УДК 532.5

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.11>

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Майко І.В., студент

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
I.V. Maiko, student

Узагальнення задачі Лайтхілла на випадок заповнених в'язкою рідиною трубок з ускладненою реологією стінки

Generalization of the Lighthill problem for the viscous fluid filled tubes with complicated wall rheology

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com
²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: illia.maiko@ukr.net

Запропоновано узагальнення моделі Лайтхілла розповсюдження плоских хвиль по в'язкопружних трубках, які заповнені в'язкою рідиною. Реологічне співвідношення для стінки трубки має по два часи релаксації напружень і деформацій. Отримані рівняння узагальненої моделі, які описують осереднені тиск, швидкість рідини, а також площину перерізу судини. Отримано розв'язок рівнянь у вигляді хвиль, які розповсюджуються, а також дисперсійне рівняння. Проаналізовані особливості розв'язку узагальненої моделі та дисперсії хвиль у порівнянні як з класичними задачами Лайтхілла та Шапіро, так і з в'язкопружною моделлю Кельвіна-Фойхта для матеріалу стінки. Чисельні розрахунки проведені для набору параметрів моделі, які відповідають системі кровообігу людини. Показано, що ускладнені властивості матеріалу дозволяють урахувати моди Юнга і Ляме, а також стабілізувати моди, які були нестійкими у випадку трубок з простішою реологією. Розроблена модель дозволяє проводити чисельні розрахунки на складних моделях артеріальних русел з суттєвою економією комп'ютерних ресурсів і часу.

Ключові слова: в'язкопружні трубки, пульсові хвилі, математичне моделювання, дисперсія хвиль.

A generalization of the Lighthill model of the plane waves propagation along fluid-filled viscoelastic tubes is proposed. The rheological relation of the wall has two relaxation times for strains and stresses. The equations of the generalized model for the averaged pressure, velocity and the cross-sectional area of the tube are obtained. The solution of the equations in the form of the running waves and the dispersion relation are obtained and compared to those for the Lighthill and Shapiro problems, and the viscoelastic Kelvin-Voigt model for the wall material. Numerical calculations for the model parameters corresponded to human circulation system have been carried out. It is shown, the complicated properties of the material allow accounting for both Young and Lamé wave modes, and stabilization the modes that were unstable in the case of simpler rheology. The developed model is helpful in performing the numerical calculations on complex models of arterial vasculatures at lower computation time and resources.

Key Words: viscoelastic tubes, pulse waves, mathematical modeling, wave dispersion.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Лінійна теорія плоских хвиль (1d) в заповнених рідиною трубках була розроблена англійським математиком Дж. Лайтхіллом [1]. Було також отримано розв'язок задачі про поширення циліндричних хвиль (2d) в прямих трубках кругового перетину [2], в трубках з

тонкими і товстими пружними стінками, що монотонно звужуються або розширюються, з в'язкопружними та багатошаровими стінками [3,4]. В кожному випадку було виписано розв'язки задач у вигляді нормальної моди і досліджено дисперсію хвиль.

Класична задача Лайтхілла заснована на законах збереження маси і імпульсів невязкої рідини, а також реологічному співвідношенню $F(P,U)=0$, де $P(t,x)$, $U(t,x)$ - тиск і поздовжня швидкість рідини, які осереднені за поперечним перерізом трубки, який може бути довільної форми. У разі вязкої рідини рівняння Лайтхілла були сформульовані А. Шапіро [5] і пізніше виведені шляхом осереднення рівнянь Нав'є-Стокса по перетину трубки [6]. Оскільки задача Лайтхілла та її узагальнення широко використовуються при моделюванні системи кровообігу [7], значний інтерес представляють узагальнення цієї задачі на випадок ускладненої реології стінки трубки та неньютоновських рідин [8,9]. У даній роботі наведено узагальнення моделі Лайтхілла на випадок вязкопружних стінок, що представлені різними поєднаннями пружного, вязкого і інерційного елемента (EVI, elastic, viscous, inertial), а також досліджені властивості рішення узагальненої моделі та особливості дисперсії хвиль. Ця модель відповідає сучасним мікро- і нано-структурованим композитам і має цікаві додаткові реологічні властивості.

