УДК 519.21.

Нікітін А. В.¹, к.ф.-м.н., доц.,
Балясникова О. А.², викладач

**Оптимізація функціоналів в умовах
невизначеності для стохастичних
диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у
гільбертових просторах**

¹Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: nikitin2505@gmail.com,

²Державний вищий навчальний заклад
«Чернівецький індустріальний коледж», 58001,
м. Чернівці, вул. Садова, 8,
e-mail: 1 oksana.balyasnikova@gmail.com

A.V. Nikitin¹, PhD.,
O. A. Baliasnikova, lecturer

**Optimization of functionals under
uncertainties for Ito-Skorokhod stochastic
differential equations in Hilbert spaces**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: nikitin2505@gmail.com,

²State Higher Educational Institution “Chernivtsi
Industrial College”, 58001, Chernivtsi, Sadova st, 8,
e-mail: 1 oksana.balyasnikova@gmail.com

У статті для стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода досліджуються проблеми оптимізації функціоналів в умовах невизначеності у гільбертових просторах. Мета статті – встановити низку тверджень, в яких доведено існування та побудовано вигляд μ оптимальних керувань для таких рівнянь..

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, гільбертів простір, оптимізація функціоналів в умовах невизначеності.

In the article for the stochastic differential equations of Ito-Skorokhod, problems of optimization of functionals under conditions of uncertainty in Hilbert spaces are investigated. Purpose of the article is to investigate some properties of stochastic differential equations in Hilbert spaces. These objects arise in diverse areas of applied mathematics as models for various natural phenomena, in particular, the evolution of complex systems with infinitely many degrees of freedom. For instance, one may think of the liquid fuel motion in the tank of a spacecraft. Spacecraft constructors should take into account this motion, for it influences heavily the path of a spacecraft. Also, optimization of the motion is an issue of principal importance. It is not trivial to carry over the results concerning stochastic differential equations in finite-dimensional spaces to the infinite dimensional case. We give some statements, in which the existence, uniqueness is proved and the explicit form μ -optimal controls for such equations is constructed, in particular, μ -optimal control is found as a linear inverse relationship.

Keywords: stochastic differential equation, space of guillotine, optimization of functionals under uncertainty.

Статтю представив проф. Пашко А.О.

Вступ

Метою роботи є дослідження деяких властивостей стохастичних диференціальних рівнянь в гільбертових просторах. Ці об'єкти виникають у різних областях прикладної математики як моделі для різних явищ природи, зокрема, еволюція складних систем з нескінченною кількістю ступенів свободи [3]. Наприклад, рух рідкого палива в резервуарі космічного апарату [4]. Конструктори космічних

апаратів повинні враховувати цей рух, оскільки він сильно впливає на шлях космічного апарату. Оптимізація руху має принципове значення. Перенесення результатів, які стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на нескінченновимірний випадок є зовсім не тривіальним.

Постановка задачі

Розглянемо у сепарабельному гільбертовому просторі X рівняння

$$\begin{aligned} dx(t) &= a(t, x(t), u(t), \theta)dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, x(t), u(t), \theta) dW_k(t), \quad (1) \\ x(0) &= x_0, \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

де x_0 – випадковий вектор, що не залежить від скалярних вінерових процесів $W_k(t)$, $u(t)$ – функція з гільбертового простору H , норма якої інтегрована на $(0, T)$, θ – вектор параметрів, що належить Θ простору $\square^n$. Будемо вважати, що функції $a_1(t, x, \theta) = a(t, x, u(t), \theta)$, $b_{1k}(t, x, \theta) = b_k(t, x, u(t), \theta)$ при кожному параметрові θ , і функції $u(t) \in U \subseteq L_2(H)$ – задовольняють умовам існування та дності розв’язків рівняння (1), де $L_2(H)$ – простір функцій з H , норми яких інтегровані з квадратом на $(0, T)$.

Нехай також на розв’язках рівняння (1) заданий функціонал

$$I(u, \theta) = \int_0^T E f(x(t), u(t), t) dt + E \Phi(x(T)), \quad (2)$$

де відповідні середні значення існують і функції $E f(x(t), u(t), t)$ є інтегрованими за Лебегом на $(0, T)$.

Проблема, яку ми дослідили, полягала в тому, щоб знайти функцію $\hat{u}(t)$, яку називатимемо керуванням, що не залежить від параметра θ і для якої в певному сенсі функціонал $I(u, \theta)$ має мінімальне значення.

Покладемо, що в Θ – виділена σ -алгебра підмножин B і на B задана імовірнісна міра $\mu(\cdot)$.

