УДК 519.9

Петрова Т.О.¹, к.ф.-м.н., доц.

**Один контрприклад для опуклого
наближення функцій, що мають дробову
похідну, при $r > 4$**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Petrova T. O.¹, PhD in Ph.-mat.s., As. Prof

**One counterexample for convex
approximation of function with fractional
derivatives, $r > 4$**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: tamarapetrova2703@gmail.com

Досліджується питання наближення функцій $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r > 4$ алгебраїчними поліномами $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$. Побудовано контрприклад, який узагальнює негативний результат роботи [9], в якій доведено, що для $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r > 4$ оцінка $|f(x) - p_n(x)| \leq c \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]$ є невірною. Також результат роботи поширює негативний результат наведений в роботі [10].

Ключові слова: наближення функції, простір Соболева, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.

We discuss whether or not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function $f \in W^r[0,1]$ by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function $f \in C^r[0,1] \cap \Delta^0$ where Δ^0 is the set of positive functions on $[0,1]$. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1],[2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3],[4],[8]. In [3],[4] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [8] is consider $r \in \mathbb{R}, r > 2$. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for $r > 2, r \in \mathbb{R}$. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in ([5],[6],[11]). In [5] is consider $r \in \mathbb{N}, r > 2$. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for $r \in \mathbb{N}, r > 2$. In [6] is consider $r \in \mathbb{R}, r \in (2;3)$. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for $r \in \mathbb{R}, r \in (2;3)$. In [11] is consider $r \in \mathbb{R}, r \in (3;4)$. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for $r \in \mathbb{R}, r \in (3;4)$. In [9] is consider $r \in \mathbb{R}, r > 4$. It was proved that for $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r > 4$ estimate (1) is not true. In this paper the question of approximation of function $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r > 4$ by algebraic polynomial $p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$ is consider. It is proved, that for $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^2, r > 4$, estimate (1) can be improved, generally speaking.

Key Words: approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ

Нехай $W^r[0,1], r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$. Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського – Тімана довівши, що кожену функцію $f \in W^r[0,1]$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$|f(x) - p_n(x)| \leq c(r) \left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n} \right)^r, n > r \quad (1)$$

де c - абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r=1,2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r[0,1]$, то існує монотонний многочлен p_n , такий, що має місце (1). В роботі GLSW [4] доведено, що для натурального $r > 2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $|D_{0+}^r f| \leq 1$ майже скрізь на $[0,1]$ (тут $D_{0+}^{r-1}f$ - лівостороння дробова похідна [1]). Будемо позначати через Π_n - множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 множину опуклих вниз функцій на $[0,1]$.

В роботах [5],[6],[11] було доведено, що оцінка (1) є невірною для $r \in (2;3), r \in (3;4)$ і $r > 4$ відповідно, $r \in \mathbb{R}$.

Основним результатом роботи є теорема, яка узагальнює результати робіт [9] та [10].

Основний результат.

Теорема. Нехай $r > 4, r \in \mathbb{R}$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$ така, що $\forall p_n \in \Pi_n \cap \Delta^2$

$$\text{або } \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty \quad (2)$$

$$\text{або } \limsup_{x \rightarrow 1} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty, \quad (3)$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ і $\psi(x)$ додатна функція на $(0;1)$ така, що $\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} \psi(x) = 0$.

Доведення.

Позначимо $m = [r] + 1, r > 4$, де $[r]$ - ціла частина r .

Покладемо:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^{m-1}}{(m-1)!}x + \frac{(b-x)^m}{m!} - \frac{b^m}{m!}, 0 \leq x \leq b \\ \frac{b^{m-1}}{(m-1)!}x - \frac{b^m}{m!}, b < x \leq 1 \end{cases}$$

, де $b = \frac{1}{4}$.

Розглянемо функцію $F(x) = x^{m-2}f(x)$.

