Т.О. Драбик ¹, студ.

О.В. Іванов ², д.ф.-м.н., проф.

**Асимптотична нормальність оцінки
найменших квадратів у
тригонометричній регресії з сильно
залежним шумом**

^{1,2} Національний технічний університет
України "Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ-56, просп.
Перемоги, 37

e-mail: ¹ drabyk.tetyana@gmail.com,

² alexntuu@gmail.com

T.O. Drabyk ¹, stud.

O.V. Ivanov ², Dr. Sci., Prof.

**Asymptotic normality of the least squares
estimate in trigonometric regression with
strongly dependent noise**

^{1,2} National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 03056,
Kyiv, 37 Peremogy avenue

e-mail: ¹ drabyk.tetyana@gmail.com,

² alexntuu@gmail.com

У роботі вивчаються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії з сильно залежним шумом. Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінка найменших квадратів параметрів функції регресії є асимптотично нормальною.

Ключові слова: тригонометрична модель регресії, функція регресії, випадковий шум, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка найменших квадратів, сингулярна спектральна щільність, спектральна міра функції регресії, μ -припустимість, розклади за поліномом Чебишова-Ерміта, ранг Ерміта, асимптотична нормальність.

The least squares estimator asymptotic properties of the parameters of trigonometric regression model with strongly dependent noise are studied. The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise under which the least squares estimator of regression model parameters are asymptotically normal. Trigonometric regression model with discrete observation time and open convex parametric set is research object. Asymptotic normality of trigonometric regression model parameters the least squares estimator is research subject. For obtaining the thesis results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it's covariances, central limit theorem for weighted vector sums of the values of such a local transformation and Brouwer fixed point theorem.

Key words: trigonometric regression model, regression function, random noise, local transformation of Gaussian stationary time series, the least squares estimator, singular spectral density, spectral measure of regression function, μ -admissibility, expansions by Chebyshev-Hermite polynomials, Hermite rank, asymptotic normality.

Communicated by Dr. Sci., Prof. Moklyachuk M.P.

Вступ

У роботі розглядається нелінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому сенсі, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною щільністю (с.щ.).

Серед різноманітних проблем нелінійного регресійного аналізу варто звернути увагу на задачу оцінювання амплітуд та кутових частот,

взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що маскується адитивним випадковим шумом. Таку модель регресії називають тригонометричною, а описану задачу – задачею про виявлення прихованих періодичностей.

Асимптотичну поведінку оцінок найменших квадратів (о.н.к.) параметрів тригонометричної моделі регресії у 50-х роках минулого століття вивчав П. Уїтл [1], а пізніше цю задачу розв'язували А.М. Уолкер [2], Е.Дж. Хеннан [3], А.Я. Дороговцев [4], О.В. Іванов [5] та ін. в

моделях із дискретним та неперервним часом за різними припущеннями відносно випадкового шуму. Паралельно різні узагальнення тригонометричної моделі регресії розглядали А.Я. Дороговцев та П.С. Кнопов [6].

В роботі досліджується асимптотична нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Тут ми спираємось на статтю О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, Б.М. Жураковського [7]. На відміну від вказаної статті, у якій доведення асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів тригонометричної моделі здійснюється із застосуванням діаграмної формули, ми користуємось теоремою про асимптотичну нормальність деякої зваженої векторної суми значень шуму, яку доведено в статті О. В. Іванова, Н.Н. Леоненка, М.Д. Руїз-Медини, І.М. Савич [8].

1 Постановка задачі та допоміжні результати

Припустимо, що випадкові процеси, які розглядаються в подальшому тексті, задано на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Розглянемо модель регресії

$$X_t = g(t, \theta^0) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (1.1)$$

де $g : \mathbb{N} \times \Theta_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція при кожному $t \in \mathbb{N}$ на $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\| \leq 1} (\Theta + \gamma a)$,

$\gamma > 0$ – деяке число, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, що містить монотонно неспадну послідовність відкритих опуклих множин $\{\Theta_T, T \geq 1\}$

таких, що $\bigcup_{t=1}^{\infty} \Theta_T = \Theta$. Істинне значення параметра $\theta^0 \in \Theta_T$ для достатньо великих T (будемо писати $T > T_0$).

Відносно шуму ε припустимо, що

A1. $\varepsilon_t = G(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_0^4 < \infty$.

A2. ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$, є гауссівським стаціонарним часовим рядом, $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, із коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^r A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \quad r \geq 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1 + t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad \alpha_j \in (0, 1), \quad (1.3)$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi, \quad \sum_{j=0}^r A_j = 1, \quad A_j > 0.$$

Нехай $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B(t) = \sum_{j=0}^r A_j B_{\alpha_j \varkappa_j}(t), \quad r \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

де $A_j > 0$, $j = \overline{0, r}$, $\sum_{j=0}^r A_j = 1$,

$$B_{\alpha_j \varkappa_j}(t) = \frac{\cos \varkappa_j t}{(1 + t^2)^{\alpha_j/2}}, \quad \alpha_j \in (0, 1), \quad (1.5)$$

$$0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r < \pi.$$

С.щ. $\tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{j=0}^r A_j \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

де для $j = \overline{0, r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = & \frac{c_1(\alpha_j)}{2} \left(K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda + \varkappa_j|) |\lambda + \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}} + \right. \\ & \left. + K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda - \varkappa_j|) |\lambda - \varkappa_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}, \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) z \right\} ds, \quad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Функція $K_\nu(z)$, $z \geq 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν , або функцією Макдональда [9]. Відмітимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ і при $z \rightarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

В околах точок $\lambda = \pm \varkappa_j$, $j = \overline{0, r}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda) = & \frac{c_2(\alpha_j)}{2} \left[|\lambda + \varkappa_j|^{\alpha_j-1} (1 - h_j(|\lambda + \varkappa_j|)) + \right. \\ & \left. + |\lambda - \varkappa_j|^{\alpha_j-1} (1 - h_j(|\lambda - \varkappa_j|)) \right], \end{aligned} \quad (1.8)$$

де $c_2(\lambda) = (2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2})^{-1}$,

$$h_j(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_j+1}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha_j}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^{1-\alpha_j} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\frac{\alpha_j+1}{2})}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_j}{2})} \left| \frac{\lambda}{2} \right|^2 + o(|\lambda|^2), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad j = \overline{0, r}.$$

Отже, с.щ. (1.6) має $2r + 2$ точки сингулярності, якщо $\varkappa_0 \neq 0$, та $2r + 1$ точку сингулярності, якщо $\varkappa_0 = 0$. Процес $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\varkappa_0 = 0$.

Коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$, з умови **A2** має спектральне представлення

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

тобто $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ – послідовність коефіцієнтів Фур'є с.щ.

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^r A_j f_{\alpha_j \varkappa_j}(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.10)$$

Зауважимо, що с.щ. (1.10) та с.щ. (1.6), що відповідає неперервному аналогу (1.4) коваріаційної функції $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [10]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \quad (1.11)$$

Оскільки функція Макдональда має властивість

$$K_{\nu}(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad \nu \geq 0, \quad (1.12)$$

то ряд (1.11) збігається, і функцію $f(\lambda)$ означено коректно. До того ж можна сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm \varkappa_j \in (-\pi, \pi)$, $j = \overline{0, r}$.

