УДК 519.21 <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.3>

А.О. Пашко¹, д.ф.-м.н., професор
Т.О. Яневич², к.ф.-м.н., доцент

Методи моделювання процесу Орнштейна-Уленбека

^{1,2}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.
e-mails: ¹aap2011@ukr.net, ²yata452@univ.kiev.ua

A.O.Pashko¹, Dr.Sci., Professor
T.O.Ianevych², Ph.D., Associate Professor

Methods for modeling the Ornstein-Uhlenbeck process

^{1,2}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv. 64 Volodymyrska st.,
e-mails: ¹aap2011@ukr.net, ²yata452@univ.kiev.ua

У роботі вивчаються два методи моделювання випадкового процесу Орнштейна-Уленбека. Цей процес має безліч застосувань - у фізиці, фінансовій математиці, біології, тому вкрай важливою є можливість моделювати цей процес для вирішення різних теоретичних та практичних задач. Особливістю цього процесу є те, що він має багато цікавих властивостей - він є гауссовим процесом, є стаціонарним процесом, є марківським процесом, є розв'язком стохастичного рівняння Ланжевена тощо. Кожна із цих властивостей дозволяє застосовувати до цього процесу різні методи моделювання. Ми розглянули лише два методи, хоча їх є набагато більше. Один метод використовує те, що цей процес є гауссовим. Інший - базується на розкладі Фур'є. Для обох цих методів було отримано конкретні умови, коли ці моделі відповідають заданим рівням точності та надійності.

Ключові слова: процес Орнштейна-Уленбека, моделювання із заданою точністю та надійністю, центрований гауссовий процес, розклад Фур'є.

Two methods of modeling for the Ornstein-Uhlenbeck process are studied in the work. This process has many applications in physics, financial mathematics, biology. Therefore, it is extremely important to have instruments for modeling this process to solve various theoretical and practical tasks. The peculiarity of this process is that it has many interesting properties: it is Gaussian process, is a stationary process, is a Markov process, it is a solution of the Langevin stochastic equation, etc. Each of these properties allows you to apply different methods to this process modeling. We have considered only two methods, although there are many more. One method uses the fact that this process is Gaussian. Another is based on the Fourier expansion. For both of these methods there were specific conditions are obtained when these models satisfy the given levels of accuracy and reliability.

Key Words: Ornstein-Uhlenbeck process, modeling with given accuracy and reliability, centered gaussian process, Fourier series.

1 Вступ

Процес Орнштейна-Уленбека має дуже довгу та цікаву історію. Він виник як альтернатива Вінерівському процесу при побудові моделі руху зваженої частинки, що рухається в рідині. В 30-х роках двадцятого століття данські фізики-теоретики Леонард Орнштейн та Джордж Уленбек [7] запропонували модель, що враховує, на відміну від процесу Вінера, ньютонівську взаємодію частинок. Ця модель описувала поведінку частинок за допомогою рівняння Ланжевена. Невироджений розв'язок цього стохастичного рівняння і назвали процесом Орнштейна-Уленбека. Він має безліч застосу-

вань в фізиці, фінансовій математиці, еволюційній біології тощо. Тому моделювання такого процесу має дуже важливе значення для практичного застосування у різних прикладних задачах.

Процес Орнштейна-Уленбека є стаціонарним, гауссівським та марківським. Найбільшого розповсюдження набув процес Орнштейна-Уленбека, що має нульове математичне сподівання, тобто є центрованим. Різні методи моделювання саме такого процесу ми будемо досліджувати в цій статті.

Наведемо математично строге означення цього процесу.

Означення 1.1. Процес Орнштейна-Уленбека $X(t)$ – це стаціонарний центрований гауссівський процес з кореляційною функцією

$$B(\tau) = EX(t+\tau)X(t) = \sigma \exp(-\alpha|\tau|), \quad \sigma, \alpha > 0.$$

При моделюванні процесу Орнштейна-Уленбека можна використовувати:

- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як гауссівського стаціонарного процесу;
- зображення Фур'є для процесу Орнштейна-Уленбека;
- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як процесу з дискретним спектром;
- зображення процесу Орнштейна-Уленбека як розв'язку стохастичного рівняння.

