УДК 539.375 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.5>

Гусак В. О., студент.

V.O. Husak, student.

Закони збереження в задачах динамічного руйнування

Conservation laws in dynamic fracture tasks

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова, 4-е,
e-mail: gusakw7@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e,
e-mail: gusakw7@gmail.com

Розглянуто дві моделі руйнування стрижня під дією пружної хвилі: з дисипацією енергії при руйнуванні та без дисипації енергії. Досліджено збереження інтегралів повної механічної енергії та кількостей руху фрагментів стрижня. Для моделі руйнування без дисипації енергії повна механічна енергія зберігається. Для моделі руйнування, що передбачає дисипацію енергії, повна механічна енергія зменшується, хоча рух центру інерції зберігається. А отже, динамічне руйнування відбувається за рахунок зменшення енергії хвильового процесу в стрижні. Застосування моделей проілюстровано на прикладі дослідження квазістатичного руйнування шляхом поширення крихкої тріщини. Отримано залежність енергії руйнування від розміру тріщини та повну енергію руйнування.

Ключові слова: динамічне руйнування, поширення хвиль, енергія руйнування.

Two fracture model under elastic wave action are considered: with energy dissipation while fracturing and without energy dissipation. The conservation of integrals of the complete mechanical energy and the quantities of motion of the fragments of the rod is investigated. For the model of fracture without energy dissipation, the complete mechanical energy is stored. For a fracture model involving energy dissipation, the complete mechanical energy decreases, although the motion of the inertia center remains. Therefore, dynamic fracture occurs due to the dissipation of the energy of the wave process in the rod. The application of the models is illustrated by an example of a study of quasistatic fracture by the propagation of a brittle crack. The dependence of the fracture energy on the crack size as well as the complete fracture energy were obtained.

Key Words: dynamic fracture, wave propagation, energy of fracture.

1. Вступ

Руйнування - це процес розділення тіла на дві або більше частин, при прикладенні напружень розтягу, стиску або зсуву. Будь-який процес руйнування відбувається в два етапи: спочатку зароджується тріщина, а потім вона поширюється [1,2].

Найчастіше руйнування конструкцій є крихким або квазіпластичним [3]. У випадку крихкого руйнування, тріщина поширюється швидко з граничною швидкістю c_R без помітних пластичних деформацій. Тріщину в цьому випадку характеризують як нестійку, а розвиток тріщини після того, як вона виникла, відбувається довільним чином без збільшення прикладених напружень [4,5].

Під дією навантаження в тілі накопичується потенціальна енергія пружної деформації, а при зростанні тріщини частина потенціальної енергії вивільняється. Гріффітс показав, що зростання тріщини можливо лише в тому випадку, якщо при її зростанні виділяється більше енергії, чим потрібно для утворення нових поверхонь при зростанні тріщини [6,7].

2. Задача

Розглядається задача про поширення в стрижні скінченної довжини пружних хвиль збурених обмеженим імпульсом напружень, прикладеного до торця (Рис. 1).

Рис. 1. Модель навантаження стрижня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -S(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

$$S(t) = \begin{cases} S(t), & 0 < t < \tau_s, \\ 0, & t > \tau_s \end{cases}, \quad S(t) \in [0, 1].$$

Швидкість руху центру інерції та енергію (кінетичну та потенціальну) стрижня можна порахувати як безпосередньо з розв'язку, так і через інтегральні перетворення виразу (1).

$$v_c = \int_0^1 (\partial u / \partial t)(x, t) dx = - \int_0^t (\partial u / \partial x)(0, t) dt = \int_0^t S(t) dt$$

Рис. 2. Швидкість руху центру інерції

Повні кінетична та потенціальна енергії:

$$T = 1/2 \int_0^1 (\partial u / \partial t(x, t))^2 dx \quad (4)$$

$$\Pi = 1/2 \int_0^1 (\partial u / \partial x(x, t))^2 dx \quad (5)$$

Кінетична енергія руху разом з центром інерції та відносного руху відносно центру інерції:

$$T_c = 1/2 v_c^2 \quad (6)$$

$$T_r = T - 1/2 v_c^2 \quad (7)$$

Рис. 3. Кінетична енергія

$$E = T + \Pi = \int_0^{\min(t, \tau_s)} S^2(\kappa) d\kappa \quad (8)$$

Зберігається також і внутрішня енергія стрижня після закінчення збурення $t > \tau_s$.