Доведемо, що $F \in W^r[0,1]$. За *Теоремою 2.3* [7] маємо

$$D_{0+}^r F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt$$

Так як $F^{(k)}(0) = 0 \forall k = 0, \dots, m-1$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{\sum_{k=0}^{m-2} C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1) t^{m-2-k} f^{(m-k)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt$$

Таким чином, якщо $x \neq b$, то

$$D_{0+}^r F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \sum_{k=0}^{m-2} \frac{C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1) t^{m-2-k} (-1)^{m-k} (b-t)^k}{(x-t)^{r-m+1}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1) \int_0^x \frac{(-1)^{m-k} t^{m-2-k} (b-t)^k}{k! (x-t)^{r-m+1}} dt$$

Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1)}{k!} \cdot \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{r-m+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1)}{k!} \frac{x^{m-r}}{m-r} \leq$$

$$\frac{x^{m-r}}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{C_m^k (m-2)(m-3)\dots(m-k-1)}{k!} =$$

$$= \frac{x^{m-r}}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m!(m-2)!}{(k!)^2 ((m-k+2)!)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m!(m-2)!}{(k!)^2 ((m-k+2)!)^2}$$

Помітимо, що $D_{0+}^r (b+) = 0$ і

$$D_{0+}^r (b-) \leq \frac{b^{m-r}}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m!(m-2)!}{(k!)^2 ((m-k+2)!)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(m-r)} \sum_{k=0}^{m-2} \frac{m!(m-2)!}{(k!)^2 ((m-k+2)!)^2}$$

Таким чином $D_{0+}^r F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$ і обмежена. Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1} F(x) = \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m-1)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt \in \text{абсолютно}$$

неперервною на $[0,1]$. Таким чином, $F \in W^r[0,1]$.

Так як $F''(x) \geq 0 \forall x \in [0,1]$, то $F \in W^r[0,1] \cap \Delta^2$.

Нехай існує многочлен $h_n(x)$, степеня $\leq n$ який є опуклим вниз і для якого не виконується умова (2) з функцією $F(x)$. Тоді з деякою сталою A

$$\text{маємо: } |F(x) - h_n(x)| \leq Ax^2 \psi(x), 0 \leq x \leq b \text{ і}$$

$$h_n(0) = F(0) = 0, h'_n(0) = F'(0) = 0, h''_n(0) = F''(0) = 0.$$

Так як $h''_n(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$, то $h'_n(x)$ зростає і так як $h'_n(0) = 0$, то $\forall x \in [0,1]: h'_n(x) \geq 0$. Тоді

многочлен $h_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $\forall x \in [0,1]: h_n(x) \geq 0$.

Розглянемо многочлен

$$\tilde{h}_n(x) = h_n(x) - \frac{b^{m-2}}{2!(m-2)!} x^2, x \in [0,1]$$

$$\tilde{h}_n''(x) = h_n''(x) - \frac{b^{m-2}}{(m-2)!}$$

$$\tilde{h}_n''(0) = h_n''(0) - \frac{b^{m-2}}{(m-2)!} = -\frac{b^{m-2}}{(m-2)!}$$

За нерівністю Маркова маємо:

$$|\tilde{h}_n''(0)| = \frac{b^{m-2}}{(m-2)!} \leq$$

$$\leq 4n^2(n-1)^2 \|\tilde{h}_n\| \leq 4n^2(n-1)^2 \|h_n\| = 4n^2(n-1)^2 h_n(1)$$

$$\text{звідки } h_n(1) \geq \frac{b^{m-2}}{(m-2)! 4n^2(n-1)^2}. \text{ Маємо}$$

$$f(1) = \frac{b^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{b^m}{m!} = \frac{b^{m-1}}{(m-1)!} \left(1 - \frac{b}{m}\right) =$$

$$\frac{b^{m-2}}{(m-2)! 4n^2(n-1)^2} \frac{b \cdot 4n^2(n-1)^2}{m-1} \left(1 - \frac{b}{m}\right) <$$

$$< \frac{b^{m-2}}{(m-2)! 4n^2(n-1)^2} \frac{4}{m-1} \leq \frac{b^{m-2}}{(m-2)! 4n^2(n-1)^2}$$

Таким чином, $f(1) \neq h_n(1)$. Так як $F(1) = f(1)$, то $F(1) \neq h_n(1)$. Теорема доведена.

Висновки.