Припустимо, що функції $g(t, \cdot)$ неперервно диференційовні на Θ_{γ} , $t \geq 1$. Позначимо

$$g_i(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta), \quad i = \overline{1, q}.$$

Розглянемо вектор-градієнт

$\nabla g(t, \theta) = (g_1(t, \theta), \dots, g_q(t, \theta))^*$, функції регресії $g(t, \theta)$, $\theta \in \Theta_{\gamma}$, $t \in \mathbb{N}$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ -алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi, \pi]$. Введемо матричну міру $\mu_T(d\lambda, \theta)$, $\theta \in \Theta_{\gamma}$ на $([-\pi, \pi], \mathcal{B})$ з матрицею щільності

$$\begin{aligned} & \left(\mu_T^{kl}(\lambda, \theta) \right)_{k,l=1}^q = \left(g_T^k(\lambda, \theta) \overline{g_T^l(\lambda, \theta)} \times \right. \\ & \left. \times \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_T^k(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} |g_T^l(\lambda, \theta)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} \right)_{k,l=1}^q, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$g_T^k(\lambda, \theta) = \sum_{t=1}^T e^{i\lambda t} g_k(t, \theta), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad k = \overline{1, q}.$$

Відмітимо, що $d_{kT}^2(\theta) =$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_T^k(\lambda, \theta)|^2 d\lambda = \sum_{t=1}^T g_k^2(t, \theta), \quad k = \overline{1, q}.$$

B1. Послідовність мір $\mu_T(d\lambda, \theta)$ слабо збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda, \theta)$:

$$\mu_T \Rightarrow \mu, \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Умова **B1** вказує, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda, \theta)$ матриці $\mu(d\lambda, \theta)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, а матриці $\mu(B, \theta)$, $B \in \mathcal{B}$, невід'ємно визначені, причому $\mu([- \pi, \pi], \theta)$ – додатно визначена матриця. До того ж, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} a(\lambda) \mu(d\lambda, \theta), \quad T \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Означення 1. Міра $\mu(d\lambda, \theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t, \theta)$ [11, 12] (точніше, її вектор-градієнта $\nabla g(t, \theta)$ [13]).

За умов $\lim_{T \rightarrow \infty} d_{iT}^2(\theta) = \infty$,

$\max_{1 \leq i \leq T} |g_i(t, \theta)| = o(d_{iT}(\theta))$ при $T \rightarrow \infty$, $i = \overline{1, q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda, \theta)$ міри $\mu(d\lambda, \theta)$ можна визначити із співвідношень [12]

$$\begin{aligned} R^{kl}(h) &= \lim_{T \rightarrow \infty} d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \times \\ & \times \sum_{t=1}^T g_k(t+h, \theta) g_l(t, \theta) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda h} \mu^{kl}(d\lambda, \theta), \quad k, l = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

які виконуються при кожному $h \in \mathbb{Z}$.

Введемо матрицю

$$\begin{aligned} J_T(\theta) &= \left(J_{kl,T}(\theta) \right)_{k,l=1}^N = \\ &= \left(d_{kT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \sum_{t=1}^T g_k(t, \theta) g_l(t, \theta) \right)_{k,l=1}^q. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Тоді з (1.13) при $a(\lambda) = 1$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$,

$$J_T(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta) \rightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta) = \mu([- \pi, \pi], \theta) = J(\theta), \quad T \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

причому матриця $J(\theta)$ додатно визначена за означенням спектральної міри μ . Звідси, і матриці $\Lambda_T(\theta) = J_T^{-1}(\theta)$ додатно визначені для $T > T_0$. До того ж, $\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda_T(\theta) = \Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$ також додатно визначена матриця.

Зауважимо, що коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (1.15) може в деяких випадках також виконуватись. Для цього дамо відповідне означення для с.щ. стаціонарного часового ряду $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Означення 2. С.щ. f називається μ -припустимою [12], якщо вона інтегрована за мірою μ , тобто всі елементи матриці $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta)$ скінченні, та для $a = f$ виконується (1.15).

Далі будемо розглядати властивість μ -припустимості с.щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, яку задано формулою (1.11). Введемо множину індексів $I = \{-r, r\}$ і для визначеності нехай $\chi_0 = 0$. Покладемо $\lambda_{-l} = -\lambda_l$, $\lambda_l = \chi_l$, $l = \overline{1, r}$, $\lambda_0 = \chi_0 = 0$. Спираючись на формули (1.7), (1.8) та (1.11), можна стверджувати існування такого достатньо великого числа $c_0 > 0$, що для всіх $c \geq c_0$ знайдуться околиці $V_l(c)$ точок λ_l , $l \in I$, для яких

$$\{\lambda \in [-\pi, \pi] : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{l \in I} V_l(c), \quad (1.19)$$

причому $V_l(c)$ у (1.19) не перетинаються та міри Лебега $m(V_l(c)) \downarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$, $l \in I$.

B2. Для $T > T_0$

$$d_{kT}^{-1}(\theta^0) \max_{\lambda \in V_l(c_0)} |g_T^k(\lambda, \theta^0)| < h_{lk}(\theta^0) < \infty, \quad l \in I, \quad k = \overline{1, q}. \quad (1.20)$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [7] для дискретного часу спостережень та с.щ. (1.11).

Теорема 1. Нехай виконуються умови **A2**, **B1**, **B2** та с.щ. f інтегрована за мірою μ . Тоді f є μ -припустимою функцією.

Далі ми побачимо, що теорема 1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності о.н.к.

Нехай деяка функція $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ – стандартна гауссівська щільність. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є за поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n \left(\sqrt{2\pi} \varphi(x) \right)^{-1} \times \times \frac{d^n}{dx^n} \left(\sqrt{2\pi} \varphi(x) \right), \quad n \geq 0,$$

що утворюють повну ортогональну систему в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(W)}{n!} H_n(x),$$

$$C_n(W) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \geq 0. \quad (1.21)$$

У сформульованій нижче теоремі 2 будемо вважати, що

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) \varphi(x) dx = \mathbb{E}W(\varepsilon_0) = 0.$$

Означення 3. Функція $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ має ранг Ерміта m ($\text{Hrank}(W) = m$), якщо або $C_1(W) \neq 0$ та $m = 1$, або для деякого $m \geq 2$

$$C_1(W) = \dots = C_{m-1}(W) = 0, \quad C_m(W) \neq 0. \quad (1.22)$$

У сформульованій нижче ЦГТ використано поняття ермітового рангу функції для деякої векторної суми випадкових величин та с.щ., що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^s(t)$, $s \in \mathbb{N}$, де $B(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$.

Коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (1.4), відповідає s -та згортка

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*s}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{s-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - \dots - \lambda_s) \times \\ &\times \prod_{i=2}^s \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 \dots d\lambda_s, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

с.щ. (1.6)-(1.8), стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, який було розглянуто вище. Тоді за формулою (1.11) коваріаційній функції $B^s(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, відповідає с.щ.

$$f^{(s)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*s}(\lambda + 2\pi k), \quad \lambda \in [-\pi, \pi], \quad s \geq 2. \quad (1.24)$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, до того ж, сформулюємо для функції $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ наступну альтернативу.

A3. Або (i) $Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$,
або (ii) $Hrank(W) = m$, $m\alpha > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leq l \leq r} \alpha_l, \quad (1.25)$$

α_l – параметри коваріаційної функції (1.3) стаціонарного часового ряду ξ_t , $t \in \mathbb{Z}$.

Нехай для функції W виконується умова (i). При виконанні умови (ii) подальші міркування аналогічні. Звідси коваріаційна функція $B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, за формулами (1.4), (1.5) інтегрована з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.26)$$

є обмеженою та неперервною функцією. До того ж, для будь-якого $s \geq 2$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*s}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^s(t) dt \leq \\ &\leq \frac{B^{s-2}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt < \infty, \end{aligned} \quad (1.27)$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*s}$ неперервні та обмежені однією константою, враховуючи наше припущення $B(0) = 1$.