Означення 1. Нехай міра $\mu(\cdot)$ така, що виконується умова

$$I(u) = \int_{\Theta} I(u, \theta) \mu(d\theta) < \infty.$$

Назвемо функцію $\hat{u}(t) \in \text{Argmin } I(u)$ μ -оптимальним керуванням рівняння (1) з функціоналом (2).

Зауважимо, що якщо Θ – скінченна множина, тобто $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, то міра $\mu(\cdot)$

зосереджена в точках θ_k , $k=1, \dots, N$, причому, якщо позначити $\mu(\theta_k) = p_k$, то

$$I(u) = \sum_{k=1}^N p_k I(u, \theta_k),$$

і тоді μ -оптимальне керування є векторним мінімумом за Парето в багатокритеріальній задачі. Далі ми будемо вважати, що $f(x, u(t), t) \geq 0$, $\Phi(x) \geq 0$.

Введемо скалярну функцію $V(t, x)$, $x \in X$, що задовольняє рівнянню

$$\begin{aligned} \Phi(x) - V(t, x) &+ \int_t^T (a(\tau, x, u(\tau), \theta), V'(\tau, x)) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \sum_{k=1}^{\infty} (V''(\tau, x) b_k(\tau, x, u(\tau), \theta), b_k(\tau, x, u(\tau), \theta)) d\tau + \\ &+ \int_t^T f(x, u(\tau), \tau) d\tau = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

де $V'(\tau, x)$, $V''(\tau, x)$ – перша та друга похідні Фреше по змінній x .

Зауважимо, що якщо така функція існує, то вона є неперервною по t , і майже скрізь виконується рівність

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &+ (a(t, x, u(t), \theta), V'(t, x)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} V''(t, x) b_k(t, x, u(t), \theta), b_k(t, x, u(t), \theta) + \\ &+ f(x, u(t), t) = 0, \quad (4) \end{aligned}$$

$$V(T, x) = \Phi(x).$$

Результати

Лема 1. Припустимо, що існує функція $V(t, x)$, що є розв’язком рівняння (3) та існує константа $c(\theta) > 0$ така, що

$$\begin{aligned} |V(t, x)| &\leq c(\theta)(1 + |x|^2), \\ |V'(t, x)| &\leq c(\theta)(1 + |x|), \end{aligned}$$

$$\|V''(t, x)\| \leq c(\theta).$$

Тоді має місце рівність

$$I(u) = \int_{\Theta} E V(0, x_0) \mu(d\theta). \quad (5)$$

Доведення слідує з того, що якщо ввести випадковий процес $y(s, t, x)$, що є розв’язком рівняння

$$dy(s, t, x) = a(s, y, u(s), \theta)ds + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, y, u(s), \theta)dW_k(s) \\ y(s, t, x) = x, \text{ при } s \geq t,$$

і застосувати формулу Іто диференціювання до процесу $\xi(s) = V(s, y(s, t, x))$, то на підставі існування відповідних середніх, одержимо

$$E\xi(T) - \xi(t) = - \int_t^T E f(y(s, t, x), u(s), s)ds,$$

а оскільки $\xi(t) = V(t, x)$, $E\xi(T) = E\Phi(y(T, x, t))$, то одержуємо, що

$$V(t, x) = E \left(\int_t^T f(x(s), u(s), s)ds + \Phi(x(T)) \right) |_{x(t)=x},$$

а значить,

$$EV(0, x_0) = I(u, \theta),$$

тобто,

$$I(u) = \int_{\Theta} EV(0, x_0) \mu(d\theta),$$

що і потрібно було довести.

Лема2. Нехай функції $f_1(t, u, \theta) = E f(t, u, \theta)$ та $f_2(u, t) = E\Phi(x(T))$ – слабонапівнеперервні знизу по змінній $u \in L_2(H)$ при кожному дійсному $\theta \in \Theta$ і виконується одна з двох умов

1) Множина U є обмеженою і слабо замкнутою;

2) $\lim_{u \rightarrow \infty} I(u) = \infty$.

Тоді існує μ -оптимальне керування.

Доведення цього твердження випливає із загальних теорем існування точки мінімуму в гільбертових просторах.

Припустимо далі, що мають місце рівності

$$a(t, x, u(t), \theta) = A(t, u(t), \theta)x, \\ b_k(t, x, u(t), \theta) = b_k(t, u(t), \theta),$$

де $A(t, u(t), \theta)$ – обмежені лінійні оператори в просторі X .