Рис. 4. Повна механічна енергія

Отже, для хвильових процесів в твердому тілі справедливі теореми про рух центру інерції матеріальної системи та про зміну повної механічної енергії матеріальної системи [8].

Дифракція пружної хвилі призводить до зменшення потенціальної енергії та збільшення на таку ж частку кінетичної енергії. Повна механічна енергія не змінюється в процесі дифракції. Кінетична енергія твердотільного руху разом з центром інерції не змінюється в процесі дифракції. Для коротких імпульсів навантаження, частка енергії твердотільного руху пропорційна проміжку навантаження.

3. Фрагментування стрижня без дисипації енергії

Вважаємо, що в перерізі x_f в момент часу t_f (умова $0 < (t_f - 1) - (1 - x_f) < \tau_s$, забезпечує умову можливого руйнування в зоні розтягу) стрижень руйнується на 2 фрагменти.

За модель руйнування приймемо умову розділення стрижня та прикладання до торців, що утворилися, напружень, протилежних до хвильових напружень в суцільному стрижні, що забезпечує умову звільнення від напружень для суперпозиції розв'язків. Подібна модель руйнування не передбачає, вочевидь, дисипації енергії. Дійсно, нехай маємо складений стрижень (з фрагментами $0 < x < x_f$ та $x_f < x < 1$). При навантаженні хвилю стиску фрагменти не розділяються. Після відбиття та формування хвилі розтягу, фрагменти розділяються без відсутності контакту по перерізу складання для наступних після руйнування моментів часу. Збережені величини знаходяться за методом попереднього розділу.

Швидкості центрів інерцій фрагментів:

$$v_c^I = \frac{1}{x_f} \int_0^{t_f+x_f-2} S(t) dt \quad (9)$$

$$v_c^{II} = \frac{1}{1-x_f} \int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s} S(t) dt \quad (10)$$

а отже, швидкість спільного центру інерції фрагментів зберігається:

$$x_f v_c^I + (1-x_f) v_c^{II} = \int_0^{\tau_s} S(t) dt \quad (11)$$

що збігається з виразом (3) для $t > t_f > \tau_s$.

Можна показати, що кінетичні, потенціальні (а отже і повні) механічні енергії фрагментів не залежать від часу. Для 1-го фрагменту:

$$\begin{cases} \Pi^I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f+x_f-2} S^2(\kappa) d\kappa \\ T^I = \frac{1}{2} \int_0^{t_f+x_f-2} S^2(\kappa) d\kappa \\ E^I = \int_0^{t_f+x_f-2} S^2(\kappa) d\kappa \end{cases}$$

$$T^I = \Pi^I = \frac{1}{2} E^I = \int_0^{t_f+x_f-2} S^2(t) dt \quad (12)$$

Для 2-го фрагменту:

$$\begin{cases} \Pi^{II} = \frac{1}{2} \int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s} S^2(t) d\kappa \\ T^{II} = \frac{1}{2} \int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s} S^2(t) d\kappa \\ E^{II} = \int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s} S^2(t) d\kappa \end{cases}$$

$$T^{II} = \Pi^{II} = \frac{1}{2} E^{II} = \int_{t_f+x_f-2}^{\tau_s} S^2(t) dt \quad (13)$$

А отже, повна спільна механічна енергія фрагментів зберігається:

$$E = \int_0^{\tau_s} S^2(t) dt \quad (14)$$

Для такої моделі руйнування, справедливі теореми про збереження руху центру інерції та збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок [8].

Повна механічна енергія двох фрагментів та швидкість спільного центру інерції зберігаються:

$$E = \int_0^{\tau_b} S^2(\kappa) d\kappa, \quad v_c = \int_0^{\tau_b} S(\kappa) d\kappa \quad (15)$$

$$T_c / E = \frac{1}{2} \frac{\left(\int_0^{\tau_b} S^2(\kappa) d\kappa \right)^2}{\int_0^{\tau_b} S^2(\kappa) d\kappa} < \frac{1}{2}$$

Фрагменти роз'єднуються без удару (швидкості руху центрів інерції неперервні). Фрагмент I гальмується, фрагмент II розганяється. Повторний контакт неможливий.