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему рівнянь Лайтхілла-Шапіро [9]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(SU) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{S} U = 0, \quad (2)$$

для замикання якої використовуємо реологічне співвідношення EVI моделей, що містять 3-5 елементів:

$$d \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + c \frac{\partial S}{\partial t} + S = S_0 + k(P - P_0) + a \frac{\partial P}{\partial t} + b \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де ρ і μ - густина і вязкість рідини, a, b, c, d - реологічні параметри, P_0 - тиск, при якому стінка трубки повністю розправлена і має перетин S_0 .

У класичній задачі Лайтхілла розглядається лінеаризована відносно рівноважного стану система (1) - (3) при $\mu, q, a, b, c, d = 0$, а її рішення розшукується у вигляді $P = P_0 + \tilde{P}$, $S = S_0 + \tilde{S}$, $U = \tilde{U}$, де $\tilde{P}, \tilde{S}, \tilde{U}$ - малі збурення змінних відносно рівноважного стану $\{P = P_0, S = S_0, U = 0\}$. Повторюючи цю процедуру, з (1) - (3) отримаємо лінеаризовану систему рівнянь для збурень

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + S_0 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} - \frac{\mu}{S_0} \tilde{U} = 0, \quad (5)$$

$$d \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2} + c \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{S} = k \tilde{P} + a \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + b \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Виключаючи з (4) - (6) змінні $\tilde{P}, \tilde{S}$, отримаємо рівняння для $\tilde{U}$ (позначення над змінними для простоти опущені)

$$-b\rho \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + \left(\frac{b\mu\rho}{S_0} - a\rho \right) \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \left(\frac{a\mu\rho}{S_0} - \rho k \right) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{k\mu\rho}{S_0} \frac{\partial U}{\partial t} + S_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + cS_0 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} + dS_0 \frac{\partial^4 U}{\partial t^2 \partial x^2} = 0. \quad (7)$$

Знаходячи розв'язок (7) і підставляючи його в (4) і (5), отримаємо рівняння для $\tilde{P}, \tilde{S}$. Для дослідження особливостей поширення хвиль в трубках з ускладненою реологією будемо шукати розв'язок (4) - (6) у вигляді $f(t,x) = f^* \cdot \exp(i(\omega t - nx))$, де $f = \{P, S, U\}$, f^* і ω - амплітуда і частота хвилі, n - хвильове число.

2. Дисперсійне рівняння

Після вищезгаданої підстановки за умови існування розв'язку алгебраїчної системи рівнянь для амплітуд звичайним шляхом отримуємо дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\omega^4 + iA\omega^3 + (B - Cn^2)\omega^2 + i(Dn^2 - E)\omega + n^2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } A = \frac{\mu}{S_0} - \frac{a}{b}, \quad B = \frac{a\mu}{bS_0} - \frac{k}{b}, \quad C = \frac{dS_0}{b\rho}, \quad D = \frac{cS_0}{b\rho},$$

$$E = \frac{k\mu}{bS_0}, \quad F = \frac{S_0}{b\rho}.$$

Рівняння (8) має 4 комплексних кореня

$$\omega_{1,2,3,4}(n) = i \frac{A}{4} \pm \sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}, \quad \text{де } z_{1,2,3} - \text{корені}$$

кубічного рівняння, що пов'язане з (8) причому в залежності від параметрів моделі можливі випадки: $\{z_1 = z_2 = z_3\} \in R$, $\{z_1 = z_2 \neq z_3\} \in R$,

$\{z_1 \neq z_2 \neq z_3\} \in R$, $\{z_1 \in R, \{z_2 = z_3^*\} \in C\}$, де зірочка

позначає комплексне сполучення. Таким чином, розв'язок (8) при будь-якому наборі параметрів має вигляд $\omega = \omega'(n) + i\omega''(n)$. Якщо $\omega''(n) > 0$, будь-які малі початкові збурення загасають за часом і система (4) - (6) є стійкою. Відповідно, фазову та групову швидкості хвилі можна обчислити як $\varphi = \varphi'(n) + i\varphi''(n)$, $V_g = V'(n) + iV''(n)$, де $V'(n) = d\omega'(n)/dn$, $V''(n) = d\omega''(n)/dn$, $\varphi'(n) = \omega'(n)/n$, $\varphi''(n) = \omega''(n)/n$.