Лема 3. Позначимо через $\Phi(t, s)$ операторну функцію, яка є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(t, s)}{dt} = A(t, u(t), \theta)\Phi(t, s), \quad (6) \\ \Phi(s, s) = E,$$

і припустимо, що збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(c, u(t), \theta)|^2,$$

функції $A(t, u(t), \theta)$, $b_k(t, u(t), \theta)$ неперервні по змінним $t \in [0, T]$ та $u \in U$. Тоді розв'язок рівняння

$$dx(t) = A(t, x(t), u(t), \theta)dt + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, u(t), \theta)dW_k(t), \quad (7) \\ x(0) = x_0,$$

має вигляд

$$x(t) = \Phi(t, 0)x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \Phi(t, s)b_k(s, u(s), \theta)dW_k(s). \quad (8)$$

Доведення цього твердження випливає із означення розв'язку рівняння (7) і перевірки того, що функція (8) задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(s, x(s), u(s), \theta)ds + \\ + \int_0^t b_k(s, u(s), \theta)dW_k(s)$$

Будемо далі розглядати той випадок, коли функції $f(x, u, t)$ та $\Phi(x)$ мають вигляд $f(x, u, t) = (Q_1 x, x)$, $\Phi(x) = (Q_0 x, x)$, де Q_0, Q_1 – невід'ємнозначні обмежені оператори.

Позначимо через $P(t)$ узагальнений розв'язок операторного рівняння

$$-\frac{dP}{dt} = A^*(t, u(t), \theta)P + PA(t, u(t), \theta) + Q_1, \quad (9)$$

$$P(T) = Q_0.$$

Теорема 1. Функція $I(u, \theta)$ має вигляд

$$I(u, \theta) = E(P(0)x_0, x_0) + c(0),$$

де

$$c(0) = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (P(t)b_k(t, u(t), \theta), b_k(t, u(t), \theta))dt$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (4) у вигляді

$$V(t, x) = (P(t)x, x) + c(t),$$

оскільки

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (P'(t)x, x) + c'(t),$$

де

$$c'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (P(t)b_k(t, u(t), \theta), b_k(t, u(t), \theta)),$$

а

$$V'(t, x) = 2P(t)x, \quad V''(t, x) = 2P(t),$$

то враховуючи рівняння для $P(t)$, одержимо, що функція $V(t, x)$ є розв'язком рівняння (4), звідки і одержимо потрібну рівність.

Зауваження 1. Рівняння (9) має єдиний розв'язок, який може бути поданий у вигляді

$$P(t) = \Phi(t, T)Q_0\Phi^*(t, T) + \int_t^T \Phi(t, \tau)Q_1\Phi^*(t, \tau)d\tau,$$

де операторна функція є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(t, s)}{dt} = -A^*(t, u(t), \theta)\Phi(t, s),$$

$$\Phi(s, s) = E.$$

Розглянемо далі той випадок, коли $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} dx &= A(t, \theta)x(t)dt + B(t)u(t)dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t)u(t)dW_k(t), \quad (10) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

де $A(t, \theta)$, $B(t)$, $D_k(t)$ – обмежені лінійні оператори, норми яких є неперервними на $[0, T]$. Введемо функціонал

$$\begin{aligned} I(u, \theta) &= E(Q_0 x(T), x(T)) + E \int_0^T (Q_1 x(t), x(t))dt + \\ &+ \int_0^T (Q_2 u(t), u(t))dt, \end{aligned}$$

де Q_0 , Q_1 , Q_2 – невід'ємно визначені лінійні оператори.

Теорема 2. Нехай існує константа $\gamma^2(\theta) > 0$ така, що $\int_{\Theta} \gamma^2(\theta)\mu(d\theta) < \infty$ і виконується нерівність

$$\begin{aligned} &\int_0^T ((Q_2 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^* P(t) D_k) u(t), u(t))dt \geq \\ &\geq \gamma^2(\theta) \int_0^T |u(t)|^2 dt \end{aligned}$$

для всіх $u(\cdot) \in L_2(H)$.

Множина допустимих керувань співпадає з простором $L_2(H)$. Тоді існує єдине μ -оптимальне керування, яке має вигляд

$$\hat{u}(t) = - \int_{\Theta} \tilde{Q}_2^{-1}(t) B^*(t) \psi(t, \theta) \mu(d\theta), \quad (11)$$

$$\tilde{Q}_2(t) = Q_2 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^* P(t) D_k,$$

де функція $\psi(t, \theta)$ знаходиться з розв'язку системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = A^*(t, \theta)\psi + Q_1 x_1(t), & \psi(T) = Q_0 x_1(T), \\ \frac{dx_1}{dt} = A(t, \theta)x_1 + B(t)\hat{u}(t), & x_1(0) = m_0, \quad m_0 = E x_0 \end{cases}$$