4. Руйнування стрижня, що враховує дисипацію енергії

Розглянута модель руйнування не може бути застосована для випадку, коли руйнування пов'язане з розвиненням тріщин або утворенням

зони пластичної деформації. Для останнього випадку, запропонуємо модель руйнування, що зводиться до послаблення перерізу руйнування за заданим часовим законом. Нехай

$$E = E_0(1 - f(t - t_f)\delta(x - x_f)), \quad f(\tau): f(0) = 0, \quad f(\tau_f) - 1, f'(\tau) = 0, \tau \in [0, \tau_f] \quad (16)$$

Шукаємо повний розв'язок для моделі у вигляді розв'язку (1) для $t \in [0, \tau_f]$ та розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t - t_f) \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (17)$$

$$x \in (0, 1), \quad t_f < t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t_f < t$$

$$u(x, t_f) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_f) = v_0(x), \quad 0 < x < 1$$

де $u_0(x)$, $v_0(x)$ - переміщення та швидкості розв'язку (2) в момент часу t_f . Для зручності, в подальшому при розв'язанні (8) під t будемо розуміти $t - t_f$.

Використавши другу формулу Гріна для хвильового оператора з фундаментальним розв'язком:

$$u^*(x, t; \tau, \xi) = -1/2 H(t - \tau - |x - \xi|)$$

$$u(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \int_{\max(\xi - (\tau_f - \tau), 0)}^{\min(\xi + (\tau_f - \tau), 1)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau_f) dx - \frac{1}{2} \{ u(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) + u(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) \} - \frac{1}{2} \text{sign}(x_f - \xi) f(\tau + |x - \xi|) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x_f, \tau + |x_f - \xi|) H(\tau_f - \tau - |x_f - \xi|) \quad (18)$$

Розв'язок має утримувати неперервну частину $u_0(x, t)$, що пов'язана з проходженням хвилі перерізу $x = x_f$ так і розривну $u_1(x, t)$, що визначається дифракцією хвилі в перерізі руйнування.

Отже, $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t)$, де

$$u_0(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \int_{\max(\xi - (\tau_f - \tau), 0)}^{\min(\xi + (\tau_f - \tau), 1)} \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, \tau_f) dx - \frac{1}{2} \{ u_0(\xi - (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) + u_0(\xi + (\tau_f - \tau), \tau_f) H(\xi - (\tau_f - \tau)) \} \quad (19)$$

$$\begin{cases} u_0(\xi, 0) = u_0(\xi) \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(\xi, 0) = v_0(\xi) \end{cases}, \quad 0 < \xi < 1 \quad (20)$$

- неперервна частина розв'язку, а

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + \xi, \tau) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + \xi, \tau) = -\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f - \xi, \tau) \end{cases} \quad (21)$$

- розривна частина розв'язку.

Умова автомодельності для $u_1(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f, \tau) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + 0, \tau) = \\ = \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f) - \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_f + (\tau_f - \tau), \tau_f) \end{aligned} \quad (22)$$

(18) з врахуванням (19), (20) та (21) має вигляд:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} \right](x_f, \tau) = \frac{d}{d\tau} \left(f(\tau) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)(x_f, \tau) \right) \\ \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} \right](x_f, \tau) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

що і визначає модель руйнування, побудовану на нашій гіпотезі.

Інтегрування щодо стрибка переміщень дозволяє отримати:

$$[u] = [u_1](x_f, \tau) = f(\tau) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)(x_f, \tau) \quad (24)$$

Оскільки цей вираз отримано з інтегрального представлення розв'язку, він подає зв'язок між стрибком переміщень та напруженнями в перерізі руйнування. Для введеної моделі руйнування, як і раніше можна визначити збережені величини:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t - t_f) dt \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = \\ = \int_0^T f(t - t_f) dt \times \left(\int_0^1 \delta'(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_0^1 \delta(x - x_f) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) = \\ = \int_0^T f(t - t_f) \left\{ -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_f, t) \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

А отже, руйнування не призводить до зміни швидкості центру інерції стрижня: $\Delta v_c = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta E(t) = -\frac{1}{2} \int_{t_f}^t f'(t - t_f) / f(t - t_f) \times \\ \times \frac{\partial u(x_f, t)}{\partial x} [u_1](x_f, t) dt \end{aligned} \quad (26)$$