В даній статті ми докладно розглянемо перші два підходи. Два інших залишимо на майбутнє. Також варто зауважити, що наведений список методів моделювання процесу Орнштейна-Уленбека далеко не повний – ми навели лише основні. Зокрема, для перших двох підходів можна визначити певні умови, коли для моделі можна знайти умови, при яких вона буде мати задані точність та надійність. Докладніше про методи моделювання різних процесів із потрібною точністю та надійністю можна ознайомитись в книзі [5].

Означення 1.2. Нехай випадковий процес $X(t), t \in T$ та його модель $X_n(t, \Lambda)$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\|\cdot\|$. Нехай задано два числа $\delta > 0$ та $0 < \varepsilon < 1$. Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ та точністю $\delta > 0$ у нормі простору $A(T)$, якщо має місце нерівність

$$P\{\|X(t) - X_n(t, \Lambda)\| > \delta\} \leq \varepsilon.$$

2 Моделювання гауссівських стаціонарних випадкових процесів

Нехай $(T, \mathcal{B}, \mu)$ – деякий вимірний простір з $\mu(T) = 1$.

Нехай $X(t), t \in R^+$ – гауссовий стаціонарний випадковий процес, $EX(t) = 0, B(\tau) =$

$EX(t+\tau)X(t) = \int_0^\infty \cos(u\tau) dF(u)$ – кореляційна функція процесу, $F(u)$ – спектральна функція. Випадковий процес $X(t), t \in R^1$ має зображення

$$X(t) = \int_0^\infty \cos(tu) d\zeta_1(u) + \int_0^\infty \sin(tu) d\zeta_2(u),$$

де $\zeta_1(u), \zeta_2(u)$ – центровані некорельовані випадкові процеси з некорельованими природами такі, що для довільних $0 \leq u_1 < u_2$ має місце рівність $E(\zeta_1(u_2) - \zeta_1(u_1))^2 = E(\zeta_2(u_2) - \zeta_2(u_1))^2 = F(u_2) - F(u_1)$.

Для моделювання випадкового процесу для деякого $\Lambda > 0$ використаємо зображення:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^\infty \cos(tu) d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_0^\infty \sin(tu) d\zeta_2(u) = \\ &= \int_0^\Lambda \cos(tu) d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_0^\Lambda \sin(tu) d\zeta_2(u) + \\ &+ \int_\Lambda^\infty \cos(tu) d\zeta_1(u) + \\ &+ \int_\Lambda^\infty \sin(tu) d\zeta_2(u). \end{aligned}$$

Означення 2.1. Нехай $\Lambda > 0, D(\Lambda, n) : 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n = \Lambda$ – розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$. Випадковий процес $X_n(\Lambda, t) = \sum_{i=0}^{n-1} \cos(u_i t) (\zeta_1(u_{i+1}) - \zeta_1(u_i)) + \sin(u_i t) (\zeta_2(u_{i+1}) - \zeta_2(u_i))$ називається апроксимаційною моделлю процесу $X(t)$ (Λ – модель).

Отже, Λ – модель процесу $X(t)$ можна отримати змодельовавши суму $X_n(\Lambda, t) = \sum_{i=0}^{n-1} (\cos(u_i t) \eta_i^1 + \sin(u_i t) \eta_i^2)$, де $\{\eta_i^1, \eta_i^2\}$ – незалежні строго субгауссові випадкові величини з $E\eta_i^1 = E\eta_i^2 = 0$ та $E(\eta_i^1)^2 = E(\eta_i^2)^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$.

Розглядаються строго субгауссові випадкові величини тому, що вони отримуються при моделюванні гауссових випадкових величин. Це викликано точністю представлення чисел в обчислювальних системах та наближених алгоритмах моделювання гауссових випадкових величин. Докладніше про теорію строго субгауссових випадкових величин можна ознайомитись в книзі [1].

В роботі [2] отримано оцінки точності і надійності в рівномірній метриці. В роботах [3] - [4] отримано оцінки точності і надійності в просторах Орліча. Простори $L_2(T)$ - частинний випадок просторів Орліча.