Також зауважимо, що з рівності

$$B^s(t) = \left(\sum_{l=0}^s A_l B_{\alpha_l, \lambda_l}(t) \right)^s, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \geq 2, \quad (1.28)$$

після підведення правої частини в s -й степінь видно, що с.щ. $\tilde{f}^{*s}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$, для яких справедлива асимптотична формула (1.12). Таким чином, ряд (1.24) збігається рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гауссівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [14]. Нам знадобиться додаткова умова

B3. Для $T > T_0$,

$$d_{iT}^{-1}(\theta^0) \max_{t=\overline{1, T}} |g_i(t, \theta^0)| \leq k^i(0) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}. \quad (1.29)$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови **A1**, **A2**, **B1-B3** та одна з наступних умов для функції $W \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$:

(i) $Hrank(W) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$ та с.щ. f часового ряду ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, є μ -припустимою;

(ii) $Hrank(W) = m$ та $m\alpha > 1$, де α задана формулою (1.25). Тоді випадковий вектор

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T W(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0),$$

$$\nabla g(t, \theta^0) = (g_1(t, \theta^0), \dots, g_q(t, \theta^0))^* \quad (1.30)$$

асимптотично нормальний $N(0, \sigma)$ при $N \rightarrow \infty$, де

$$\sigma = 2\pi \sum_{s=m}^{\infty} \frac{C_s^2(W)}{s!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(s)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0). \quad (1.31)$$

Як було вказано у вступі, нас особливо цікавить тригонометрична функція регресії

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^N (A_k^0 \cos \varphi_k^0 t + B_k^0 \sin \varphi_k^0 t), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \theta^0 &= (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \dots, \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = \\ &= (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0), \end{aligned}$$

$(C_k^0)^2 = (A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k = \overline{1, N}$. Розмістимо частоти $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_N^0)$ у порядку зростання. Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин

$$\Phi_T \subset \Phi(\varphi, \overline{\varphi}), \quad T > T_0 > 0,$$

$$\Phi(\varphi, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathbb{R}^N :$$

$$0 \leq \varphi < \varphi_1 < \dots < \varphi_N < \overline{\varphi} < \pi\},$$

стосовно яких припустимо, що вони містять істинне значення параметра φ^0 та задовольняють умовам

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{1 \leq j < k \leq N} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \quad \varphi \in \Phi_T, \quad (1.33)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\varphi \in \Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \quad (1.34)$$

Умови (1.33) та (1.34) – це умови розрізнення параметрів тригонометричної моделі регресії (1.1) та (1.32).

Позначимо

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^T [X(t) - g(t, \theta)]^2.$$

Означення 4. Будемо називати о.н.к. параметра θ^0 у сенсі Уолкера [15] такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{NT})$, що мінімізує функціонал $Q_T(\theta)$ на параметричній множині $\Theta_T \subset \mathbb{R}^{3N}$, в якій амплітуди $A_k, B_k, k = \overline{1, N}$, можуть набувати будь-які значення, а кутові частоти $\varphi \in \Phi_T^c$, де Φ_T^c – замикання множини Φ_T .

Коли $\varphi > 0$, умова (1.34) виконується. Якщо $\varphi = 0$ та $\Phi_T \subset \Phi(0, \overline{\varphi})$, то для виконання (1.33), (1.34) можемо взяти, наприклад, параметричні множини Φ_T , для яких

$$\inf_{1 \leq j < k \leq N} (\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2}, \quad \inf_{\varphi \in \Phi_T} \varphi_1 = T^{-1/2}.$$

Неважко перевірити, що тригонометрична функція регресії задовольняє умовам **B2** та **B3**, щодо умови **B1** див. розділ 4.

2 Теорема редукції

В цьому розділі для загальної моделі регресії (1.1) ми доводимо теорему редукції, яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу о.н.к. в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу о.н.к. у деякій допоміжній лінійній моделі. Таким чином, вказана теорема редукції, фактично, є теоремою лінеаризації.

Означення 5. О.н.к. невідомого параметра $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_q^0) \in \Theta_T$, $T > T_0$, отриманої за спостереженнями $X_t, t = \overline{1, T}$, у моделі спостережень (1.1) називається будь-який вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q) \in \Theta_T^c$, де Θ_T^c – замикання множини Θ_T , для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta). \quad (2.1)$$

Означення 5 узагальнює означення 4 о.н.к. в сенсі Уолкера для тригонометричної функції регресії (1.32). Існування хоча б одного означеного вище випадкового вектора впливає із теореми (3.10), стор. 270, роботи І. Пфанцгеля [16], якщо $\min_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta)$ досягається для кожного $\omega \in \Omega$.

Зробимо наступні припущення. Нехай функція регресії $g(t, \cdot) \in \mathbb{C}^2(\Theta_\gamma)$, $t \in \mathbb{N}$, та $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0$, $\theta \in \Theta$, $i = \overline{1, q}$. Позначимо

$$d_T^2(\theta) = \text{diag}(d_{iT}^2(\theta))_{i=1}^q,$$

$$g_{il}(t, \theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_l} g(t, \theta), \quad i, l = \overline{1, q}, \quad (2.2)$$

$$d_{il,T}^2(\theta) = \sum_{t=1}^T g_{il}^2(t, \theta), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (2.3)$$

Введемо нормовану о.н.к.

$$\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0). \quad (2.4)$$

Виконаємо заміну змінних $u = d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$, $\theta \in \Theta_T^c$, яка відповідає нормуванню (2.4) у функції регресії та її похідних, і запишемо для $u \in U_T(\theta^0) = d_T(\theta^0)(\Theta_T^c - \theta^0)$

$$h(t, u) = g(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),$$

$$H(t; u_1, u_2) = h(t, u_1) - h(t, u_2),$$

$$h_i(t, u) = g_i(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \quad i = \overline{1, q},$$

$$H_i(t; u_1, u_2) = h_i(t, u_1) - h_i(t, u_2),$$

$$h_{il}(t, u) = g_{il}(t, \theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u), \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Будемо також використовувати позначення

$$V(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\}.$$

Припустимо, що для $R \geq 0$ і $T > T_0(R)$ виконується наступна умова на зростання похідних 1-го та 2-го порядків функції регресії.

$$\begin{aligned} \text{B4. (i)} \quad & \max_{t=\overline{1, T}, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_i(t, u)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq \\ & \leq k^i(R) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \max_{t=\overline{1, T}, u \in V^c(R) \cap U_T(\theta^0)} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \leq \\ & \leq k^{il}(R) \cdot T^{-1/2}, \quad i, l = \overline{1, q}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} \leq \tilde{k}^{il} \cdot T^{-1/2}, \\ & i, l = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В умові **B4** припускається, що константи $k^i, k^{il}, \tilde{k}^{il}$, $i, l = \overline{1, q}$, можуть залежати від істинного значення параметра $\theta^0 \in \Theta$. Зауважимо також, що при $R = 0$ умова **B4(i)** перетворюється на умову **B3** розділу 1.

Введемо вектори

$$\Psi_T(u) = \left(\Psi_T^i(u) \right)_{i=1}^q,$$

$$\begin{aligned} \Psi_T^i(u) &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)}, \\ & i = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

та

$$L_T(u) = \left(L_T^i(u) \right)_{i=1}^q,$$

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \left(\varepsilon_t - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)},$$

$$i = \overline{1, q}. \quad (2.9)$$

Нормована о.н.к. $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0. \quad (2.10)$$

Вектор $L_T(u)$ відповідає допоміжній лінійній регресійній моделі

$$Z(t) = \sum_{i=1}^q g_i(t, \theta^0) \beta_i + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \quad (2.11)$$

і система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \quad (2.12)$$

задає нормовану о.н.к. $\tilde{u}_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, якщо ми покладемо

$$\tilde{u}_T = d_T(\theta^0)(\tilde{\beta}_T - \beta), \quad (2.13)$$

де $\tilde{\beta}_T$ – звичайна о.н.к. параметра β моделі (2.11).