Енергія руйнування ($\Delta E(t)$ для $t > t_f + \tau_f$ - не залежить від часу) визначається рівнем напружень розтягу $E \frac{\partial u(x_f, t)}{\partial x}$ та фіктивним стрибком переміщень $[u_1](x_f, t)$ в перерізі руйнування і залежить від динаміки руйнування $f(t)$. У випадку, коли $[u](x_f, t)$ можна знехтувати, $\Delta E(t_f + \tau_f) = 0$ та руйнування відбувається без дисипації енергії.

5. Квазістатичне крихке руйнування

В якості прикладу реалізації другої динамічної моделі руйнування розглянемо руйнування стрижня через виникнення та розвинення в перерізі руйнування внутрішньої центральної дискової тріщини. Для спрощення, вважатимемо, що руйнування відбувається квазістатично.

Для квазістатичної рівноважної тріщини радіусу r в перерізі з напруженнями розтягу σ_0 , що розташована центральним чином в стрижні з радіусом R наближений за методом плоских перерізів та усереднений по перерізу об'ємного стрижня стрибок переміщень може бути знайдено за [9]:

$$[u_z] = \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi} \left(\frac{R}{l}\right) C\left(\frac{r}{R}\right) \sigma_0, \quad (27)$$

$$C\left(\frac{r}{R}\right) = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\arcsin(r/R)}{(r/R)\sqrt{1-(r/R)^2}} \right]$$

де ν - коефіцієнт Пуассона, l - довжина стрижня.

Поклавши в цьому випадку $f(t) = (r(t)/R)^2$ та застосувавши (26), отримаємо:

$$\Delta E(\hat{r}) = -\frac{8(1-\nu^2)}{3\pi} \left(\frac{R}{L}\right) \sigma_0^2 \times \left(\hat{r} + \hat{r}^3 / 3 - \sqrt{1-\hat{r}^2} \arcsin(\hat{r}) \right) \quad (28)$$

Повна енергія, що дисипується при фрагментуванні стрижня:

$$\Delta E(1) = -\frac{32(1-\nu^2)}{9\pi} \left(\frac{R}{L}\right) \sigma_0^2 \quad (29)$$

Як впливає з (28), для малих тріщин, $\Delta E(\hat{r}) \approx -A\hat{r}^3$, а для розвинених

$$\Delta E(\hat{r}) \approx -B_1 - A^1(1-\hat{r})^{1/2}.$$

Окрім того, $(-\Delta E(\hat{r}))' > 0$, $(-\Delta E(\hat{r}))'' > 0$. Ця властивість дає змогу пояснити результати експериментів в яких поширення пружних хвиль призводить до часткового руйнування (пошкодження): дископодібні тріщини ініціюються але не досягають поверхні стрижня, оскільки відносний приріст енергії руйнування стрімко зростає при наближенні крихкої тріщини до границі. Модель пошкодження

$$\sigma = E_0(1 - f(t - t_f))\delta(x - x_f) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{дозволяє}$$

врахувати скінченну енергію руйнування.

При руйнуванні, швидкість спільного центру інерції фрагментів (а отже, повна кінетична енергія руху як твердих тіл) зберігається. При руйнуванні, швидкості руху фрагментів змінюються стрибком. Руйнування відбувається за рахунок повної енергії стрижня. При подальшому русі фрагментів після руйнування повна механічна енергія фрагментів зберігається. При квазістатичному руйнуванні шляхом поширення крихкої тріщини, енергія руйнування не залежить від періоду руйнування та від швидкості поширення тріщини. В цьому випадку при поширенні тріщини, енергія руйнування залежить від лінійного розміру тріщини за лінійним законом для малих значень та за кубічним законом при великих значеннях.

6. Висновки

Процес поширення та відбиття пружних хвиль в стрижні, що навантажений фінітним імпульсом напружень підкоряється теоремам про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи [8]. Після закінчення процесу навантаження, рух центру інерції та повна механічна енергія зберігаються. Відношення кінетичної енергії руху разом з центром інерції до повної механічної енергії завжди менше 1/2.