Для оцінки параметрів моделей із заданими точністю та надійністю скористаємось результатами таких теорем:

Теорема 2.1. [2] Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2(T)$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:

$$B2_{n,\Lambda} < \delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B2_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B2_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon, \text{ де } B2_{n,\Lambda} = \int_T E(X(t) - X_n(t, \Lambda))^2 d\mu(t).$$

Теорема 2.2. [3, 4] Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0, T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:

$$B3_{n,\Lambda} < \delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{B3_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B3_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon, \text{ де } B3_{n,\Lambda} = 2T \sum_{i=0}^n \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(1 - \frac{\sin(T(\lambda - \lambda_i))}{T(\lambda - \lambda_i)}\right) f(\lambda) d\lambda + T \left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda) d\lambda\right).$$

Нехай для розбиття D_{Λ} виконується умова $T(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leq 1$, тоді мають місце такі наслідки:

Наслідок 2.1. Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0, T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:

$$G1_{n,\Lambda} < \delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G1_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G1_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon, \text{ де } G1_{n,\Lambda} = \frac{T}{3} \sum_{i=0}^n \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\lambda - \lambda_i)^2 f(\lambda) d\lambda + T \left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda) d\lambda\right).$$

Якщо розбиття вибрати рівномірним, тобто, $\lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Lambda}{n}$ і $\frac{T\Lambda}{n} \leq 1$ тоді матимемо інший наслідок.

Наслідок 2.2. Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0, T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:

$$G2_{n,\Lambda} < \delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G2_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon, \text{ де } G2_{n,\Lambda} = \frac{T^3\Lambda^2}{3n^2} \int_0^{\Lambda} f(\lambda) d\lambda + T \left(\int_{\Lambda}^{\infty} f(\lambda) d\lambda\right).$$

Для процесу Орнштейна-Уленбека

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)},$$

$$F(u) = \int_0^u f(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma^2}{\pi} \arctg\left(\frac{u}{\alpha}\right).$$

Тоді

Наслідок 2.3. Модель $X_n(t, \Lambda)$ наближає процес Орнштейна-Уленбека $X(t)$ з надійністю $1 - \varepsilon$ і точністю δ в нормі простору $L_2([0, T])$, якщо для чисел Λ та n виконуються нерівності:

$$G2_{n,\Lambda} < \delta^2 \text{ та } \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{\sqrt{G2_{n,\Lambda}}} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2G2_{n,\Lambda}}\right\} \leq \varepsilon, \text{ де } G2_{n,\Lambda} = \frac{T^3\Lambda^2}{3n^2} F(\Lambda) + T(F(\infty) - F(\Lambda)) = \frac{T\sigma^2}{2} + T \frac{\sigma^2}{\pi} \arctg\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right) \left[\frac{T^2\Lambda^2}{3n^2} - 1\right].$$

Таблиця 2.1 Оцінки різних чисел Λ та n для моделі процесу Орнштейна-Уленбека для заданих надійності $1 - \varepsilon$ та точності δ коли $T = 1$ та $\alpha = \sigma = 1$.

№	Λ	n	δ	ε
1	1000	13000	0.1	0.1
2	2000	65000	0.05	0.1
3	50000	8000000	0.01	0.1
4	1000	15000	0.1	0.05
5	2900	95000	0.05	0.05
6	55000	10000000	0.01	0.05
7	2000	33000	0.1	0.01
8	11000	350000	0.05	0.01
9	300000	47000000	0.01	0.01

Рис 2.1. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека як гауссового процесу

$$\delta = 0.1, \varepsilon = 0.1, T = 1, \alpha = \sigma = 1$$

Рис 2.2. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека як гауссового процесу

$$\delta = 0.05, \varepsilon = 0.1, T = 1, \alpha = \sigma = 1$$

3 Моделювання процесу Орнштейна-Уленбека із використанням розкладу Фур'є

Нехай на інтервалі $T = [0, T]$ кореляційну функцію процесу $X(t)$ можна розкласти у ряд Фур'є

$$B(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right),$$

де коефіцієнти $b_k^2 = \frac{\gamma_k}{T} \int_0^T B(\tau) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) d\tau$ та $\gamma_k = \begin{cases} 2, & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$ є невід'ємними.