Теорема 3. Якщо виконуються умови **A1**, **A2**, а також умова **B4**, то для довільних $R > 0$, $r > 0$

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \right\} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Доведення. Для довільного $i = \overline{1, q}$

$$\begin{aligned} \Psi_T^i(u) - L_T^i(u) &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} - \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l = \\ &= \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] = \\ &= s_1(u) + s_2(u) + s_3(u). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Для фіксованого $u \in V^c(R)$ маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} s_1^2(u) &= \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)^2 = \\ &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot \frac{H_i(s; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s \leq \\ &\leq \max_{t=\overline{1, T}} \frac{H_i^2(t; u, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0)} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Використовуючи формулу скінченних приростів та умову **B4**, отримуємо

$$\begin{aligned} \max_{t=\overline{1, T}} \frac{|H_i(t; u, 0)|}{d_{iT}(\theta^0)} &\leq \\ &\leq \sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=\overline{1, T}} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| = \\ &= \sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=\overline{1, T}} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} |u_l| \leq \\ &\leq R \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right) T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Тоді

$$\mathbb{E} s_1^2(u) \leq R^2 \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right)^2 T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s|.$$

Доведемо, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

За умов **A1**, **A2**

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} \varepsilon_t \varepsilon_s| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G)}{k!} B^k(t-s) \right| \leq \\ &\leq \mathbb{E} G^2(\xi_0) |B(t-s)|, \end{aligned} \quad (2.19)$$

тобто для доведення (2.18) достатньо довести, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Нехай виконується умова **A2**, тоді

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| &= \\ &= T^{-2} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} (T-|t|) |B(t)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq T^{-1} \sum_{t=-(T-1)}^{T-1} |B(t)| = \\ &= T^{-1} B(0) + 2T^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} |B(t)|. \end{aligned}$$

Якщо $\alpha = \min_{0 \leq j \leq r} \alpha_j \in (0, 1)$, то при $t \geq 1$

$$|B(t)| \leq t^{-\alpha};$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} |B(t)| \leq \sum_{t=1}^{T-1} t^{-\alpha} \leq \int_0^T t^{-\alpha} dt = \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

тобто

$$T^{-1} + 2T^{-1} \sum_{t=1}^{T-1} |B(t)| = O(T^{-\alpha}).$$

Тоді отримуємо, що $s_1(u) \xrightarrow{P} 0$ при $T \rightarrow \infty$ поточково для $u \in V^c(R)$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| > r \right\} \leq \\ &\leq r^{-1} \mathbb{E} \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon \frac{H_i(t; u_1, u_2)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq r^{-1} \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{t=1, T} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)} \mathbb{E} |\varepsilon_0| T. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Використовуючи умову **B4**, маємо

$$\begin{aligned} &\max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{t=1, T} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq \\ &\leq h \left[\sum_{l=1}^q \max_{u \in V^c(R), t=1, T} \frac{|h_{il}(t, u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right] \leq \\ &\leq h \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \cdot \tilde{k}^{il} \right) T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Із (2.21) випливає нерівність

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| > r \right\} \leq k_1 r^{-1} h, \quad (2.22)$$

де

$$k_1 = \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right) \mathbb{E} |\varepsilon_0|.$$

Позначимо N_h скінченну h -сітку кулі $V^c(R)$. Тоді

$$\max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| \leq$$

$$\leq \max_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |s_1(u_1) - s_1(u_2)| + \max_{u \in N_h} |s_1(u)|. \quad (2.23)$$

З (2.20), (2.21) маємо для будь-якого $r > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| > r \right\} \leq \\ &\leq 2k_1 r^{-1} h + \mathbb{P} \left\{ \max_{u \in N_h} |s_1(u)| > \frac{r}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для $\varepsilon > 0$ задамо $h = \frac{\varepsilon r}{4k_1}$. Тоді для $T > T_0$ завдяки поточковій збіжності $s_1(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_1}}} |s_1(u)| > \frac{r}{2} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

і, таким чином,

$$\mathbb{P} \left\{ \max_{u \in V^c(R)} |s_1(u)| > r \right\} \leq \varepsilon.$$

Отже, $s_1(u)$ збігається рівномірно за $u \in V^c(R)$ до нуля за ймовірністю.

За умови **B4** отримуємо

$$\begin{aligned} &\max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} |H(t; 0, u)| = \\ &= \max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} \left| \sum_{i=1}^q \frac{h_i(t, u_t^*)}{d_{iT}(\theta^0)} u_i \right| \leq \\ &\leq R \left[\max_{u \in V^c(R), t=1, T} \sum_{i=1}^q \left(\frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)^2 \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \|k(R)\| \cdot R \cdot T^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $k(R) = (k^1(R), \dots, k^q(R))$. Тоді, за допомогою (2.17) та (2.25), можемо записати

$$\begin{aligned} &\max_{u \in V^c(R)} |s_2(u)| = \\ &= \max_{u \in V^c(R)} \left| \sum_{t=1}^T H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \max_{u \in V^c(R)} \max_{t=1, T} \left| H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^{-1/2} \cdot R^2 \cdot \|k(R)\| \cdot \left(\sum_{l=1}^q k^{il}(R) \tilde{k}^{il} \right), \end{aligned}$$

а, отже, $s_2(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до 0.

Зауважимо, що $s_3(u)$ можна переписати у вигляді

$$s_3(u) = \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \left[H(t; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \sum_{l,j=1}^q \frac{h_{lj}(t, u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} u_l u_j =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^q \left(\frac{h_{lj}(t, u_t^*)}{d_{lT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right) u_l u_j,$$

$$u_t^* \in V(R).$$

Тоді за умови **B4**

$$\max_{u \in V^c(R)} |s_3(u)| \leq \frac{T}{2} \cdot k^i(R) \times$$

$$\times \max_{u \in V^c(R)} \left(\sum_{l,j=1}^q k^{lj}(R) \tilde{k}^{lj} |u_l| |u_j| \right) T^{-3/2} \leq$$

$$\leq \frac{q k^i(R)}{2} \max_{1 \leq l, j \leq q} [k^{lj}(R) \tilde{k}^{lj}] R^2 T^{-1/2}.$$

Отже, $s_3(u)$ рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до 0. ■

Зауваження 1. Твердження теореми 3 є вірним для о.н.к. $\hat{\theta}_T$ із означення 4, так як тригонометрична фінкції регресії задовольняє умові **B4**.

3 Асимптотична єдиність оцінки найменших квадраів

В даному розділі буде доведено, що з ймовірністю, яка прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, нормована о.н.к. $\hat{u}_T$ з (2.4), де о.н.к. $\hat{\theta}_T$ задано означенням 5, є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.10). Цей факт використаємо у розділі 4 при доведенні асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$.

Запишемо

$$J_T(\theta) = \left(J_{il,T}(\theta) \right)_{i,l=1}^q,$$

$$J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \sum_{t=1}^T g_i(t, \theta) g_l(t, \theta), \quad (3.1)$$

$\lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A))$ – найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A .

B5. Для деякого $\lambda_* > 0$ при $T > T_0$

$$\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*. \quad (3.2)$$

Розглянемо нормовану о.н.к.

$$\hat{w}_T = T^{-1/2} d_T(\theta^0) (\hat{\theta}_T - \theta^0), \quad (3.3)$$

якій відповідає заміна змінних

$w = T^{-1/2} d_T(\theta^0) (\theta - \theta^0)$ у функції регресії та її похідних.

Введемо позначення

$$f(t, w) = g(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_i(t, w) = g_i(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_{il}(t, w) = g_{il}(t, \theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$i, l = \overline{1, q}.$$

Також використаємо наступні позначення

$$F(t; w_1, w_2) = f(t, w_1) - f(t, w_2),$$

$$F_i(t; w_1, w_2) = f_i(t, w_1) - f_i(t, w_2),$$

$$F_{il}(t; w_1, w_2) = f_{il}(t, w_1) - f_{il}(t, w_2),$$

$$\Phi_{il,T}(w, 0) = \sum_{t=1}^T F_{il}^2(t; w, 0), \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Введемо умову

B6. Для деякого $r_0 > 0$

$$(i) \quad \max_{t=\overline{1,T}, w \in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t, w)|}{d_{iT}(\theta^0)} \leq$$

$$\leq \hat{k}^i(r_0) \cdot T^{-1/2}, \quad i = \overline{1, q}; \quad (3.4)$$

$$(ii) \quad \max_{t=\overline{1,T}, w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t, w)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \leq$$

$$\leq \hat{k}^{il}(r_0) \cdot T^{-1/2}, \quad i, l = \overline{1, q}; \quad (3.5)$$

$$(iii) \quad \max_{w \in V^c(r_0)} \frac{T \Phi_{il,T}(w, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \|w\|^{-2} \leq$$

$$\leq \hat{k}_{il}(r_0), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (3.6)$$

Звернемо увагу на те, що нерівності (3.4) та (3.5) є модифікаціями нерівностей (2.5) та (2.6) з умови **B4**, відповідно.