Доведення. Можна показати, що функціонал $I(u, \theta)$ має вигляд

$$I(u, \theta) = I_1(u, \theta) + E(P(0)(x_0 - m_0), x_0 - m_0),$$

де

$$\begin{aligned} I_1(u, \theta) &= (Q_0 x_1(T), x_1(T)) + \int_0^T (Q_1 x_1(t), x_1(t))dt + \\ &+ \int_0^T (\tilde{Q}_2 u(t), u(t))dt, \end{aligned}$$

а функція $x_1(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t, \theta)x_1 + B(t)u(t), \quad x_1(0) = m_0.$$

Оскільки функціонал $I_1(u, \theta)$ – слабонапівнеперервний знизу по змінній $u(\cdot)$ в просторі $L_2(H)$ і для нього виконана оцінка

$$I_1(u, \theta) \geq \gamma^2(\theta) \int_0^T |u|^2 dt,$$

то функціонал

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Theta} I_1(u, \theta) \mu(d\theta) + \\ &+ E \int_{\Theta} (P(0)(x_0 - m_0), x_0 - m_0) \mu(d\theta) \end{aligned}$$

також буде слабонапівнеперервним знизу і

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} I(u) = \infty.$$

Крім того, $I(u)$ є сильно опуклим, а значить, існує єдина функція $\hat{u}(\cdot) \in \text{Arg min } I(u)$.

З умови

$$\frac{dI}{d\tau}(\hat{u} + \tau v)|_{\tau=0} = \int_{\Theta} \frac{d}{d\tau} I(\hat{u} + \tau v, \theta) \mu(d\theta) \equiv 0$$

для довільної функції $v \in L_2(H)$, одержимо потрібний вираз для функції $\tilde{y}(t)$.

Нехай далі $Q_1(t) = 0$.

Теорема 3. Функція $\hat{u}(t)$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння

$$\tilde{\Phi}_2(s)u(s) + \int_0^T B^*(\tau)\tilde{\Phi}(s, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = g(s),$$

де

$$\tilde{\Phi}(s, \tau) = \int_{\Theta} \Phi^*(\tau, s)Q_0\Phi(\tau, s)\mu(d\theta),$$

$$I g(s) = - \int_{\Theta} B^*(s)\tilde{\Phi}(s, 0)m_0\mu(d\theta),$$

а функція $\Phi(\tau, s)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\Phi(s, \tau)}{ds} = A(s, \theta)\Phi(s, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = E.$$

Доведення. Подамо $x_1(t)$ у вигляді

$$x_1(t) = \int_0^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds + \Phi(t, 0)m_0,$$

тобто функціонал $I_1(u, \theta)$ набуде такого вигляду

$$\begin{aligned} I_1(u, \theta) &= (Q_0 \int_0^T \Phi(T, s)B(s)u(s)ds, \int_0^T \Phi(T, s)B(s)u(s)ds) + \\ &+ \int_0^T (\tilde{Q}_2(t)u(t), u(t))ds \\ &+ 2(Q_0 \Phi(T, 0)m_0, \int_0^T \Phi(T, s)B(s)u(s)ds) = \\ &= \int_0^T \int_0^T (\Phi^*(T, \tau)Q_0\Phi(T, s)B(s)u(s), B(\tau)u(\tau))dsd\tau + \\ &+ 2 \int_0^T (\Phi^*(T, s)Q_0\Phi(T, 0)m_0, B(s)u(s))ds = \\ &= \int_0^T \int_0^T (\tilde{\Phi}_1(\tau, s)u(s), u(\tau))dsd\tau + 2 \int_0^T (b(s), u(s))ds, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\Phi}_1(\tau, s) = B^*\Phi^*(T, \tau)Q_0\Phi(T, s)B(s),$$

$$b(s) = B^*(s)\Phi^*(T, s)Q_0\Phi(T, 0).$$

З умови

$$\frac{d}{d\tau} I(u + \delta v)|_{\tau=0} = 0, \quad \forall v \in L_2(H),$$

одержимо потрібне інтегральне рівняння.

Зауваження 2. Аналогічне інтегральне рівняння можливо одержати і у випадку $Q_1 \neq 0$.

Далі розглянемо випадок, коли функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} dx(t) &= A(t)x(t)dt + B(t)u(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, \theta)dW_k(t) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

де $A(t)$, $B(t)$ – лінійні обмежені оператори, норми яких неперервні на $[0, T]$, x_0 – випадковий вектор, який не залежить від $W_k(t)$, $E x_0 = m_0$, кореляційний оператор якого є R_0 .