Як відомо, в дисипативних середовищах групова швидкість зменшується зі зростанням частоти в разі нормальної дисперсії і збільшується в середовищах з аномальною дисперсією. В класичній задачі Лайтхілла ($\{a, b, c, d, \mu\} = 0$) розв'язок (8) має вигляд $\omega(n) = \sqrt{S_0 / \rho k n}$, тому фазова швидкість хвилі збігається з групою, що характерно для плоских хвиль в середовищах без дисперсії. У моделі Шапіро розв'язок (8) має вигляд

$$\omega_{1,2} = -i \frac{\mu}{2S_0} \pm \sqrt{\frac{S_0}{k\rho} n^2 - \left(\frac{\mu}{S_0}\right)^2}, \text{ так що за будь-}$$

яких наборах параметрів моделі фазова швидкість хвилі не збігається з групою. Подальше дослідження властивостей розв'язку (8) може бути проведено чисельними методами.

3. Чисельне рішення і аналіз результатів

Обмежимося випадком, який відповідає поширенню пульсових хвиль по артеріальній системі людини, і візьмемо $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $k = 2\sqrt{\pi} E h S_0^{-3/2} / 3$, $E = 10^6 \text{ Па}$ – модуль Юнга, $h = 0.2 R_0$ – товщина стінки, $R_0 = \sqrt{S_0 / \pi} = 0.01 \text{ см}$ – радіус артерії. Величини $c \equiv \tau_\varepsilon$ і $a/k \equiv \tau_\sigma$ мають сенс часів релаксації деформацій та напружень в матеріалі стінки артерії і можна покласти $\tau_\varepsilon = \tau_\sigma = 0.01 \text{ с}$ [2,9]. Експериментальні вимірювання параметрів b , d дають дуже різні діапазони значень, тому має сенс дослідити вплив саме цих параметрів на розв'язок і особливості дисперсії хвиль. При розрахунках використовувалися значення $d / \tau_\varepsilon \equiv \tilde{d}$ і $b / k \tau_\sigma \equiv \tilde{b}$, де $\tilde{d} = \tilde{b} \sim 0.1 - 1 \text{ с}$ - часи релаксації деформацій і напружень другого порядку.

Чисельні розрахунки показали, що при всіх наборах параметрів моделі за наявності 4-х різних коренів (8) два з них відповідають поздовжнім повільним хвилям (моди Юнга), а два інших - швидким хвилям (моди Ламе), як і у випадку вісесиметричної 2d течії в'язкої рідини по товстостінній трубці [2]. В класичних моделях Лайтхілла і Шапіро існує тільки один тип хвиль. У випадку в'язкопружної трубки, яка відповідає реологічній моделі Кельвіна-Фойхта, отримуємо рівняння (8), яке має тільки три ненульових розв'язки, тому представлена EVI модель має більше число мод і, таким чином, більш різноманітний набір властивостей, у

тому числі резонансних [3,7]. Крім цього, за рахунок додаткових членів в реологічному співвідношенні (3) ті моди, які були нестійкі при $\tilde{\tau}_\varepsilon = \tilde{\tau}_\sigma = 0$, можуть стати стабільними за певних значень $\tilde{\tau}_\varepsilon \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$, які можна знайти з умови стійкості $\omega''(n) > 0$ системи (1) - (3).

Результати розрахунків дисперсійних залежностей $\omega'(n)$ представлені на Рис.1а. Розглянуто випадки як коротких ($n > 1$), так і довгих ($n < 1$) хвиль. Вздовж вертикальної осі відкладена безрозмірна частота. За основну частоту прийнято значення частоти серцебиття 72 уд./хв. Розрахунки обмежені першими $m=8$ гармоніками, яких вистачає для апроксимації ~ 96-98% пульсової хвилі [9].

Рис.1. Залежності $f^\circ(n)$ (а), $\omega''(n)$ (б) и $\phi'(m)$ (в) для різних наборів параметрів стінки.