Розглянемо функціонал

$$(2T)^{-1} \sum_{t=1}^T [X(t) - f(t, w)]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \quad (3.7)$$

і введемо вектор

$$\mathcal{M}_T(w) = (\mathcal{M}_T^i(w))_{i=1}^q =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial w_i} \left(\frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \right) \right)_{i=1}^q =$$

$$= \left(T^{-1/2} \sum_{t=1}^T [X(t) - f(t, w)] \frac{-f_i(t, w)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q.$$

Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \quad (3.8)$$

Варто зауважити, що якщо нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тоді $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.10).

Ми будемо вимагати, що нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ є слабо консистентною, тобто виконується умова

С. Для будь-якого $r > 0$ $\mathbb{P}\{\|\hat{w}_T\| > r\} \rightarrow 0$,
 $T \rightarrow \infty$.

Достатні умови слабкої консистентності для тригонометричної моделі з неперервним часом спостереження містяться в роботі [7].

Теорема 4. Нехай виконуються умови **A1**, **A2** та **B4(iii)**, **B5**, **B6**, **C**. Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8).

Доведення. Розглянемо загальний елемент матриці Гессе функціонала (3.7)

$$\mathcal{H}_T = (\mathcal{H}_T^{il}(w))_{i,l=1}^q:$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_T^{il}(w) &= \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l} \left(\frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w) \right) = \\ &= T^{-1} \sum_{t=1}^T \left([X(t) - f(t, w)] \frac{-f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_i(t, w) f_l(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T \right) = \\ &= \sum_{t=1}^T [F(t; 0, w) + \varepsilon_t] \frac{-f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{f_i(t, w) f_l(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= \sum_{t=1}^T F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} - \\ &\quad - \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0) + f_i(t, 0)) \times}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0) + f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= q_1(w) + q_2(w) + \\ &\quad + \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0))(f_l(t, w) - f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0)) f_i(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \\ &+ \sum_{t=1}^T \frac{f_i(t, 0) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} = \\ &= q_1(w) + q_2(w) + q_3(w) + q_4(w) + \\ &+ q_5(w) + J_{il,T}(\theta^0), \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність (iii доведення наведено у [17], стор.103)

$$\begin{aligned} &|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \leq \\ &\leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} |\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)|, \quad (3.10) \end{aligned}$$

отримуємо

$$\max_{1 \leq i, l \leq q} |\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)| \leq \sum_{m=1}^5 \max_{1 \leq i, l \leq q} |q_m(w)|. \quad (3.11)$$

Застосовуючи умови теореми, одержуємо для $\|w\| \leq r_0$

$$\begin{aligned} |q_1(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \max_{t=\overline{1, T}} \left| F(t; w, 0) \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} |F(t; w, 0)| \leq \\ &\leq \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} |f(t, w) - f(t, 0)| = \\ &= \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{-1} \max_{t=\overline{1, T}} \left| T^{1/2} \sum_{l=1}^q \frac{f_l(t, w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} w_l \right| \leq \\ &\leq \hat{k}^{il}(r_0) \tilde{k}^{il} T^{1/2} \times \\ &\times \left(\sum_{l=1}^q \max_{t=\overline{1, T}} \left(\frac{f_l(t, w_t^*)}{d_{lT}(\theta^0)} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| \leq \\ &\leq \|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il} \cdot \|w\|, \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\hat{k}(r_0) = (\hat{k}_1(r_0), \dots, \hat{k}_q(r_0)), \quad \|w_t^*\| \leq \|w\|, \quad t = \overline{1, T}.$$

Далі розглянемо

$$\begin{aligned} |q_2(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| = \\ &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{F_{il}(t, w, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} + \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq |q_6(w)| + |q_7(w)|. \quad (3.13) \quad \text{Оскільки}$$

Із умови **B6(iii)** отримуємо

$$\begin{aligned} |q_6(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{F_{il}(t, w, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \left(T \frac{\Phi_{il,T}(w, 0)}{d_{iT}^2(\theta^0) d_{lT}^2(\theta^0)} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0) \|w\|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тепер маємо

$$\begin{aligned} \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \right)^{1/2} &= \\ &= \left(T^{-1} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \mathbb{E}\varepsilon_0^2) + \mathbb{E}\varepsilon_0^2 \right)^{1/2} = \\ &= (\xi_T + \mathbb{E}\varepsilon_0^2)^{1/2}, \\ \mathbb{E}\xi_T^2 &= T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T (\mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2). \end{aligned}$$

Доведемо, що

$$T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 \rightarrow (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

За умови **A1** функцію $G^2(x)$ можна розкласти в ряд в гільбертовому просторі $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}, \varphi(x) dx)$ за поліномами Чебишова-Ерміта:

$$\begin{aligned} G^2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(G^2)}{k!} H_k(x), \\ C_k(G^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} G^2(x) H_k(x) \phi(x) dx, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} B^k(t-s) - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} B^k(t-s) \leq \\ &\leq |B(t-s)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(G^2)}{k!} &= \mathbb{E}G^4(\xi(0)) - (\mathbb{E}G^2(\xi(0)))^2 = \\ &= \mathbb{D}G^2(\xi(0)) < \infty, \end{aligned} \quad (3.17)$$

то із (3.16), (3.17) та (2.18), маємо при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 \varepsilon_s^2 - (\mathbb{E}\varepsilon_0^2)^2 &\leq \\ &\leq \mathbb{D}G^2(\xi(0)) T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

як було доведено у розділі 2. Введемо наступне позначення

$$\xi_T = o_p^{(1)}(1) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Далі, опираючись на умови **B6**, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|q_7(w)|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{f_{il}(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |\mathbb{E}\varepsilon_t \varepsilon_s| \left(\max_{t=1, T} \frac{|f_{il}(t, 0)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right)^2 \leq \\ &\leq (\hat{k}^{il}(r_0) \cdot \tilde{k}^{il})^2 \cdot T^{-2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T |B(t-s)|, \end{aligned} \quad (3.19)$$

звідси,

$$|q_7(w)| = o_p^{(2)}(1) \xrightarrow{P} 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Продовжимо далі оцінювати доданки суми (3.9). Отримуємо

$$\begin{aligned} |q_3(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) \times}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(f_l(t, w) - f_l(t, 0))}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^2 \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^q \max_{t=1, T} \frac{|f_{ij}(t, w_{1t}^*)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \max_{t=1, T} \frac{|f_{ls}(t, w_{2t}^*)|}{d_{lT}(\theta^0) d_{sT}(\theta^0)} \cdot |w_j| \cdot |w_s| \leq \\ &\leq T^2 \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^q \max_{t=1, T} \frac{|f_{ij}(t, w_{1t}^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)} \frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \times \\ &\quad \times \max_{t=1, T} \frac{|f_{ls}(t, w_{2t}^*)|}{d_{ls,T}(\theta^0)} \cdot \frac{d_{ls,T}(\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0) d_{sT}(\theta^0)} |w_j| \cdot |w_s| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^q (\hat{k}^{ij}(r_0) \cdot \tilde{k}^{ij})^2 \right)^{1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{s=1}^q \left(\hat{k}^{ls}(r_0) \cdot \tilde{k}^{ls} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|^2, \quad (3.21)$$

$$\|w_{1t}^*\|, \|w_{2t}^*\| \leq \|w\|, \quad t = \overline{1, T}.$$

Аналогічно з умов **B4** та **B6** випливає, що

$$\begin{aligned} |q_4(w)| &= \left| \sum_{t=1}^T \frac{(f_i(t, w) - f_i(t, 0)) f_l(t, 0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} \right| \leq \\ &\leq T^{3/2} \sum_{j=1}^q |w_j| \max_{t=\overline{1, T}} \frac{|f_{ij}(t, w_T^*)|}{d_{ij,T}(\theta^0)} \times \\ &\times \frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \cdot \frac{|f_l(t, 0)|}{d_{lT}(\theta^0)} \leq \\ &\leq \hat{k}^l(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Таким же чином для $|q_5(w)|$ отримуємо

$$|q_5(w)| \leq \hat{k}^i(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{lj}(r_0) \tilde{k}^{lj} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|. \quad (3.23)$$