Нехай функціонал

$$I_1(u, \theta) = E(Q_0 x(T), x(T)) + E \int_0^T (Q_2(x(t), u(t))dt),$$

де Q_0 , Q_2 – невід'ємно визначені лінійні обмежені оператори, причому існує константа $c > 0$ така, що $(Q_2, u, u) \geq c|u|^2$.

Будемо шукати μ -оптимальне керування у вигляді лінійного оберненого зв'язку, тобто у вигляді $u(t) = K(t)x(t)$, де $K(t)$ – лінійний обмежений оператор, що діє із простору H у простір X і норма якого неперервна на $[0, T]$. μ -оптимальне керування визначимо з умови

$$\hat{K} \in \text{Arg min } I_1(K),$$

де

$$\begin{aligned} I_1(K) &= \int_{\Theta} I_1(K, \theta)\mu(d\theta), \\ I_1(K, \theta) &= E(Q_0 x(T), x(T)) + \\ &+ E \int_0^T (Q_2 K(t)x(t), K(t)x(t))dt, \end{aligned}$$

і функція $x(t)$ є розв'язком рівняння

$$dx(t) = A_1(t)x(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t, \theta)dW_k(t),$$

$$x(0) = x_0,$$

$$A_1(t) = A(t) + B(t)K(t).$$

Теорема 4. Нехай $S(t)$ є розв'язком рівняння

$$-\frac{dS(t)}{dt} = A^*(t)S(t) + S(t)A(t) - S(t)BQ_2^{-1}B^*S(t),$$

$$S(T) = Q_0$$

і виконується умова

$$\int_0^T \int_{\Theta} \sum_{k=1}^{\infty} (S(t)b_k(t, \theta), b_k(t, \theta)) dt \mu(d\theta) < \infty.$$

Тоді

$$\hat{K} = -Q_2^{-1}B^*(t)S(t)$$

і при цьому

$$I_1(\hat{K}) = E(S(0)x_0, x_0) +$$

$$+ \int_0^T \int_{\Theta} \sum_{k=1}^{\infty} (S(t)b_k(t, \theta), b_k(t, \theta)) dt \mu(d\theta).$$

Доведення . функціонал $I_1(K, \theta)$ подамо у вигляді

$$I_1(K, \theta) = E(S(0)x_0, x_0) +$$

$$+ E \int_0^T (Q_2^{-1}((Q_2 K + B^* S)x(t), (Q_2 K + B^* S)x(t))) dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (S(t)b_k(t, \theta), b_k(t, \theta)) dt,$$

і, оскільки

Список використаних джерел

1. Скороход А. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Київ: Наукова думка, 1987. – 328 с.
2. Наконечний О.Г. Гарантовані оцінки розв'язків лінійних рівнянь в гільбертовому просторі з випадковими параметрами / О.Г. Наконечний, М.М. Верес, Б.В. Сташук // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. -- №1(104), - С.85-96.
3. Da Prato G. and Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions, Cambridge University Press, 2014. 512 p.
4. Korpachevsky, N. D. Complete second order linear differential equations in a Hilbert space and hydrodynamics applications. Intern. Conf. Differential Equations and Related Topics, dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovsky, Russia, Moscow, May 22-27, 2001, Book of Abstracts. pp. 207-208.

$$I_1(K) \geq E(S(0)x_0, x_0) +$$

$$+ \int_0^T \int_{\Theta} \sum_{k=1}^{\infty} (S(t)b_k(t, \theta), b_k(t, \theta)) dt \mu(d\theta),$$

то нижня границя досягається при

$$\hat{K} = Q_2^{-1}B^*(t)S(t),$$

що і потрібно було показати.

Висновки

Для систем, що перебувають в умовах невизначеності та описуються стохастичними диференціальними рівняннями Іто-Скорохода у гільбертових просторах, можна поставити та розв'язати задачу оптимального керування, зокрема, з допомогою методу оптимізації функціоналів

References

1. SKOROKHOD A. (1987) Asymptotic methods of the theory of stochastic differential equations. – Kyiv: Naukova dumka.
2. NAKONECHNYI O., VERES M., STASHCHUK M. (2011) Guaranteed estimates of solutions of linear equations in a Hilbert space with random parameters // Journal of Computational and Applied Mathematics.
3. DA PRATO G., ZABCZYK J. (2014) Stochastic equations in infinite dimensions, Cambridge University Press.
4. KOPACHEVSKY, N. (2001) Complete second order linear differential equations in a Hilbert space and hydrodynamics applications. Intern. Conf. Differential Equations and Related Topics, dedicated to the Centenary Anniversary of I.G. Petrovsky, Russia, Moscow, May 22-27, 2001, Book of Abstracts.