Розглянемо випадковий процес

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\xi_k \cos\left(\frac{\pi kt}{T}\right) + \eta_k \sin\left(\frac{\pi kt}{T}\right) \right), \quad (1)$$

де $\{\xi_k, \eta_k\}, k = 0, 1, \dots$ – незалежні випадкові величини такі, що $E\xi_k = E\eta_k = 0, k = 0, 1, \dots, E\xi_k^2 = E\eta_k^2 = b_k^2$.

Процес $Y(t)$ – стаціонарний випадковий процес. Якщо цей процес розглянути на відрізку $[0, T]$, то його кореляційна функція збігається на інтервалі $[0, T]$ з кореляційною функцією $B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right)$. Отже, процес $Y(t)$ можна розглядати як модель процесу $X(t)$ на $T = [0, T]$. Більш докладно із теорією розкладів Фур'є для випадкових процесів можна ознайомитись в книзі [6].

Теорема 3.1. [6] Якщо кореляційна функція $B(\tau)$ опукла на відрізку $[0, T]$, то коефіцієнти Фур'є цієї функції b_k^2 невід'ємні.

Для кореляційної функції процесу Орнштейна-Уленбека $B(\tau) = \sigma \exp(-\alpha\tau), \tau \in$

$[0, T]$, маємо:

$$\begin{aligned} \int B(\tau) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) d\tau &= \\ &= \sigma \frac{\exp(-\alpha T)}{\alpha^2 + d_k^2} [d_k \sin(d_k T) - \alpha \cos(d_k T)], \end{aligned}$$

де $d_k = \frac{\pi k}{T}$. Тоді

$$\begin{aligned} b_k^2 &= \frac{\gamma_k}{T} \int_0^T B(\tau) \cos\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) d\tau = \\ &= \frac{\gamma_k}{T} \frac{\alpha\sigma}{\alpha^2 + d_k^2} \left(1 + (-1)^{k+1} \exp(-\alpha T)\right), \quad (2) \end{aligned}$$

а отже, випадковий процес $X(t)$ на проміжку $[0, T]$ можна представити у вигляді (1).

Означення 3.1. Випадковий процес $X_M(t) = \sum_{k=0}^M (\xi_k \cos(\frac{\pi kt}{T}) + \eta_k \sin(\frac{\pi kt}{T}))$, де випадкові величини $\{\xi_k, \eta_k\}, k = 0, 1, \dots$ визначені в (1) та (2), будемо називати моделлю Фур'є процесу Орнштейна-Уленбека $X(t)$ з кореляційною функцією $B(\tau) = \sigma \exp(-\alpha\tau), \tau \in [0, T]$.

Теорема 3.2. Модель Фур'є процесу $X_M(t)$ наближає процес $X(t)$ з точністю $\delta > 0$ та надійністю $0 < 1 - \varepsilon < 1$ в просторі $L_2(T)$, якщо M задовольняє нерівності:

$$\delta > A_{M+1}, \exp\left\{\frac{1}{2}\right\} \frac{\delta}{A_{M+1}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2A_{M+1}^2}\right) \leq \varepsilon, \text{ де } A_{M+1}^2 = T \sum_{k=M+1}^{\infty} b_k^2.$$

Наслідок 3.1. Для процесу Орнштейна-Уленбека $X(t)$ величина

$$\begin{aligned} A_{M+1}^2 &= T \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{T} \frac{\alpha\sigma}{\alpha^2 + d_k^2} \left(1 + (-1)^{k+1} e^{-\alpha T}\right) = \\ &= 2\alpha\sigma \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{-\alpha T}}{\alpha^2 + \left(\frac{\pi k}{T}\right)^2} = \\ &= 2\alpha\sigma T^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1} e^{-\alpha T}}{T^2 \alpha^2 + \pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Оскільки точно порахувати цю величину аналітично не можливо, тому оцінимо її зверху

$$\begin{aligned} A_{M+1}^2 &\leq 2\alpha\sigma T^2 \frac{1 + e^{-\alpha T}}{\pi^2} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \\ &= 2\alpha\sigma T^2 \frac{1 + e^{-\alpha T}}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Таблиця 3.2 Оцінки різних значень чисел M для моделі Фур'є процесу Орнштейна-Уленбека для заданих надійності $1 - \varepsilon$ та точності δ коли $T = 1$ та $\alpha = \sigma = 1$.