Звідси, враховуючи (3.10)-(3.23), бачимо, що

$$\begin{aligned} |\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| &\leq \\ &\leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} \left(\|\hat{k}(r_0)\| \hat{k}^{il} \tilde{k}^{il} \|w\| + \right. \\ &+ \left(o_p^{(1)}(1) + \mathbb{E} \varepsilon_0^2 \right)^{1/2} \left(\hat{k}^{il} \right)^{1/2} \|w\| + o_p^{(2)}(1) + \\ &+ \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\sum_{s=1}^q \left(\hat{k}^{ls}(r_0) \tilde{k}^{ls} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\|^2 + \\ &+ \hat{k}^l(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{ij}(r_0) \tilde{k}^{ij} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| + \\ &+ \hat{k}^i(r_0) \left(\sum_{j=1}^q \left(\hat{k}^{lj}(r_0) \tilde{k}^{lj} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| \Big). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Підставляючи в (3.24) нормовану о.н.к. $\hat{w}_T$, та беручи до уваги, що для $T > T_0$ за умови **B5** $J_T(\theta^0)$ – додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \geq \lambda_*$, для деякого $r > 0$ розглянемо подію

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| \leq r, \left| o_p^{(2)}(1) \right| \leq r, \|\hat{w}_T\| \leq r \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \left| \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \right| \leq \frac{\lambda_*}{2} \right\} = \\ &= \left\{ \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \leq \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \leq \right. \\ &\leq \left. \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \geq \frac{\lambda_*}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тепер, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3} \} &\leq \\ &\leq \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_1} \} + \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_2} \} + \mathbb{P} \{ \overline{\Gamma_3} \} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} + \\ &+ \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} + \mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \}. \end{aligned}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$

$$\mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{та} \quad \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

В такому разі, якщо для $T > T_0$

$\mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за умови **C**, то

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(1)}(1) \right| > r \right\} + \mathbb{P} \left\{ \left| o_p^{(2)}(1) \right| > r \right\} + \\ + \mathbb{P} \{ \|\hat{w}_T\| > r \} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

а, значить, для $T > T_0$

$$\mathbb{P} \{ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \} > 1 - \varepsilon. \quad (3.26)$$

Таким чином, нормована о.н.к. $\hat{w}_T$ з ймовірністю, що прямує до 1 при $T \rightarrow \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.8), тому що матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (3.7) має єдиний екстремум (мінімум) в точці $\hat{w}_T$. ■

Зауваження 2. Оскільки

$-\frac{1}{T^{1/2}} \Psi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, де $\hat{w}_T = T^{-1/2} \hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$, то із єдиності оцінки $\hat{w}_T$ в кулі $V(r)$ з великою ймовірністю при $T > T_0$ для деякого $r > 0$ випливає єдиність оцінки $\hat{u}_T$ з такою ж ймовірністю для $T > T_0$ в кулі $V(T^{1/2}r)$.

Відмітимо, що умови доведеної теореми виконано для тригонометричної функції регресії, тобто для неї є вірним висновок теореми 4.

4 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів суми гармонічних коливань

В даному розділі доведемо теорему про асимптотичну нормальність о.н.к. $\hat{\theta}_T$, яку задано означенням 5, параметра нелінійної моделі регресії (1.1) і застосуємо її для одержання асимптотичної нормальності о.н.к. $\hat{\theta}_T$ з означення 4 параметрів суми гармонічних коливань (1.32).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови A1, A2, A3 для $W = G$, B1, B2, B4-B6, C, та $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, інтегровна за мірою μ у випадку $m = 1$. Тоді розподіл випадкового вектора $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ при $T \rightarrow \infty$ збігається до гауссівського розподілу $N(0, \Gamma)$, де*

$$\Gamma = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

Доведення. Після використання (2.8), (2.9) та позначень розділу 1 отримуємо, що

$$L_T^i(u) = \sum_{t=1}^T \left(G(\xi_t) - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l \right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = 0,$$

або

$$\sum_{t=1}^T G(\xi_t) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} = \\ = \sum_{l=1}^q \sum_{t=1}^T \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \cdot \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot u_l = \\ = \sum_{l=1}^q J_{il,T}(\theta^0) u_l, \quad i = \overline{1, q}.$$

Таким чином, отримали систему рівнянь відносно u :

$$J_T(\theta^0)u = d_T^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T G(\xi_t) \nabla g(t, \theta^0).$$

В наслідок цього, маємо

$$\tilde{u}_T = (\tilde{u}_1 \ \dots \ \tilde{u}_q)^* = \\ = \Lambda_T(\theta^0) \sum_{t=1}^T G(\xi_t) d_T^{-1}(\theta^0) \nabla g(t, \theta^0) = \Lambda_T(\theta^0) \zeta_T, \quad (4.2)$$

де $\Lambda_T(\theta^0) = J_T^{-1}(\theta^0)$.

Далі, взявши до уваги теорему 2, отримуємо, що випадковий вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично нормальним $N(0, \Gamma)$ при $T \rightarrow \infty$, де σ задана формулою (4.1). Зауважимо, що коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$, має вигляд

$$\Gamma_T = \Lambda_T(\theta^0) \sigma_T^2 \Lambda_T(\theta^0), \quad (4.3)$$

де σ_T^2 – коваріаційна матриця вектора ζ_T . При $T \rightarrow \infty$

$$\Gamma_T = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G)}{n!} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\lambda) \mu_T(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \mu_T(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \rightarrow \Gamma. \quad (4.4)$$

Далі потрібно довести, що функція розподілу $G_T(y, \theta^0)$ випадкового вектору $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ збігається при $T \rightarrow \infty$ до гауссівської функції розподілу

$$\Phi_{0,\Gamma}(y) = \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)), \\ \Pi(y) = (-\infty, y_1) \times \dots \times (-\infty, y_q), \quad y \in \mathbb{R}^q.$$

Для довільного $r > 0$, покажемо, що

$$\Delta_T(r) = \mathbb{P} \{ \|\hat{u}_T - \tilde{u}_T\| > r \} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Введемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T \in V^c(R-r)\}$, де R таке, що для $T > T_0$, в наслідок асимптотичної нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $\mathbb{P}\{A_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ – фіксоване достатньо мале число.

Також задамо подію

$$B_T = \left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r \right\}.$$

З теореми 3 (редукції) випливає, що для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{\overline{B}_T\} = \mathbb{P}\left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \times \right. \\ \times (\Psi_T(u) - L_T(u))\| > r \Big\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\left\{ \lambda_{\max}(\Lambda_T(\theta^0)) \times \right. \\ \times \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \Big\} = \\ = \mathbb{P}\left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))} \times \right. \\ \times \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \Big\} \leq \\ \leq \mathbb{P}\left\{ \max_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| \geq \lambda_* r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім того, розглянемо подію C_T , яка полягає в тому, що о.н.к. $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.7), до того ж, для $T > T_0$ $\mathbb{P}\{\bar{C}_T\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за теоремою 4. Таким чином, для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \geq 1 - \varepsilon. \quad (4.6)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \Lambda_T(\theta^0)L_T(u) &= \\ &= \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{t=1}^T \varepsilon_t \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q - \\ &- \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{l=1}^q u_l \sum_{t=1}^T \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \right)_{i=1}^q = \\ &= \tilde{u}_T - \Lambda_T(\theta^0) \left(\sum_{l=1}^q u_l \cdot J_{il,T}(\theta^0) \right)_{i=1}^q = \tilde{u}_T - u. \end{aligned}$$

Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ відбулася, то для $u \in V^c(R)$

$$\begin{aligned} \|u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)\| &= \\ &= \|u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u)) + \Lambda_T(\theta^0)L_T(u)\| = \\ &= \|u + \tilde{u} - u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq \\ &\leq \|\tilde{u}\| + \|\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq \\ &\leq R - r + r = R, \end{aligned}$$

тобто $G_T(u) = u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ в $V^c(R)$.

Для доведення (4.5) застосуємо теорему Брауера про нерухому точку [18], сформульовану в наступній формі.

