УДК 519.21

Зімін О. І., магістр,
Кулініч Г. Л., д-р фіз.-мат. наук

**Про асимптотичну поведінку математичного
сподівання повної енергії гармонічного
осцилятора при випадковому збуренні**

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. акад. Глушкова 4-е
e-mail: 1997zimin@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. акад. Глушкова 4-е

O. I. Zimin, mast.,
G. L. Kulinich, Dr.Sci. (Phys.-Math.)

**About asymptotic behavior of the
mathematical expectation of the total energy of
the harmonic oscillator with random
perturbation**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: 1997zimin@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e

У даній статті знайдена асимптотична поведінка математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора без тертя під впливом енергетичного насоса з керуючим елементом вигляду стохастичного гармонічного осцилятора без тертя зі збуренням типу «білого шуму» у резонансному і нерезонансному випадках.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, повна енергія, білий шум.

In this article, the asymptotic behavior of the mathematical expectation of the total energy of a harmonic oscillator without friction under the influence of an energy pump with a controlling element of the form of a stochastic harmonic oscillator without friction with a white noise perturbation in resonant and non-resonant cases is found. During the analytical solving the problem of finding the mathematical expectation of the total energy of a harmonic oscillator with random perturbation, the properties of the Wiener process, the stochastic Ito integral, and the mathematical expectation of the product of stochastic integrals are used.

Key words: harmonic oscillator, total energy, white noise.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1. Вступ

Під гармонічним осцилятором без тертя при зовнішньому збуренні будемо розуміти тіло маси 1, рух якого описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + k^2 u(t) = q(t) \\ u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}, \quad (1)$$

де $q(t)$ – зовнішня збурна сила, $u_0, \dot{u}_0$ – початкові положення і швидкість осцилятора, $u(t), \dot{u}(t)$ – положення і швидкість осцилятора в момент часу $t > 0$, $k > 0$ – параметр осцилятора, $\varepsilon(t) = \frac{1}{2}[\dot{u}^2(t) + k^2 u^2(t)]$ – повна енергія осцилятора.

Відомо [10], що в детермінованих випадках:

1) $\varepsilon(t) = \varepsilon(0)$ при всіх $t > 0$, якщо $q(t) = 0$;

2) Повна енергія обмежена, якщо $q(t) = \cos \alpha t$,

$\alpha \neq k$, і $\varepsilon(t) \sim \frac{1}{2}t^2$ при $t \rightarrow \infty$ (резонанс) при $\alpha = k$.

Модель гармонічного осцилятора з неперервним випадковим зовнішнім збуренням, в якому математичне сподівання $E\varepsilon(t) \sim \sqrt{t}$ при $t \rightarrow \infty$ розглядалась у [8], $E\varepsilon(t) \sim t$ у [13], $E\varepsilon(t) \sim t^\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$ – у [11, 3], $\ln E\varepsilon(t) \sim t$ – у [1].

Фазовий «портрет» гармонічного осцилятора при випадковому зовнішньому збуренні процесом типу «білого шуму» вздовж вектора фазової швидкості осцилятора досліджувався в роботах [12, 5], під повним кутом до вектора фазової швидкості – у [4], а при випадковому збуренні процесом типу «дробового шуму» – у [6].

Означення. Вінерівський процес – гаусів процес з нульовим середнім, незалежними приростами та коваріаційною функцією $\min\{t, s\}$.

Позначається $w(t)$, $t \geq 0$.

Позначення. Стохастичний інтеграл Іто має

$$\int_a^b f(t) dy(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(t_i) [y(t_{i+1}) - y(t_i)], \quad (2)$$

$$a = t_1 < \dots < t_{N+1} = b, \text{ де } \Delta = \max_i \{t_{i+1} - t_i\}.$$

Позначення. $\dot{w}(t)$ – «похідна» від вінерівського процесу («білий шум» у формі Іто); формальний запис.

Під енергетичним насосом будемо розуміти систему, яка передає енергію з джерела до елемента. В даній роботі будемо вважати, що передача йде без втрат і кількості енергії у джерелі нескінченна. Кількість енергії, яку передає енергетичний насос, визначається керуючим елементом.

У даній роботі керуючим елементом є стохастичний гармонічний осцилятор без тертя, який задається диференціальним рівнянням з нульовими початковими умовами та збуренням типу «білого шуму».

2. Допоміжні результати.