№	M	δ	ε
1	230	0.1	0.1
2	900	0.05	0.1
3	21500	0.01	0.1
4	270	0.1	0.05
5	1050	0.05	0.05
6	26000	0.01	0.05
7	370	0.1	0.01
8	1500	0.05	0.01
9	36000	0.01	0.01

Рис 3.1. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є

$$\delta = 0.1, \varepsilon = 0.1, T = 1, \alpha = \sigma = 1$$

Рис 3.2. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є

$$\delta = 0.05, \varepsilon = 0.1, T = 1, \alpha = \sigma = 1$$

Рис 3.3. Реалізації процесу Орнштейна-Уленбека методом розкладу в ряд Фур'є

$$\delta = 0.01, \varepsilon = 0.1, T = 1, \alpha = \sigma = 1$$

4 Висновки

В статті було розглянуто два методи моделювання центрованого процесу Орнштейна-Уленбека. Перший метод базується на загальних принципах моделювання гауссових процесів, оскільки процес Орнштейна-Уленбека є гауссовим процесом. Оцінки точності і надійності знайдено в загальному випадку, вони майже не залежать від виду кореляційної функції.

Другий метод використовує розклади кореляційної функції процесу в ряд Фур'є. І оцінки точності і надійності знайдено для конкретної кореляційної функції. Тому така велика різниця в кількості доданків у моделях.

Для обох методів були наведені основні теоретичні результати, що дозволяють моделювати процес із заданими точністю та надійністю. Були зроблені відповідні підрахунки та визначені умови на певні параметри, що дозволяють будувати реалізації із необхідними точністю і надійністю.

Другий метод моделювання більш простий в застосуванні. Але обидва вони потребують попередніх знань та навичок моделювання гауссових випадкових величин. Зокрема, треба мати на увазі, що при їх моделюванні отримуються строго субгаусові випадкові величини.

В майбутньому планується дослідити інші методи моделювання процесу Орнштейна-Уленбека, їх точність і надійність. Набувають популярності методи моделювання гауссових випадкових процесів з відомими кореляційними функціями, що також будуть об'єктами наших подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. В.В.Булдыгин, Ю.В.Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, - Киев, "ТВиМС", 1998. - 290 с.
2. Козаченко Ю.В., Пашко А.А. Об распределении супремума гауссовских стационарных процессов. // Украинский математический журнал. N3. – Т.41, – 1989.
3. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича.І.// Теорія ймовірностей та мат. статистика. Вип. 58, – 1998. С.45-60.
4. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича.ІІ.// Теорія ймовірностей та мат. статистика. Вип. 59, – 1998. С. 75-90.
5. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. *Моделювання випадкових процесів та полів*. – Київ. ВПЦ Задруга, 2007. – 230 с.
6. Харди Г.Х., Рогозинский В.В *Ряды Фурье*. – М.:1966. - 157 с.
7. G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein On the Theory of the Brownian Motion. // Phys. Rev. 36. – 1930.

References

1. BULDYGIN V.V.; KOZACHENKO YU.V. *Metric characterization of random variables and random processes. (Transl. from the Russian)*. Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. xii, 257 p. - 2000.
2. KOZACHENKO YU.V., PASHKO A.O. On the distribution of supremum for Gaussian stationary processes. Ukrainian Mathematical Journal. No 3. Issue.41, 1989. (In Russian)
3. KOZACHENKO YU.V.; PASHKO A.O. "Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I.". Theory Probab. Math. Stat. 58, pp. 51 - 66, - 1999.
4. KOZACHENKO YU.V.; PASHKO A.O. "Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II.". Theory Probab. Math. Stat. 59, pp. 77 - 92, - 1999
5. KOZACHENKO YU.V., PASHKO A.O., ROZORA I.V. *Modelling stochastic processes and fields*. Kyiv. Zadruga, 2007.- 230 P.
6. HARDY G. H., ROGOSINSKI W. W. *Fourier Series*. Cambridge University Press. London 1956. – 157 P.
7. G. E. UHLENBECK AND L. S. ORNSTEIN *On the Theory of the Brownian Motion* Phys. Rev. 36. – 1930.

Received: 11.01.2019