Теорема (Брауера). *Нехай F неперервне відображення $V^c(R)$ в себе. Тоді існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Застосуємо дану теорему до $F_T(u)$, тоді отримуємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, або, в наслідок того, що $\Lambda_T(\theta^0)$ – невироджена, $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Оскільки подія C_T виконується, то єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u) = 0$ в кулі $V^c(R)$ є нормована о.н.к. $\hat{u}_T$, тобто $\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\}$ і $\mathbb{P}\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon$. Зауважимо, що з (4.6) випливає

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \mathbb{P}\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \left\{\max_{u \in V^c(R)} \|\Lambda_T(\theta^0) \times \right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (\Psi_T(u) - L_T(u))\| \leq r\} \Big\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\| \leq r\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{\|\Lambda_T(\theta^0)L_T(\hat{u}_T)\| \leq r\right\} = \\ &= \mathbb{P}\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \leq r\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Тоді з (4.7) випливає (4.5).

Нехай для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ – σ -алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \left\{x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon\right\}, \\ A_{-\varepsilon} &= \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon. \end{aligned}$$

Враховуючи (4.5), одержуємо для функції розподілу

$$G_T(y, \theta^0) = \mathbb{P}\{\hat{u}_T \in \Pi(y)\}, \quad y \in \mathbb{R}^q,$$

та для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ і довільного $\varepsilon > 0$

$$G_T(y, \theta^0) \geq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\} - \Delta_T(\varepsilon), \quad (4.8)$$

$$G_T(y, \theta^0) \leq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon\} + \Delta_T(\varepsilon). \quad (4.9)$$

Раніше було доведено, що для довільних $y \in \mathbb{R}^q$, $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\pm\varepsilon}\} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{\pm\varepsilon})| &\rightarrow 0, \\ T &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Нехай $\varphi(y, \theta^0)$ – гауссівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\Gamma}(y)$. Через те, що $\lambda_{\min}(\Gamma) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{\max}(\Gamma) = \bar{\lambda} < \infty$, маємо

$$\varphi(y, \theta^0) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp\left\{\frac{-\|y\|^2}{2\bar{\lambda}}\right\} = \nu(\|y\|).$$

Тепер до $\nu(\|y\|)$ застосуємо наступну теорему [19].

Теорема. *Нехай ν – невід'ємна диференційовна функція на $[0, \infty)$ така, що*

$$(1) \quad b = \int_0^{+\infty} |\nu'(\lambda)| \lambda^{q-1} d\lambda < \infty;$$

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ та для довільних $\varepsilon, \delta > 0$ має місце нерівність

$$\int_{C_\varepsilon \setminus C_{-\delta}} \nu(\|y\|) d\lambda \leq b \left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)} \right) (\varepsilon + \delta).$$

Після застосування даної теореми до $\nu(\|y\|)$, для будь-якого $\psi \neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} & |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\psi)| = \\ & = \int_{\Pi} \varphi(y, \theta^0) dy \leq b \left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)} \right) |\psi|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

де $\Pi = \begin{cases} \Pi(y)_\psi \setminus \Pi^c(y), & \text{якщо } \psi > 0, \\ \Pi(y) \setminus \Pi(y)_\psi, & \text{якщо } \psi < 0. \end{cases}$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & G_T(y, \theta^0) - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(y)| \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon \} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon)| + \\ & + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon) - \Phi_{0,\Gamma}(y)|; \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{0,\Gamma}(y) - G_T(y, \theta^0) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \} + \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \}| \leq \\ & \leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon}) - \mathbb{P} \{ \tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon} \}| + \\ & + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon})|. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким чином, зі співвідношень (4.6)-(4.13), отримуємо

$$G_T(y, \theta^0) \rightarrow \Phi_{0,\Gamma}(y), \quad y \in \mathbb{R}^q, \quad T \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Нехай $g(t, \theta^0)$ має вигляд (1.32), тоді вона має блочно-діагональну спектральну міру $\mu(d\lambda, \theta^0)$ (див., наприклад, [5]) з блоками

$$\begin{pmatrix} \delta_k & i\rho_k & \bar{\beta}_k \\ -i\rho_k & \delta_k & \bar{\gamma}_k \\ \beta_k & \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

де

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{\sqrt{3}}{2} (C_k^0)^{-1} (B_k^0 \delta_k + iA_k^0 \rho_k), \\ \gamma_k &= \frac{\sqrt{3}}{2} (C_k^0)^{-1} (-A_k^0 \delta_k + iB_k^0 \rho_k), \end{aligned} \quad (4.15)$$

міра $\delta_k = \delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ зосереджені у точках $\pm\varphi_k^0$, причому

$$\delta_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \frac{1}{2}, \quad \rho_k(\{\pm\varphi_k^0\}) = \pm\frac{1}{2}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Це означає, що умову **B1** для тригонометричної функції регресії (1.32) виконано.

За тотожністю Планшереля

$$\mu_T(\mathbb{R}, \theta^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \theta^0) =$$

$$\begin{aligned} & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T^{jl}(\lambda, \theta^0) d\lambda \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_T^j(\lambda, \theta^0) \overline{g_T^l(\lambda, \theta^0)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g_T^j(\lambda, \theta^0)|^2 d\lambda \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} |g_T^l(\lambda, \theta^0)|^2 d\lambda \right)^{-1/2} d\lambda \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(d_{jT}^{-1}(\theta^0) d_{lT}^{-1}(\theta^0) \sum_{t=1}^T g_j(t, \theta^0) g_l(t, \theta^0) \right)_{j,l=1}^q = \\ & = \left(J_{jl,T}(\theta^0) \right)_{j,l=1}^q. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови **B1**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_T(d\lambda, \theta^0) = \left(J_{jl,T}(\theta^0) \right)_{j,l=1}^q = J_T(\theta^0),$$

і коли $T \rightarrow \infty$, то $J_T(\theta^0) \rightarrow J(\theta^0)$, де $J(\theta^0)$ деяка додатно визначена матриця, для якої $\lambda_{\min}(J(\theta^0)) \geq \tilde{\lambda}_* > 0$, і

$$J(\theta^0) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu^{jl}(d\lambda, \theta^0) \right)_{j,l=1}^q = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(d\lambda, \theta^0). \quad (4.16)$$

Для тригонометричної функції регресії (1.32) матрицю $J(\theta^0)$ задано виразом (3.30).

Варто зауважити, що для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32), використовуючи (4.14), (4.15), отримуємо, що матриця σ з теореми 2 розділу 1 є блочно-діагональною з блоками σ_k , $k = \overline{1, N}$, вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_k &= 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k)}{n!} \times \\ & \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Тепер можна сформулювати

Наслідок 3. За умов **A1**, **A2**, **A3** при $W = G$, справедливе твердження теореми 2 з блочно-діагональною матрицею σ з блоками σ_k , $k = \overline{1, N}$, вигляду (4.17).

Враховуючи формули (4.1), (4.14)-(4.17), можна побачити, що для тригонометричної

функції регресії Γ є блочно-діагональною матрицею з блоками

$$\Gamma_k = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

$$k = \overline{1, N}. \quad (4.18)$$

Також варто зауважити, що як показано у розділі 2, для тригонометричної функції регресії (1.32) вірні наступні співвідношення

$$d_{3k-2,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2},$$

$$d_{3k-1,T}(\theta^0) \sim 2^{-1/2} T^{1/2},$$

$$d_{3k,T}(\theta^0) \sim 6^{-1/2} C_k^0 T^{3/2}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.19)$$

Далі перейдемо від нормованої о.н.к. $d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ до нормованої о.н.к.

$$\left(T^{1/2} (A_{1T} - A_1^0), T^{1/2} (B_{1T} - B_1^0), \right.$$

$$T^{3/2} (\varphi_{1T} - \varphi_1^0), \dots,$$

$$T^{1/2} (A_{NT} - A_N^0), T^{1/2} (B_{NT} - B_N^0),$$

$$\left. T^{3/2} (\varphi_{NT} - \varphi_N^0) \right) \quad (4.20)$$

і введемо блочно-діагональну матрицю Z з блоками

$$Z_k = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{-1/2} C_k^0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.21)$$

В такому разі вектор (4.20) асимптотично нормальний $N(0, \tilde{\Gamma})$, де блочно-діагональна матриця $\tilde{\Gamma}$, містить блоки

$$2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \left[Z_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} \\ \frac{\sqrt{3}B_k^0}{2C_k^0} & -\frac{\sqrt{3}A_k^0}{2C_k^0} & 1 \end{bmatrix} Z_k \right]^{-1} =$$

$$= 4\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A_k^0}{2} \\ \frac{B_k^0}{2} & -\frac{A_k^0}{2} & \frac{C_k^{02}}{3} \end{bmatrix}^{-1}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (4.22)$$

Після обернення цих матриць отримуємо наступний результат, враховуючи, що всі умови, які накладались на функцію регресії в теоремі 2 (розділ 1) справедливі для тригонометричної функції регресії також. Зокрема, виконання умови **B2** (μ -припустимості с.щ. $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$) для тригонометричної функції регресії (1.32) доведено в роботі О.В. Іванова, І.М. Савич [20].