На Рис.1б представлені залежності $\omega''(n)$ для випадку, коли вихідна мода була нестійкою, а за

рахунок вибору ненульових параметрів $\tilde{\tau}_s \neq \tilde{\tau}_\sigma \neq 0$ вдалося стабілізувати. На Рис.1в показані залежності $\phi'(\omega)$ при тих самих наборах параметрів задачі. Обчислені залежності добре відповідають даним вимірювань $\phi'(\omega)$ на артеріях з різними радіусами. Пряма лінія відповідає швидкості, яка розрахована при тих самих параметрах стінки і рідини для бездисперсійного розв'язку класичної задачі Лайтхілла. Ці значення, так само як і модель чисто пружної стінки, зазвичай завищують величину швидкості пульсової хвилі [9], тоді як моделі з урахуванням релаксацийних параметрів першого і другого порядку лежать ближче до експериментальних кривих [2,9,10].

5. Висновки

Запропонована узагальнена модель Лайтхілла-Шاپіро, яка описує розповсюдження хвиль в заповнених в'язкою рідиною трубках, реологічне співвідношення яких має 5 реологічних коефіцієнтів – окружну стисливість і по два часи релаксації напружень та деформацій. Розв'язок задачі може бути знайдено у вигляді хвиль тиску, швидкості, що біжать, та осциляцій стінки трубки. Дисперсійне рівняння описує швидкі й повільні моди Ламе і Юнга. Показано, що за рахунок додаткових параметрів можна стабілізувати нестійкі моди, а дисперсійні залежності стають ближчими до експериментальних ніж розв'язки класичних задач Лайтхілла, Шاپіро, і для випадку реологічної моделі Кельвіна-Фойхта.

Список використаних джерел

1. Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях*. М.:Мир. - 1981. – 600 с.
2. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. // *Phil.Mag.* – 1955. – v.46,N73. – P.199-221.
3. Kizilova N., Hamadiche M., Gad-el-Hak M. Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. // *Intern. J. Flow Control.* - 2019. - v.1,N3. - P.199-211.
4. Sherwin S.J., Franke F., Piero J., Parker K.H. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. // *J.Eng.Math.* – 2003. – v.47. – P.217-250.
5. Shapiro A.H. Steady flow in collapsible tubes. // *J. Biomech. Eng.* – 1977. – v.99,N8. – P.126-147.
6. Smit C.H. On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow. // *Zeitschr.Angew.Mathem.Physik.* – 1981. – v.32. – P.408-420.
7. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства нормальных волн упруго-жидкостного волновода, помещенного в жидкость. // *Акуст. вісн.* – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 17-34.
8. Pedley T.J., Blood flow in arteries and veins. // *Perspectives in Fluid dynamics*. Batchelor G.K., Mofatt H.K. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. – 2000. – P.105-158.
9. Ghigo A.R., Lagrée P.-Y., Fullana J.-M. A time-dependent non-Newtonian extension of a 1D blood flow model. // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 2018. – V. 253. – P. 36–49.

References

1. Lighthill J. (1978) *Waves in Fluids*. Cambridge Univ.Press. - 504 p.
2. Womersley J.R. (1955) Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. *Phil. Mag.* Vol.46(73). p.199-221.
3. KIZILOVA N., HAMADICHE M., GAD-EL-HAK M. (2019) Flow in Compliant Tubes: Control and Stabilization by Multilayered Coatings. *Intern. J. Flow Control.* Vol.1(3). p.199-211.
4. SHERWIN S.J., FRANKE F., PIERO J., PARKER K.H. (2003) One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables. *J. Eng. Math.* Vol.47. p.217-250.
5. SHAPIRO A.H. (1977) Steady flow in collapsible tubes. *J. Biomech. Eng.* Vol.99(8). p.126-147.
6. SMIT C.H. (1981) On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow. *Zeitschr. Angew. Mathem. Physik.* Vol.32. p.408-420.
7. GRINCHENKO V.T., KOMISSAROVA G.L. (2006) Properties of normal waves of an elastic-liquid waveguide placed in a liquid. *Acoust. Visn.* Vol. 9(4). P. 17-34.
8. PEDLEY T.J. (2000) Blood flow in arteries and veins. In: *Perspectives in fluid dynamics*. Batchelor G.K., Mofatt H.K. (eds.). Cambridge: Cambridge Univ.Press. p.105-158.
9. GHIGO A.R., LAGRÉE P.-Y., FULLANA J.-M. (2018) A time-dependent non-Newtonian extension of a 1d blood flow model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* Vol. 253. p. 36–49.

Надійшла до редколегії 12.02.2020