Математичну модель гармонічного осцилятора без тертя зі збуренням $q(t)$ і нульовими початковими умовами запишемо у вигляді такої системи:

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + k^2 u(t) = q(t) \\ u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

За допомогою методу Лагранжа (варіації довільної сталої) знаходимо

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t \sin k(t-s) q(s) ds. \quad (3)$$

Тоді повна енергія осцилятора буде виглядати так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{1}{2} (\dot{u}^2(t) + k^2 u^2(t)) = \int_0^t (\dot{u}(s) \ddot{u}(s) + k^2 u(s) \dot{u}(s)) ds = \\ &= \left| \dot{u}(t) = q(t) - k^2 u(t) \right| = \int_0^t \dot{u}(s) q(s) ds = \end{aligned}$$

$$= \left| \dot{u}(t) = \int_0^t \cos k(t-s) q(s) ds \right| =$$

$$= \int_0^t \int_0^s \cos k(s-s_1) q(s_1) ds_1 q(s) ds \quad (4)$$

Розглянемо деякі властивості вінерівського процесу: $w(t) \sim N(0, t)$, $w(t_2) - w(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$,

$$E w(t) = 0, \quad (5)$$

$$w(0) = 0, \quad (6)$$

$$E(w(t_2) - w(t_1))(w(t_4) - w(t_3)) = 0, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \quad (7)$$

$$\text{cov}(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} E[(w(t) - E w(t))(w(s) - E w(s))] \stackrel{(5)}{=} E w(t) w(s) \stackrel{(6)}{=} E[(w(\min\{t, s\}) - w(0))^2] +$$

$$+ E[(w(\min\{t, s\}) - w(0))(w(\max\{t, s\}) - w(\min\{t, s\}))] \stackrel{(6,7)}{=}$$

$$= E[w(\min\{t, s\})^2] \stackrel{\text{def}}{=} \min\{t, s\}, \quad t, s \geq 0. \quad (8)$$

Розглянемо деякі властивості інтегралу Іто:

Проста функція, що апроксимує $f(t)$, має

$$\text{вигляд } f_N(t) = \sum_{i=1}^N f(t_i) \cdot 1_{\{t_i \leq t < t_{i+1}\}}(t). \quad (9)$$

$y(t)$ має необмежену варіацію, тому інтеграл Іто не можна розуміти у сенсі Лебега-Стілтєса.

Інтеграл Іто адитивний [9, с. 21]:

$$\int_0^{t''} f(t) dy(t) = \int_0^{t'} f(t) dy(t) + \int_{t'}^{t''} f(t) dy(t), \quad 0 \leq t' \leq t'' \quad (10)$$

$$E \left[\left(\int_0^s f(s_1) dw(s_1) \right) \cdot \left(\int_0^s g(s_2) dw(s_2) \right) \right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{за означенням інтеграла Іто} \\ 0 = t_1^1 < \dots < t_{N+1}^1 = s \quad - \text{розб. I інт. Іто} \\ 0 = t_1^2 < \dots < t_{N+1}^2 = s \quad - \text{розб. II інт. Іто} \\ \{t_i^3\}_{i=1}^{N+1} = \{t_i^1\}_{i=1}^{N+1} \cup \{t_i^2\}_{i=1}^{N+1} \quad - \text{р. для обох} \\ N = N_3, \quad i = i_3, \quad \Delta = \max_i |t_{i+1}^3 - t_i^3| \geq 0 \end{array} \right| =$$

$$\stackrel{(2,9)}{=} \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} E \left[\left(\sum_{i=1}^N f(t_i) [w(t_{i+1}) - w(t_i)] \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left(\sum_{j=1}^N g(t_j) [w(t_{j+1}) - w(t_j)] \right) \right] =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \left(\sum_{i=1}^N f(t_i) g(t_i) E[w(t_{i+1}) - w(t_i)]^2 + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N f(t_i) g(t_j) E[w(t_{i+1}) - w(t_i)][w(t_{j+1}) - w(t_j)] \right) = \\ = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \left(\sum_{i=1}^N f(t_i) g(t_i) [t_{i+1} - t_i] + 0 \right) = \\ = \int_0^s f(s_3) g(s_3) ds_3 \quad (11)$$