Розглянемо множини $\Phi = \{\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_N^0\}$ та $K = \{\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r\}$. Тоді умова **B2** виконується, якщо

$$\Phi \cap K = \emptyset. \quad (4.23)$$

Теорема 6. Якщо для тригонометричної моделі регресії (1.1), (1.32) виконано умови **A1**, **A2**, **A3** при $W = G$, (4.23), то нормована о.н.к. (4.20) асимптотично нормальна $N(0, \tilde{\Gamma})$, із блочно-діагональною матрицею

$$\tilde{\Gamma} = \text{diag} \left(\tilde{\Gamma}_k, k = \overline{1, N} \right) \quad (4.24)$$

з блоками

$$\tilde{\Gamma}_k = \frac{4\pi}{(C_k^0)^2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(G) f^{(n)}(\varphi_k^0)}{n!} M_k, \quad (4.25)$$

$$M_k = \begin{bmatrix} A_k^{02} + 4B_k^{02} & -3A_k^0 B_k^0 & -6B_k^0 \\ -3A_k^0 B_k^0 & 4A_k^{02} + B_k^{02} & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 \end{bmatrix},$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Висновки

У роботі отримано асимптотичну нормальність о.н.к. параметрів тригонометричної моделі регресії з дискретним часом та шумом, що є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Одержано достатні умови асимптотичної єдиності за ймовірністю о.н.к. параметрів нелінійної моделі регресії, що охоплює випадок тригонометричної регресії. З використанням теореми Брауера про нерухому точку отримано достатні умови асимптотичної нормальності о.н.к. параметрів загальної нелінійної моделі регресії та розглянуто їх застосування до тригонометричної моделі регресії.

Природним напрямком продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу о.н.к., щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади

несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивчень у роботі.

Список використаних джерел

1. *Whittle P.* The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure / P. Whittle // *Trabajos Estadistica.* – 1952. – Vol. 3. – P. 43-47.
2. *Walker A.M.* On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals / A.M. Walker // *Adv. Appl. Probab.* – 1973. – Vol. 5. – P. 217-241.
3. *Hannan E.J.* The estimation of frequency / E.J. Hannan // *J. Appl. Probab.* – 1973. – Vol. 10. – P. 510-519.
4. *Дороговцев А.Я.* Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. – 1982. – 192 с.
5. *Иванов А.В.* Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // *Теория Вероят. и Матем. Статист.* – 1979. – №20. – С. 44-59.
6. *Кнопов П.С.* Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П.С. Кнопов // К.: Наукова думка. – 1980. – 151 с.
7. *Ivanov A.V.* Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics.* – 2015. – V. 49, 1. – P. 156-186.
8. *Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Savich I.N.* Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra. // *Ann. Probab.* – 2013. – Vol. 41, №2. – P. 1088-1114.
9. *Abramowitz M.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M.Abramowitz, I.A. Stegun // New York: Dover Publications. – 1972. – 502 p.
10. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М. "Мир". – 1976. – 757 с.
11. *Grenander U.* On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // *Ann. Math. Statist.* – 1954. – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
12. *Ибрагимов И.А.* Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.: Наука. – 1970. – 384 с.
13. *Иванов А.В.* Статистический анализ случайных полей / А.Я. Иванов, Н.Н. Леоненко // К.: Вища Школа. – 1986. – 216 с.
14. *Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Savich I.N.* Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian processes with singular spectra. // *Ann. Probab.* – 2013. – Vol. 41, №2. – P. 1088-1114
15. *Walker A.M.* Some asymptotic results for the periodogram of a stationary time series / A.M. Walker // *I. Aust. Math. Soc.* – 1965. – Vol. 5. – P. 107-128.
16. *Pfanzagl J.* On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates / J. Pfanzagl // *Metrika.* – 1969. – Vol. 14. – P. 249-272.
17. *Wilkinson J.H.* The algebraic eigenvalue problem / J.H. Wilkinson // Oxford: Clarendon Press. – 1965. – 680 p.
18. *Гончаренко Ю.В.* Теорема Брауэра / Ю.В. Гончаренко, С.И. Ляшко // К.: «КИИ». – 2000. – 48 с.
19. *Бхаттачария Р.Н.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения / Р.Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао // М.: «Наука». – 1982. – 286 с.
20. *Иванов О.В., Савич І.М.* μ - припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії // *Наукові вісті НТУУ "КПІ* № 1(63), 2009, 143-148.

References

1. WHITTLE P. (1952) The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure. *Trabajos Estadística*. – Vol. 3. – P. 43-47.
2. WALKER A.M. (1973) On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals. *Adv. Appl. Probab.* – Vol. 5. – P. 217-241.
3. HANNAN E.J. (1973) The estimation of frequency. *J. Appl. Probab.* – Vol. 10. – P. 510-519.
4. DOROGOVTSSEV A.YA. (1982) Theory of estimation of the parameters of random processes. Kiev, Vyshcha Shkola. – 192 p. (in Russian)
5. IVANOV A.V. (1980) A solution of the problem of detecting hidden periodicities. *Theor. Probab. Math. Statist.*, № 20, P. 51 - 68.
6. KNOPOV P.S. (1980) Optimal estimators of parameters of stochastic systems. Kiev, Naukova Dumka – 151 p. (in Russian)
7. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., ZHURAKOVSKY B.M. (2015) Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. – V. 49, 1. – P. 156-186.
8. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., SAVICH I.N. (2013) Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian processes with singular spectra. *Ann. Probab.* — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114.
9. ABRAMOWITZ M., STEGUN I.A. (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications. – 502 p.
10. HANNAN E.J. (1970) *Multiple time series*, Wiley, New-York - London - Sydney - Toronto. - 536 p.
11. GRENANDER U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Statist.* – Vol. 25, 2. – P. 252-272.
12. IBRAGIMOV I.A., ROZANOV Yu.A. (1980) *Gaussian random processes*, Springer - Verlag, New-York. - 284 p.
13. IVANOV A.V., LEONENKO N.N. (1989) *Statistical analysis of random fields*, Kluwer AP, Dordrecht / Boston / London. - 244 p.
14. IVANOV A.V., LEONENKO N.N., RUIZ-MEDINA M.D., SAVICH I.N. (2013) Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian processes with singular spectra. *Ann.Probab.* — Vol. 41, №2. — P. 1088-1114.
15. WALKER A.M. (1965) Some asymptotic results for the periodogram of a stationary time series. I. *Aust. Math. Soc.* – Vol. 5. – P. 107-128.
16. PFANZAGL J. (1969) On the Measurability and Consistency of Minimum Contrast Estimates. *Metrika.* – Vol. 14. – P. 249-272.
17. WILKINSON J.H. (1965) *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Clarendon Press. – 680 p.
18. GONCHARENKO Yu.V., LYASHKO S.I. (2000) Brouwer theorem, Kiev, Kiy. - 48 p. (in Russian)
19. BHATTACHARYA R.N., RANGA RAO R. (1976) *Normal approximation and asymptotic expansions*, Wiley. - 274 p.
20. IVANOV A.V., SAVYCH I.N. (2009) μ - admissibility of spectral density of strongly dependent random noise in nonlinear regression model. *Naukovi visti NTUU "KPI* 1(63), P. 143-148. (in Ukrainian)

Надійшла до редколегії 10.06.2019