В роботі було побудовано контрприклад для класу функцій $f \in W^2[0,1] \cap \Delta^2, r > 4, r \in \mathbb{R}$, який узагальнює негативні результати отримані в роботах [9], [10].

Список використаних джерел

1. Теляковский С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами / С.А. Теляковский - Мат.сб. - 1966 - **13**, №79 – с.252-265
2. Gopengauz A.I., Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A.I. Gopengauz - Constr. Approx. – 1994-9, №77 – p.34-43
3. DeVore R.A., Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / DeVore R.A. and Yu X.M // Constr. Approx.–1985, №1–p.323–331.
4. Gonska H.H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, and H. -J. Wenz // Constr. Approx. -2000-26, №16 – p.603–629.
5. Петрова Т.О., Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова - праці Інституту математики НАН України «Математика та її застосування Теорія наближення функцій» -2005, №35 - с.107-112
6. Петрова Т.О., Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова - Вісник Київського університету. Фізико - математичні науки - 2006 -5, №4 – с.113–118
7. Samko S. G., Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko Kilbas A. A., and Marichev O.I. // Constr.Approx – 1987, №4 – p. 119-126
8. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова - Вісник Київського університету. Математика –Механіка-2003-2, №9-10 125–127.
9. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку / Т. О. Петрова, І. Л. Петрова - Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки -2017-16-с.145-151
10. K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation //Journal of Mathematical Analysis and Applications –2019– №474–P.467–479
11. Петрова Т.О., Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку $r \in (3,4)$ / Т. О. Петрова Вісник Київського університету. Математика–Механіка-2017, №2(38)– с.9-11

References

1. TELYAKOVSKIY S.A. (1966) Dve teoremy o priblizhenii funkciy algebraicheskimi polinomami, Mat. sb. 79, p.252-265
2. GOPENGAUZ A.I. (1994) Pointwise estimates of Hermitian interpolation 77, p.34-43
3. DeVore R.A. and YU X.M. (1985) Pointwise estimates for monotone polynomial approximation, Constr. Approx.,1 p.323–331.
4. H. H. GONSKA, D. LEVIATAN, I. A. SHEVCUK, and H. -J. WENZ (2000) Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations, Constr. Approx. 16, p.603–629.
5. PETROVA T.O., (2005) Kontrprzyklad u interpolyatsiinomu opuklomu nablyzhenni, Pratsi Instytutu matematyky NAN Ukrainy "Matematyka ta zastosuvannya. Teoriya nablyzhennia funtsii", 35 p.107–112.
6. PETROVA T.O. (2006) Kontrprzyklad u interpolyacijnomu opuklomu nablizhenni, praci Institutu matematiki NAN Ukrayini "Matematika ta yiyi zastosuvannya. Teoriya nablizhennya funkciy 4, p.113–118
7. SAMKO S. G., KILBAS A. A., and MARICHEV O.I. (1987) Fractional integrals and derivatives: theory and applications, Constr.Approx 4, p.119-126
8. PETROVA T.O. (2003) Pro potochkovi interpolyacijni ocinki monotonogo nablizhennya funkciy, sho mayut drobovu pohidnu, Visnik Kiyivskogo universitetu. Matematika–Mehanika 9-10, p.125–127
9. Petrova T.O., Pro potochkovi interpolyacijni ocinky` opuklogo nably`zhennya funkciy, shho mayut` drobovu poxidnu dovil`nogo poryadku / T. O. Petrova, I. L. Petrova - Matematy`chne ta komp'yuterne modelyuvannya. Seriya: Fyzy`ko-matematy`chni nauky` -2017-16-p.145-151
10. K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation //Journal of Mathematical Analysis and Applications –2019– №474–P.467–479
11. Petrova T.O., Pro potochkovi interpolyacijni ocinky` opuklogo nably`zhennya funkciy, shho mayut` drobovu poxidnu dovil`nogo poryadku $r \in (3,4)$ / Т. О. Petrova Visny`k Ky`yivs`kogo universy`tetu. Matematy`ka–Mehanika-2017, #2(38)– p.9-11

Надійшла до редколегії 04.12.18