$$E \left[\left(\int_0^{s'} f(s_1) dw(s_1) \right) \cdot \left(\int_{s'}^s g(s_2) dw(s_2) \right) \right] = \\ = \left| \begin{array}{l} 0 < s' < s \\ \text{за означенням інтеграла Іто} \\ 0 = t_1^1 < \dots < t_{N_1+1}^1 = s' - \text{розб. I інт. Іто} \\ s' = t_1^2 < \dots < t_{N_2+1}^2 = s - \text{розб. II інт. Іто} \\ \left\{ t_3^3 \right\}_{i=1}^{N_3+1} = \left\{ t_1^1 \right\}_{i=1}^{N_1+1} \cup \left\{ t_2^2 \right\}_{i=1}^{N_2+1} - \text{р. для обох} \\ \text{мат } N_3 + 1 = (N_1 + 1) + (N_2 + 1) - 1, \\ N_3 = N_1 + N_2 \text{ (одна спільна т. } s'), \\ \Delta = \max_i |t_{i+1}^3 - t_i^3| \geq 0 \end{array} \right| = \\ = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ (N_1, N_2 \rightarrow \infty)}} E \left[\left(\sum_{i=1}^{N_1} f(t_i) [w(t_{i+1}) - w(t_i)] \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} g(t_j) [w(t_{j+1}) - w(t_j)] \right] =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ (N_1, N_2 \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=N_1+1}^{N_1+N_2} f(t_i) g(t_j) \cdot \\ \cdot E[w(t_{i+1}) - w(t_i)][w(t_{j+1}) - w(t_j)] = 0 \quad (12)$$

Останні дві властивості виконуються за умови, що в обох інтегралах один і той самий вінерівський процес. В подальшому ця умова виконується, бо ми використовуємо лише один вінерівський процес. Більше властивостей вінерівського процесу та інтегралу Іто розглянуто, наприклад, в [9 с. 18-22; 2].

3. Основні результати.

У даній роботі досліджується асимптотична поведінка математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора без тертя під впливом енергетичного насосу з керуючим елементом вигляду стохастичного гармонічного осцилятора без тертя зі збуренням типу «білого шуму».

Теорема 1. Нехай $u_1(t)$ - розв'язок системи рівнянь задачі

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + k_1^2 u_1(t) = u_2(t) \\ u_1(0) = 0, \dot{u}_1(0) = 0 \end{cases} \quad \text{I} - \text{осцилятор}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_2(t) + k_2^2 u_2(t) = \dot{w}(t) \\ u_2(0) = 0, \dot{u}_2(0) = 0 \end{cases} \quad \text{II} - \text{осцилятор}$$

$k_1, k_2 > 0, t > 0$, де $\dot{w}(t)$ - процес типу «білого шуму». Тоді

$$1) \quad k_1 \neq k_2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\varepsilon_1(t)}{t} = \frac{3k_2^2 + k_1^2}{4k_2^2(k_1^2 - k_2^2)^2}$$

$$2) \quad k_1 = k_2 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\varepsilon_1(t)}{t^3} = \frac{1}{24k^2}$$

Доведення. Запишемо формально повну енергію першого осцилятора

$$\varepsilon_1(t) = \int_0^t \int_0^s \cos k_1(s-s_1) u_2(s_1) ds_1 u_2(s) ds = \\ = \int_0^t \int_0^s \cos k_1(s-s_1) \left(\frac{1}{k_2} \int_0^s \sin k_2(s_1-s_2) \dot{w}(s_2) ds_2 \right) ds_1 \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{k_2} \int_0^s \sin k_2(s-s_3) \dot{w}(s_3) ds_3 \right) ds = \\ = \frac{1}{k_2^2} \int_0^t \int_0^s \cos k_1(s-s_1) \left(\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1-s_2) dw(s_2) \right) \cdot \\ \cdot \left(\int_0^s \sin k_2(s-s_3) dw(s_3) \right) ds_1 ds, \quad (13)$$

де $\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1-s_2) dw(s_2)$ та $\int_0^s \sin k_2(s-s_3) dw(s_3)$ -

інтеграли Іто.

Тоді математичне сподівання повної енергії першого осцилятора буде:

$$E\varepsilon_1(t) = \frac{1}{k_2^2} E \left[\int_0^t \int_0^s \cos k_1(s-s_1) \left(\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1-s_2) dw(s_2) \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\int_0^s \sin k_2(s-s_3) dw(s_3) \right) ds_1 ds \right] = \frac{1}{k_2^2} \int_0^t \int_0^s \cos k_1(s-s_1) \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot E \left[\left(\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1 - s_2) dw(s_2) \right) \cdot \left(\int_0^s \sin k_2(s - s_3) dw(s_3) \right) \right] ds_1 ds = \\ & \stackrel{(10)}{=} \frac{1}{k_2^2} \int_0^t \int_0^s \cos k_1(s - s_1) \left(E \left[\left(\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1 - s_2) dw(s_2) \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \left(\int_0^s \sin k_2(s - s_3) dw(s_3) \right) \right] + E \left[\left(\int_0^{s_1} \sin k_2(s_1 - s_2) dw(s_2) \right) \cdot \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \cdot \left(\int_{s_1}^s \sin k_2(s - s_3) dw(s_3) \right) \right] \right] \right) ds_1 ds \stackrel{(12,13)}{=} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k_2^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \cos k_1(s - s_1) \sin k_2(s - s_2) \sin k_2(s_1 - s_2) ds_2 ds_1 ds =$$