В моделі руйнування, що зводиться до прикладання протидіючих навантажень до торців фрагментів, що розділяються також виконуються теореми про рух центру інерції та про зміну повної механічної енергії системи [8]. Кінетичні та потенціальні енергії фрагментів не залежать від часу, повна спільна механічна енергія не змінюється в результаті розділення, незмінним залишається рух спільного центру інерції.

Запропонована друга модель одновимірного динамічного руйнування, що базується на фінітному в часі послабленні жорсткості перерізу руйнування. Руйнування за цією моделлю супроводжується дисипацією енергії, а отже

допускає використання енергетичного критерію руйнування. Застосування такого критерію, вочевидь, дозволяє повне визначення руйнування стрижня: переріз руйнування, момент руйнування, фрагментування чи пошкодження. В той же час, модель має кінематичну інтерпретацію через фіктивний стрибок переміщень в перерізі руйнування. Показано, що за цією моделлю, повна механічна енергія зменшується, хоча рух центру інерції зберігається. А отже, динамічне руйнування відбувається за рахунок зменшення внутрішньої (потенціальної енергії деформацій та кінетичної

енергії відносного руху відносно центру інерції) енергії хвильового процесу в стрижні.

Запропонована модель, що враховує дисипацію енергії при руйнуванні проілюстрована на прикладі руйнування, що визначається квазістатичним поширенням внутрішньої крихкої тріщини, що розташована в перерізі руйнування. Отримано залежність енергії руйнування від відносного радіусу тріщини, асимптотичну поведінку енергії для малих та розвинутих тріщин, а також, підраховану повну енергію руйнування.

Список використаних джерел

1. *Партон В.З.* Механика разрушения: От теории к практике. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990 - 240 с.
2. *Davies R.M.* Stress waves in solids - Cambridge University Press, 1960 - 97 p.
3. *Пестриков В.М., Морозов Е.М.* Механика разрушения твердых тел - СПб: Профессия, 2002 – 320с.
4. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения - М., 1974 – 640 с.
5. *Freund L.D.* The mechanics of dynamic shear crack propagation - Journal of Geophysical Research 84, 1979 - pp. 2199-209.
6. *Achenbach J.D.* Extension of a crack by a shear wave - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 21, 1970 - pp. 887-900.
7. *Freund L.D.* Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid - Journal of Elasticity 2, 1972 - pp. 341-9.
8. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики Том II - Москва: Наука, 1977 - 544с.
9. *Слепян Л.И.* Механика трещин: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Л. И. Слепян. - Ленинград: Судостроение, 1990 – 296 с.
10. *Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х.б* Вычислительная механика разрушения: Пер. с японск. - М.: Мир, 1986 – 334 с.
11. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология: Теория и методы: В 2-х т. - М.: Мир, 1983 - 520 с.

References

1. *PARTON V.Z.* (1990) *Mehanika razrusheniya: Ot teorii k praktike*, M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 240 p.
2. *DAVIES R.M.* (1960) *Stress waves in solids*. Cambridge University Press, 97 p.
3. *PESTRIKOV V.M., MOROZOV E.M.* (2002) *Mehanika razrusheniya tverdyih tel*. SPb: Professiya, 320 p.
4. *CHEREPANOV H.P.* (1974) *Mehanika hrupkogo razrusheniya*. M, 640 p.
5. *FREUND L.D.* (1979) *The mechanics of dynamic shear crack propagation*, Journal of Geophysical Research 84, pp. 2199-209.
6. *ACHENBACH J.D.* (1970) *Extension of a crack by a shear wave*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 21, pp. 887-900.
7. *FREUND L.D.* (1972) *Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid*, Journal of Elasticity 2, pp. 341-9.
8. *KILCHEVSKIY N.A.* (1977) *Kourse Teoreticheskoy Mehaniki*. Moskva: Nauka, 544 p.
9. *SLEPIAN L.I.* (1990) *Mehanika Treschin. 2nd Ed.* Leningrad: Sudostroenie, 296 p.
10. *SIRATORI M., MIYOSI T., MATSUSITA H.B* (1986) *Vyichislitel'naya mehanika razrusheniya*. M.: Mir, 334 p.
11. *AKI K., RICHARDS P.* (1983) *Quantitative Seismology: 2nd Edition*, 520 p.

Надійшла до редколегії 16.01.2020