x, y, z) = 0, \quad (17)$$

де

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \int_F \left\{ (D_{11} + s D_{11}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + 2(D_{12} + s D_{12}) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \right.$$

$$+ (D_{22} + s D_{22}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 + 2(D_{66} + s D_{66}) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 +$$

$$\left. + \tilde{\rho} s^2 \bar{w} - 2\bar{p}_0 \bar{w} - 2\bar{M}_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy.$$

Для розв'язку задачі (17) можна застосувати описаний вище метод скінченних елементів. На основі вказаного вище підходу можна реалізувати алгоритми розв'язку динамічних задач як з повністю, так і з частково електродованими поверхнями.

4. Висновки

У випадку врахування впливу п'єзовключень на жорсткісні характеристики пасивної пластини та при інших типах граничних умов (наприклад, при жорсткому закріпленні торців) для розв'язку задачі демпфірування був застосований метод скінченних елементів. Розглянуто розв'язки конкретних задач демпфірування стаціонарних та нестаціонарних коливань пластин з використанням як аналітичних, так і скінченно-елементних методів. На основі вказаного вище підходу можна реалізувати алгоритми розв'язку динамічних задач як з повністю, так і з частково електродованими поверхнями.

References

1. KARNAUKHOV, V. G., MIKHAILENKO, V. V. (2005). *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmicheskoy nagruzhenii*. Zhitomir: ZHTTU.

Надійшла до редколегії 23.12.18