1) Нерезонансний випадок $k_1 \neq k_2$

$$= \frac{1}{2k_2^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \cos k_1(s - s_1) (\cos k_2(s_1 - s) - \cos k_2(s + s_1 - 2s_2)) ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \frac{1}{2k_2^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} (\cos k_1(s - s_1) \cos k_2(s_1 - s) - \cos k_1(s - s_1) \cos k_2(s + s_1 - 2s_2)) ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \frac{1}{4k_2^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} (\cos(k_1 + k_2)(s - s_1) + \cos(k_1 - k_2)(s - s_1) - \cos((k_2 + k_1)s + (k_2 - k_1)s_1 - 2k_2s_2) - \cos((k_1 - k_2)s - (k_2 + k_1)s_1 + 2k_2s_2)) ds_2 ds_1 ds =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4k_2^2} \int_0^t \int_0^s (s_1 \cos(k_1 + k_2)(s - s_1) - 0 + \\ & \quad + s_1 \cos(k_1 - k_2)(s - s_1) - 0 + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2} \sin((k_2 + k_1)s + (k_2 - k_1)s_1 - 2k_2s_2) - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2} \sin((k_2 + k_1)s + (k_2 - k_1)s_1) - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2} \sin((k_1 - k_2)s - (k_2 + k_1)s_1 + 2k_2s_2) + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2} \sin((k_1 - k_2)s - (k_2 + k_1)s_1)) ds_1 ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4k_2^2} \int_0^t \int_0^s (s_1 \cos(k_1 + k_2)(s - s_1) + s_1 \cos(k_1 - k_2)(s - s_1) + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2} \sin(k_2 + k_1)(s - s_1) - \frac{1}{2k_2} \sin((k_2 + k_1)s + (k_2 - k_1)s_1) - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2} \sin(k_1 - k_2)(s - s_1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \quad + \frac{1}{2k_2} \sin((k_1 - k_2)s - (k_2 + k_1)s_1)) ds_1 ds = \\ & = \frac{1}{4k_2^2} \int_0^t \left(-\frac{1}{k_1 + k_2} s \cdot \sin(k_1 + k_2)(s - s) + \right. \\ & \quad + \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \cos(k_1 + k_2)(s - s) - \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \cos(k_1 + k_2)s - \\ & \quad - \frac{1}{k_1 - k_2} s \cdot \sin(k_1 - k_2)(s - s) + \\ & \quad + \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \cos(k_1 - k_2)(s - s) - \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \cos(k_1 - k_2)s + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos(k_1 + k_2)(s - s) - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos(k_1 + k_2)s - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \cos(k_1 - k_2)(s - s) + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \cos(k_1 - k_2)s + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos((k_1 - k_2)s - (k_1 + k_2)s) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos(k_1 - k_2)s \right) ds = \\ & = \frac{1}{4k_2^2} \int_0^t \left(\frac{1}{(k_1 + k_2)^2} - \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \cos(k_1 + k_2)s + \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} - \right. \\ & \quad - \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} \cos(k_1 - k_2)s + \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} - \\ & \quad - \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos(k_1 + k_2)s - \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \cos 2k_2s + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \cos(k_1 + k_2)s - \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} + \\ & \quad + \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \cos(k_1 - k_2)s + \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos 2k_2s - \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} \cos(k_1 - k_2)s \right) ds = \\ & = \frac{1}{4k_2^2} \left(\left(\frac{1}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} + \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)} - \right. \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)} \right) t + \left(-\frac{1}{(k_1 + k_2)^3} - \frac{1}{2k_2(k_1 + k_2)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2k_2(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)} \right) \sin(k_1 + k_2)t + \left(\frac{1}{4k_2^2(k_1 + k_2)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4k_2^2(k_1-k_2)}\Bigg)\sin 2k_2t + \left(-\frac{1}{(k_1-k_2)^3} + \frac{1}{2k_2(k_1-k_2)^2} - \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{2k_2(k_1+k_2)(k_1-k_2)}\right)\sin(k_1-k_2)t\Bigg) = \\ & = \frac{3k_2^2+k_1^2}{4k_2^2(k_1^2-k_2^2)^2} \cdot t + \frac{1}{2k_2(k_1+k_2)^3(k_1-k_2)}\sin(k_1+k_2)t - \\ & - \frac{1}{8k_2^3(k_1^2-k_2^2)}\sin 2k_2t - \frac{1}{2k_2(k_1-k_2)^3(k_1+k_2)}\sin(k_1-k_2)t \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\varepsilon_1(t)}{t} = \frac{3k_2^2+k_1^2}{4k_2^2(k_1^2-k_2^2)^2} \end{aligned}$$

2) Резонансний випадок $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{k^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \cos k(s-s_1) \sin k(s-s_2) \sin k(s_1-s_2) ds_2 ds_1 ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} (\cos 2k(s-s_1) + 1 - \cos 2k(s-s_2) - \\ & \quad - \cos 2k(s_2-s_1)) ds_2 ds_1 ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \int_0^s \left(s_1 \cos 2k(s-s_1) - 0 + s_1 - 0 + \frac{1}{2k} \sin 2k(s-s_1) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k} \sin 2ks - \frac{1}{2k} \sin 2k(s_1-s_1) + \frac{1}{2k} \sin 2k(-s_1) \right) ds_1 ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \int_0^s \left(s_1 \cos 2k(s-s_1) + s_1 + \frac{1}{2k} \sin 2k(s-s_1) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k} \sin 2ks - \frac{1}{2k} \sin 2k(s_1-s_1) + \frac{1}{2k} \sin 2k(-s_1) \right) ds_1 ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \int_0^s \left(s_1 \cos 2k(s-s_1) + s_1 + \frac{1}{2k} \sin 2k(s-s_1) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k} \sin 2ks - \frac{1}{2k} \sin 2ks_1 \right) ds_1 ds = \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. Бандерський М. М., Пастур Л. А. Об асимптотике уравнений 2-го порядка со случайным коэффициентом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1975. – Вып. 22. – С. 3-14.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1965. – 654с.
3. Дивнич М. Т., Кіровський Д. Ю., Єршов А. В. Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії випадкового гармонічного осцилятора. – Вісн. Київ. ун-ту.

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \left(-\frac{1}{2k} s \cdot \sin 2k(s-s) + \frac{1}{4k^2} \cos 2k(s-s) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4k^2} \cos 2ks + \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4k^2} \cos 2k(s-s) - \frac{1}{4k^2} \cos 2ks - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2k} s \cdot \sin 2ks + \frac{1}{4k^2} \cos 2ks - \frac{1}{4k^2} \right) ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \int_0^t \left(\frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4k^2} \cos 2ks + \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2k} s \cdot \sin 2ks \right) ds = \\ & = \frac{1}{4k^2} \left(\frac{1}{4k^2} t - \frac{1}{8k^3} \sin 2kt + \frac{t^3}{6} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4k^2} t \cdot \cos 2kt - \frac{1}{8k^3} \sin 2kt \right) = \\ & = \frac{1}{24k^2} t^3 + \frac{1}{16k^4} t(1 + \cos 2kt) - \frac{1}{16k^5} \sin 2kt \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\varepsilon_1(t)}{t^3} = \frac{1}{24k^2} \end{aligned}$$

Теорему доведено.

4. Висновок

У цій роботі знайдена асимптотична поведінка математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора без тертя під впливом енергетичного насоса з керуючим елементом вигляду стохастичного гармонічного осцилятора без тертя зі збуренням типу «білого шуму» у резонансному $E\varepsilon(t) \sim \frac{1}{24k^2} t^3$ і нерезонансному

$$E\varepsilon(t) \sim \frac{3k_2^2+k_1^2}{4k_2^2(k_1^2-k_2^2)^2} t \text{ випадках при } t \rightarrow +\infty.$$

References

1. BANDERSKYI, M. and PASTUR, L. (1975) Ob asymptotike uravneniy 2-go poriyadka so sluchaynyim koeffitsientom *Teoriya funktsiy, funktsion. analiz i ikh pril.*, 22, p.3-14.
2. GIKHMAN, I. and SKOROKHOD, A. *Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov.* Moskva: Nauka.
3. DIVNICH, M., KIROVSKYI, D. and YERSHOV, A. (2005) Asymptotichnyi analiz matematichnogo spodivannya povnoyi energiyi vipadkovogo garmonichnogo oscilyatora *Visn. Kyiv. Un-ty. Matematika, mekhanika.*, 3, p.104-

- Математика, механіка. – 2005. – №3. – С. 104-112.
4. Кулінич Г. Л., Бернацкая Ю. В. О фазовом «портрете» гармонического осциллятора с трением, возмущенного случайным процессом типа «белого шума» // Мат. зап. – 1998. – 68, №4. – С. 862-869.
5. Кулініч Г. Л. Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу «білого шуму» вздовж вектора фазової швидкості // Укр. мат. Журн. – 1997. – 49, №1. – С. 36-47.
6. Кулініч Г. Л. Якісний аналіз поведінки гармонічного осцилятора під впливом випадкових збурень параметрів процесами типу «білого і дробового шумів» // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1998. – Вип. 58. – С. 81-91.
7. Кулініч Г. Л., Куровський Д. Ю., Петрусенко Д. В. Про асимптотичну поведінку гармонічного осцилятора математичного сподівання повної енергії стохастичного гармонічного осцилятора // Мат. XI Між нар. Наук. Конф. Ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2006. – С. 719.
8. Кулініч Г.Л. Про граничну поведінку випадкового осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. – 1985. – Вип. 25. – С. 108-113.
9. Леваков А.А. Введение в теорию интегралов Лебега и Ито. Пособие для студентов прикладной математики и информатики [Электронный ресурс]. – 2010. – Режим доступа до ресурсу: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/1631/1/metmain.pdf>. – С. 18-22.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.:Наука.1965. – 424с.
11. Kulinich G. L. On the limiting behaviors of a harmonic oscillator with random external disturbance // Y.A.M.S.A. – 1995. – 8. – p. 265-274.
12. Kulinich G. L. Qualitative analysis of the influence of random perturbations of the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Oper. And Stochast. Equat. – 1995. – 3, №2. – p. 141-152.
13. Papanirolan G.G. Stochastic equations and their applications // Amer. Math. Mon. – 1973. – 80, №5. – p. 526-545.
- 112.
4. KULINICH, G. and BERNATSKAYA, YU. (1998) O fazovom “portrete” garmonicheskogo oscillatora s treniem, vozmushennogo sluchaynyim protsessom tipa “belogo shuma” *Math. Zap.*, 68 (4), p. 862-869.
5. KULINICH, G. (1997) Yakisnyi analiz vplivu na garmonichniy oscillator z tertiam vipadkovikh zburen’ tipu “bilogo shumu” vzdovzh vektora fazovoyi shvidkosti *Ukr. Math. Journ.*, 49 (1), p.36-47.
6. KULINICH, G. (1998) Yakisnyi analiz povedinki garmonichnogo oscillyatora pid vplivom vipadkovikh zburen’ parametriv protsessami tipu “bilogo I drobovogo shumiv” *Teoriya imovirnostey i math. statistika*, 58, p. 81-91.
7. KULINICH, G., KUROVSKYI, D. and PETRUSENKO, D. (2006) Pro asymptotichnu povedinku garmonichnogo ostsillatora matematichnogo spodivannya povnoyi energiyi stokhastichnogo garmonichnogo ostsillatora *Math. XI Mizhnar. Nauk. Conf. Im. Akad. M. Kravtchuka*. Kyiv, p.719.
8. KULINICH, G. (1985) Pro granichnu povedinku vipadkovogo oscillatora *Visn. Kyiv. Un-ty. Matematika, mekhanika.*, 25, p.108-113.
9. LEVAKOV, A. (2010) Vvedenie v teoriyu integralov Lebeга I Ito. Posobie dlya studentov prikladnoy matematiki i informatiki [Online] p.18-22. – Avialable from: <http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/1631/1/metmain.pdf>.
10. EL'TSGOL'TS, L. (1965) Differentsial'nie uravneniya i variatsionnoe ischisleniye. Moskva: Nauka.
11. KULINICH, G. (1995) On the limiting behaviors of a harmonic oscillator with random external disturbance *Y.A.M.S.A.*, 8, p.265-274.
12. KULINICH, G. (1995) Qualitative analysis of the influence of random perturbations of the phase velocity of the harmonic oscillator *Random Oper. And Stochast. Equat.*, 3 (2), p.141-152.
13. PAPANIROLAN, G. (1973) Stochastic equations and their applications *Amer. Math. Mon.*, 5, p.526-545.